



CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 5. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TIỄN



LÝ THUYẾT.

- Ta có thể vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết nhiều bài toán liên quan đến thực tiễn trong những lĩnh vực khác nhau như kinh tế, khoa học, kỹ thuật,.

Một số lưu ý quan trọng:

- Đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại điểm $x = a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lý, hoá học, sinh học và kinh tế:

- Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật: $a(t) = v(t) = s''(t)$.

- Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t , thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t .

- Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t , thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t .

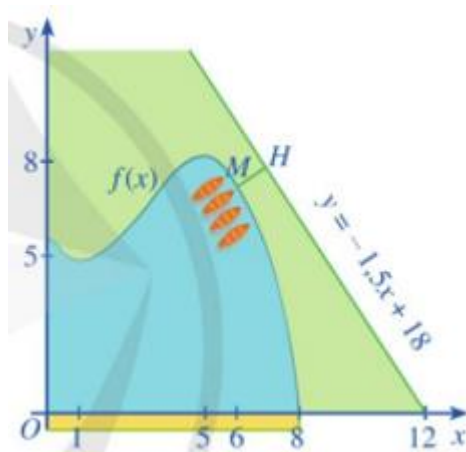
- Nếu $C = C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.

Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x + 1$.



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1: Một hồ nước nhân tạo được xây dựng trong một công viên giải trí. Trong mô hình minh hoạ (Hình vẽ bên dưới), nó được giới hạn bởi các trục toạ độ và đồ thị của hàm số: $y = f(x) = \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56)$. Đơn vị đo độ dài trên mỗi trục toạ độ là 100 m.



- a) Đường dạo ven hồ chạy dọc theo trục Ox dài bao nhiêu mét?
- b) Tại những điểm nào trên đường đi dạo ven hồ (chạy dọc theo trục Ox) thì khoảng cách theo phương thẳng đứng đến bờ hồ đối diện là lớn nhất? Tìm khoảng cách lớn nhất đó.
- c) Trong công viên có một con đường chạy dọc theo đồ thị hàm số $y = -1,5x + 18$. Người ta dự định xây dựng bên bờ hồ một bến thuyền đập nước sao cho khoảng cách từ bến thuyền đến con đường này là ngắn nhất. Tìm tọa độ của điểm để xây bến thuyền này.

Lời giải

a) Trong Hình 25, đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56)$ cắt tia Ox tại điểm có hoành độ $x = 8$. Vậy đường dạo ven hồ chạy dọc theo trục Ox dài 800 m.

b) Ta khảo sát hàm số: $y = f(x) = \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56)$ với $0 \leq x \leq 8$.

$$f'(x) = \frac{1}{10}(-3x^2 + 18x - 15); f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 18x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 5.$$

Bảng biến thiên:

x	0	1	5	8	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	5,6		4,9	8,1	0

Căn cứ bảng biến thiên, ta có: $\max_{[0;8]} f(x) = f(5) = 8,1$ tại $x = 5$.

Vậy khoảng cách lớn nhất theo phương thẳng đứng từ một điểm trên đường đi dạo ven hồ (chạy dọc theo trục Ox) đến bờ hồ đối diện là:

$100 \cdot (\max_{[0;8]} f(x)) = 100 \cdot 8,1 = 810$ (m) và đạt được tại điểm trên đường đi dạo ven hồ cách gốc O một khoảng cách là 500 m.

c) Xét điểm $M(x; f(x))$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56)$ với $0 \leq x \leq 8$.

Khoảng cách từ điểm $M(x; f(x))$ đến đường thẳng $y = -1,5x + 18 \Leftrightarrow -1,5x - y + 18 = 0$ là:



$$MH = \frac{\left| -1,5x - \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56) + 18 \right|}{\sqrt{(-1,5)^2 + 1}} = \frac{|x^3 - 9x^2 + 124|}{10\sqrt{3,25}}$$

Ta khảo sát hàm số: $h(x) = x^3 - 9x^2 + 124$ với $0 \leq x \leq 8$.

$$h'(x) = 3x^2 - 18x;$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 6.$$

Bảng biến thiên:

x	0	6	8
$h'(x)$	0	-	0
$h(x)$	124	16	60

Căn cứ bảng biến thiên, ta có: $h(x) > 0$ với $0 \leq x \leq 8$;

$$\min_{[0;8]} h(x) = h(6) = 16 \text{ tại } x = 6.$$

Do đó, $\min MH = \min_{[0;8]} \frac{|x^3 - 9x^2 + 124|}{10\sqrt{3,25}} = \frac{1}{10\sqrt{3,25}} \cdot \min_{[0;8]} h(x) = \frac{16}{10\sqrt{3,25}} \approx 0,8875$ và đạt được tại $x = 6$. Khi đó, $f(6) = 7,4$.

Vậy trong mặt phẳng tọa độ Oxy ở Hình vẽ ban đầu, điểm để xây bến thuyền có tọa độ là $M(6; 7,4)$.

Câu 2: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức: $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người) (Nguồn: Giải tích 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam)

- Tính số dân của thị trấn vào năm 2022 (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).
 - Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $f(t)$.
 - Đạo hàm của hàm số $y = f(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm).
- Tính tốc độ tăng dân số vào năm 2022 của thị trấn đó.
 - Vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0,192 nghìn người/năm?

Lời giải

a) Ta có: $f(52) = \frac{26 \cdot 52 + 10}{52 + 5} = \frac{1362}{57} \approx 23,895$ (nghìn người).

Vậy số dân của thị trấn vào năm 2022 khoảng 23 895 người.

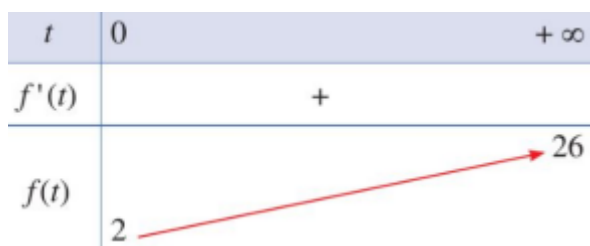
b) 1) Sự biến thiên

• Giới hạn tại vô cực và đường tiệm cận ngang:

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 26$. Do đó, đường thẳng $y = 26$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$f'(t) = \frac{120}{(t+5)^2} > 0 \text{ với mọi } t \geq 0.$$

Bảng biến thiên

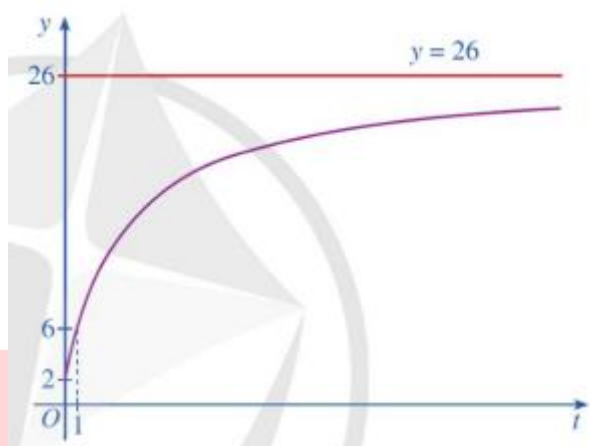


Hàm số ĐB trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Hàm số không có cực trị.

2) Đồ thị

- Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0; 2)$.
- Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; 6)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = f(t) = \frac{26t+10}{t+5}, t \geq 0$ thể hiện như hình vẽ dưới đây:



c)

c1) Tốc độ tăng dân số vào năm 2022 của thị trấn là: $f'(52) = \frac{120}{(52+5)^2} = \frac{40}{1083}$

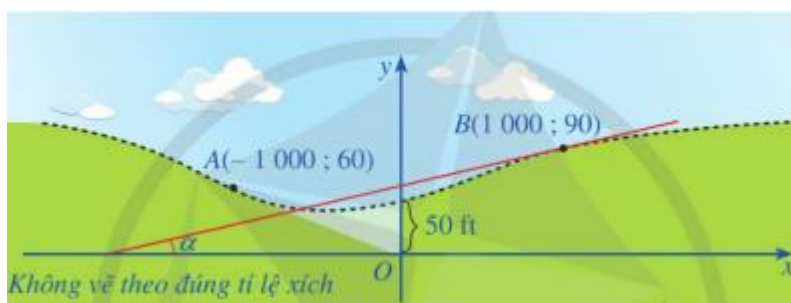
c2) Ta có: $f'(t) = 0,192 \Leftrightarrow \frac{120}{(t+5)^2} = 0,192 \Leftrightarrow t = 20$ (do $t \geq 0$)

Vậy vào năm 1990, thì tốc độ tăng dân số là 0,192 nghìn người/năm.

Câu 3: (Bài toán thiết kế mô hình đường giao thông) Để thiết kế mô hình của một đoạn đường cao tốc nối hai sườn đồi với sự khác biệt về độ cao ở vị trí hai sườn đồi giao nhau là 50 feet (Hình vẽ), người ta có thể làm như sau:

- Chọn hệ trục tọa độ Oxy với gốc O là vị trí hai sườn đồi giao nhau, phương nằm ngang là trục Ox, đơn vị trên mỗi trục tọa độ là feet (1 feet = 0,3048 m).
- Chọn hai vị trí A, B lần lượt trên hai sườn đồi. Bằng cách đo đạc tại thực địa, ta xác định được tọa độ của hai điểm A, B và góc dốc α (đơn vị: độ) tại điểm B của sườn đồi. Giả sử ta có $A(-1000; 60)$, $B(1000; 90)$ và $\tan \alpha = 0,04$ (Hình 27) (Nguồn: R. Larson and **B. Edwards**, *Calculus 10e*, Cengage 2014).
- Trong hệ trục tọa độ Oxy, quan sát đường cong (vẽ bằng nét đứt) mô phỏng đoạn đường cao tốc nối hai sườn đồi, đường cong đó gọi nên hình ảnh đồ thị của hàm số bậc ba. Vì thế ta có thể chọn hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) sao cho trong hệ trục tọa độ Oxy, đồ thị của hàm số đó trên đoạn

$[-1000; 1000]$ mô phỏng đoạn đường cao tốc cần thiết kế. Ta chọn theo nguyên tắc: Hệ số góc của tiếp tuyến tại B của đồ thị hàm số đó bằng 0,04.



a) Hãy xác định hàm số bậc ba đó.

b) Góc dốc của con đường trên đoạn $[-1000; 1000]$ lớn nhất tại điểm nào?

Lời giải

a) Do đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) đi qua điểm $(0; 50)$ nên $d = 50$, suy ra: $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 50$.

Do đồ thị đi qua các điểm $A(-1000; 60)$, $B(1000; 90)$ nên ta có:

$$\begin{cases} -1\,000\,000\,000a + 1\,000\,000\,000b - 1\,000\,000c = 10 \\ 1\,000\,000\,000a + 1\,000\,000\,000b + 1\,000\,000c = 40 \end{cases}$$

$$\text{Hay } \begin{cases} -1\,00\,000\,000a + 100\,000\,000b - 100\,000c = 1 \\ 1\,00\,000\,000a + 100\,000\,000b + 100\,000c = 4 \end{cases}, \text{ suy ra } \begin{cases} b = \frac{1}{40000} \\ 100\,000\,000a + 100\,000c = 1,5 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 3ax^2 + \frac{1}{20\,000}x + c$$

Do hệ số góc của tiếp tuyến tại B của đồ thị hàm số đó bằng 0,04 nên

$$f'(1000) = 3000\,000a + \frac{1}{20} + c = 0,04 \text{ tức là } 3000\,000a + c = -0,01.$$

hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 100\,000\,000a + 100\,000c = 1,5 \\ 3\,000\,000a + c = -0,01 \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} a = -\frac{1}{80\,000\,000} \\ c = \frac{11}{400} \end{cases}$$

$$\text{àm số bậc ba cần tìm là: } f(x) = -\frac{1}{80\,000\,000}x^3 + \frac{1}{40\,000}x^2 + \frac{11}{400}x + 50$$

Câu 4: (Bài toán thiết kế mô hình đánh giá kỹ năng) Một trung tâm dạy nghề cần thiết kế mô hình đánh giá kỹ năng của một học viên theo học nghề đánh máy. Người ta có thể làm như sau:

- Để xây dựng mô hình toán học cho bài toán trên, ta sử dụng thống kê. Bằng cách khảo sát tốc độ đánh máy trung bình S (tính bằng từ trên phút) của học viên đó sau 1 tuần học ($5 \leq t \leq 30$), ta thu thập các số liệu thống kê được cho trong Bảng 1 (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014).

t	5	10	15	20	25	30
S	38	56	79	90	93	94

Bảng 1



• Ta cần chọn hàm số $y = f(t)$ để biểu diễn các số liệu ở Bảng 1, tức là ở hệ trục tọa độ Oxy, đồ thị của hàm số đó trên khoảng $(0; +\infty)$ “gần” với các điểm A(5; 38), B(10; 56), C(15; 79), D(20; 90), E(25; 93), G(30; 94). Ngoài ra, do tốc độ đánh máy trung bình của học viên tăng theo thời gian t và chỉ đến một giới hạn M nào đó cho dù thời gian t có kéo dài đến vô cùng nên hàm số $y = f(t)$ phải thỏa mãn thêm hai điều kiện: Hàm số đó ĐB trên khoảng $(0; +\infty)$ và $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = M \in \mathbb{R}, M > 94$. Vì các hàm đa thức (với bậc lớn hơn hoặc bằng 1) không thỏa mãn hai điều kiện đó nên ta chọn một hàm phân thức hữu tỉ để biểu diễn các số liệu ở Bảng 1.

Ta có thể chọn hàm số có dạng $f(t) = \frac{at+b}{ct+d}$ ($ac \neq 0$) cho mục đích đó. Dựa vào Bảng 1, ta chọn hàm số:

$$f(t) = \frac{110t - 280}{t + 2}, (t > 0)$$

a) Dựa theo mô hình đó, dự đoán tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau 40 tuần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của từ/phút)

b) Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên khoảng $(0; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

c) Nêu nhận xét về tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau thời gian t ngày càng lớn.

Lời giải

a) Ta có: $f(40) = \frac{110 \cdot 40 - 280}{40 + 2} \approx 98$. Vậy tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau 40 tuần là khoảng 98 từ/phút.

b) Ta có: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{110t - 280}{t + 2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(110 - \frac{500}{t + 2} \right) = 110$

Vậy đường thẳng $y = 110$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(t)$.

c) Do đường thẳng $y = 110$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(t)$ nên khi t càng lớn thì tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sẽ tiến gần đến mức 110 từ/phút.

Câu 5: Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 2 m với vận tốc ban đầu 24,5 m/s là $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$ (theo Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).

a) Tìm vận tốc của vật sau 2 giây.

b) Khi nào vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao lớn nhất đó là bao nhiêu?

c) Khi nào thì vật chạm đất và vận tốc của vật lúc chạm đất là bao nhiêu?

Lời giải

a) Theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm, vận tốc của vật là $v = h'(t) = 24,5 - 9,8t$ (m/s).

Do đó, vận tốc của vật sau 2 giây là $v(2) = 24,5 - 9,8 \cdot 2 = 4,9$ (m/s).

b) Vì $h(t)$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = -4,9 < 0$ nên $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = -\frac{b}{2a} = \frac{24,5}{2 \cdot 4,9} = 2,5$

(giây). Khi đó, độ cao lớn nhất của vật là $h(2,5) = 32,625$ (m).

c) Vật chạm đất khi độ cao bằng 0, tức là $h = 2 + 24,5t - 4,9t^2 = 0$, hay $t \approx 5,08$ (giây).

Vận tốc của vật lúc chạm đất là $v(5,08) = 24,5 - 9,8 \cdot 5,08 = -25,284$ (m/s).



Vận tốc âm chứng tỏ chiều chuyển động của vật là ngược chiều dương (hướng lên trên) của trục đã chọn (khi lập phương trình chuyển động của vật).

Câu 6: Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b . Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

Lời giải

Ta có: $P'(t) = \frac{0,75ae^{-0,75t}}{(b + e^{-0,75t})^2}, t \geq 0$

Theo đề bài, ta có: $P(0) = 20$ và $P'(0) = 12$. Do đó, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{a}{b+1} = 20 \\ \frac{0,75a}{(b+1)^2} = 12 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được $a = 25$ và $b = \frac{1}{4}$

Khi đó, $P'(t) = \frac{18,75e^{-0,75t}}{\left(\frac{1}{4} + e^{-0,75t}\right)^2} > 0, \forall t \geq 0$, tức là số lượng quần thể nấm men luôn tăng.

Tuy nhiên, do $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{\frac{1}{4} + e^{-0,75t}} = 100$ nên số lượng quần thể nấm men tăng nhưng không vượt quá 100 tế bào.

Câu 7: Giả sử chi phí $C(x)$ (nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị của một loại hàng hoá nào đó được cho bởi hàm số $C(x) = 30\,000 + 300x - 2,5x^2 + 0,125x^3$.

- Tìm hàm chi phí biên.
- Tìm $C'(200)$ và giải thích ý nghĩa.
- So sánh $C'(200)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201.

Lời giải

a) Hàm chi phí biên là $C'(x) = 300 - 5x + 0,375x^2$.

b) Ta có: $C'(200) = 300 - 5 \cdot 200 + 0,375 \cdot 200^2 = 14\,300$.

Chi phí biên tại $x = 200$ là 14 300 nghìn đồng, nghĩa là chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo (đơn vị hàng hoá thứ 201) là khoảng 14 300 nghìn đồng.

c) Chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201 là

$$C(201) - C(200) = 1\,004\,372,625 - 990\,000 = 14\,372,625 \text{ (nghìn đồng).}$$

Giá trị này xấp xỉ với chi phí biên $C'(200)$ đã tính ở câu b.

Câu 8: Một nhà sản xuất cần làm những hộp hình trụ có thể tích 1 lít. Tìm các kích thước của hộp đựng để chi phí vật liệu dùng để sản xuất là nhỏ nhất (kết quả được tính theo centimet và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

Đổi 1 lít = 1 000 cm³.



Gọi r (cm) là bán kính đáy của hình trụ, h (cm) là chiều cao của hình trụ.

Diện tích toàn phần của hình trụ là: $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

Do thể tích của hình trụ là $1\,000\text{ cm}^3$ nên ta có: $1000 = V = \pi r^2 h$, hay $h = \frac{1000}{\pi r^2}$

Do đó, diện tích toàn phần của hình trụ là: $S = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}, r > 0$

Ta cần tìm r sao cho S đạt giá trị nhỏ nhất. Ta có: $S' = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2}$; $S' = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$

Bảng biến thiên:

r	0	$\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$	$+\infty$	
$S'(r)$		-	0	+
$S(r)$	$+\infty$		$S\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)$	$+\infty$

$$\text{Khi đó: } h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}^2} = \frac{100}{\sqrt[3]{250\pi}}$$

Vậy cần sản xuất các hộp đựng hình trụ có bán kính đáy $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5,42$ (cm) và chiều cao

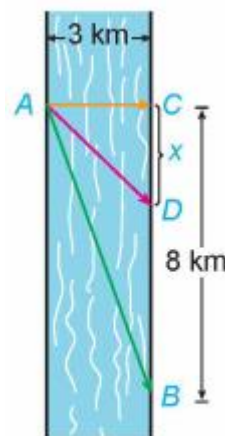
$$h = \frac{100}{\sqrt[3]{250\pi}} \approx 10,84 \text{ (cm)}.$$

Câu 9: Anh An chèo thuyền từ điểm A trên bờ một con sông thẳng rộng 3 km và muốn đến điểm B ở bờ đối diện cách 8 km về phía hạ lưu càng nhanh càng tốt (H.1.35). Anh An có thể chèo thuyền trực tiếp qua sông đến điểm C rồi chạy bộ đến B, hoặc anh có thể chèo thuyền thẳng đến B, hoặc anh cũng có thể chèo thuyền đến một điểm D nào đó giữa C và B rồi chạy bộ đến B. Nếu vận tốc chèo thuyền là 6 km/h và vận tốc chạy bộ là 8 km/h thì anh An phải chèo thuyền sang bờ ở điểm nào để đến được B càng sớm càng tốt? (Giả sử rằng vận tốc của nước là không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền của anh An).

Nhắc lại rằng nếu $C(x)$ là hàm chi phí, tức là chi phí sản xuất x đơn vị của một sản phẩm nào đó, thì chi phí biên là tốc độ thay đổi của C đối với x , tức là đạo hàm $C'(x)$.

Gọi $p(x)$ là giá bán mỗi đơn vị mà công ty có thể tính nếu bán x đơn vị. Khi đó, p được gọi là hàm cầu (hay hàm giá) và chúng ta mong đợi đó là một hàm giảm của x . Nếu x đơn vị được bán và giá mỗi đơn vị là $p(x)$ thì tổng doanh thu là: $R(x) = x \cdot p(x)$ và $R(x)$ được gọi là hàm doanh thu. Đạo hàm $R'(x)$ của hàm doanh thu được gọi là hàm doanh thu biên và là tốc độ thay đổi của doanh thu đối với số lượng đơn vị sản phẩm bán ra.

Nếu x đơn vị được bán, thì tổng lợi nhuận là $P(x) = R(x) - C(x)$ và $P(x)$ được gọi là hàm lợi nhuận. Hàm lợi nhuận biên là đạo hàm $P'(x)$ của hàm lợi nhuận.



Hình 1.35

Lời giải



Gọi p (nghìn đồng) là giá của mỗi vé; x là số khán giả mua vé. Ta cần xác định hàm cầu $p = p(x)$. Theo giả thiết, tốc độ thay đổi của x tỉ lệ với tốc độ thay đổi của p nên hàm số $p = p(x)$ là hàm số bậc nhất.

Giá vé $p_1 = 100$ ứng với $x_1 = 27\ 000$ và giá vé $p_2 = 90$ ứng với $x_2 = 27\ 000 + 3\ 000 = 30\ 000$.

Do đó, phương trình đường thẳng $p = ax + b$ đi qua hai điểm $(27\ 000; 100)$ và $(30\ 000; 90)$

$$\text{là } p - 100 = \frac{100 - 90}{27\ 000 - 30\ 000}(x - 27\ 000) \text{ hay } p - 100 = -\frac{1}{300}(x - 27\ 000) \text{ tức là } x = -300p + 57\ 000.$$

Hàm doanh thu từ tiền bán vé là: $R(p) = px = p(-300p + 57\ 000) = -300p^2 + 57\ 000p$.

Ta cần tìm p sao cho R đạt giá trị lớn nhất. Ta có: $R'(p) = -600p + 57\ 000$; $R'(p) = 0 \Leftrightarrow p = 95$.

Bảng biến thiên:

p	0	95	$+\infty$	
$R'(p)$		+	0	-
$R(p)$			2 707 500	
	0			$-\infty$

Vậy với giá vé là 95 nghìn đồng một vé thì doanh thu bán vé là lớn nhất.

Câu 10: Một nhà phân tích thị trường làm việc cho một công ty sản xuất thiết bị gia dụng nhận thấy rằng nếu công ty sản xuất và bán x chiếc máy xay sinh tố hằng tháng thì lợi nhuận thu được (nghìn đồng) là

$$P(x) = -0,3x^3 + 36x^2 + 1800x - 48\ 000.$$

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = P(x)$, $x \geq 0$. Sử dụng đồ thị đã vẽ để trả lời các câu hỏi sau:

- Khi chỉ sản xuất một vài máy xay sinh tố, công ty sẽ bị lỗ (vì lúc này lợi nhuận âm). Hỏi hằng tháng công ty phải sản xuất ít nhất bao nhiêu chiếc máy xay sinh tố để hoà vốn?
- Lợi nhuận lớn nhất mà công ty có thể đạt được là bao nhiêu? Công ty có nên sản xuất 200 chiếc máy xay sinh tố hằng tháng hay không?

WE COACH WE INSPIRE **Lời giải**

Xét hàm số $y = P(x) = -0,3x^3 + 36x^2 + 1800x - 48\ 000$, $x \geq 0$.

Ta có:

$$y' = P'(x) = -0,9x^2 + 72x + 1800; y' = 0 \Leftrightarrow x = 100 \text{ (vì } x \geq 0).$$

$$P'(x) > 0 \text{ với mọi } x \in [0; 100), P'(x) < 0 \text{ với mọi } x \in (100; +\infty).$$

Do đó hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[0; 100)$ và nghịch biến trên khoảng $(100; +\infty)$.

Tại $x = 100$, hàm số đạt cực đại và $Y_{CD} = y(100) = 192\ 000$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = -\infty$$

Bảng biến thiên:

x	0	100	$+\infty$	
$P'(x)$		+	0	-
$P(x)$			192 000	
	-48 000			$-\infty$

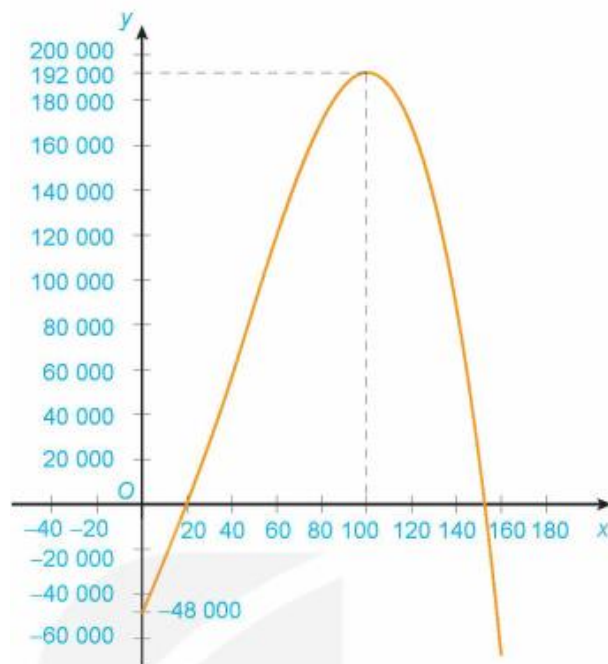
Đồ thị hàm số như Hình 1.36 (ở đây ta lấy một đơn vị trên trục hoành bằng 1.000 đơn vị trên trục tung).



Từ đồ thị đã vẽ suy ra:

- a) Đồ thị xuất phát từ điểm $(0; -48\,000)$, ở phía dưới trục hoành (tức là công ty đang bị lỗ), và giao với trục hoành tại điểm đầu tiên có hoành độ $x = 20$. Do đó, hàng tháng công ty cần sản xuất ít nhất 20 chiếc máy xay sinh tố để hoà vốn.
- b) Từ đồ thị ta thấy khi sản xuất hơn 100 chiếc máy xay sinh tố mỗi tháng thì càng sản xuất nhiều lợi nhuận càng giảm. Do đó, công ty không nên sản xuất 200 chiếc máy xay sinh tố hàng tháng.

Lợi nhuận lớn nhất mà công ty có thể thu được là $Y_{ca} = y(100) = 192\,000$ (nghìn đồng), tức là 192 triệu đồng, đạt được khi sản xuất đúng 100 chiếc máy xay sinh tố mỗi tháng.



Hình 1.36

Câu 11: Khi một vật lạ mắc kẹt trong khí quản khiến ta phải ho, cơ hoành đẩy lên trên gây ra tăng áp lực trong phổi, theo đó cuống họng co thắt làm hẹp khí quản khiến không khí đi qua mạnh hơn. Đối với một lượng không khí bị đẩy ra trong một khoảng thời gian cố định, khí quản càng nhỏ thì luồng không khí càng đẩy ra nhanh hơn. Vận tốc luồng khí thoát ra càng cao, lực tác động lên vật lạ càng lớn. Qua nghiên cứu một số trường hợp, người ta nhận thấy vận tốc v của luồng khí liên hệ với bán kính x của khí quản theo công thức: $v(x) = k(x_0 - x) \cdot x^2$ với $\frac{1}{2}x_0 \leq x \leq x_0$, trong đó k là hằng số ($k > 0$) và x_0 là bán kính khí quản ở trạng thái bình thường. Tìm x theo x_0 để vận tốc của luồng khí một cơn ho trong trường hợp này là lớn nhất. (Nguồn: James Stewart, J. (2015). *Calculus*. Cengage Learning 8th edition, p.285)

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = (x_0 - x)x^2$ với x_0 cố định và $\frac{1}{2}x_0 \leq x \leq x_0$.

Do k là hằng số nên vận tốc của luồng khí một cơn ho lớn nhất khi $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $f(x) = -x^3 + x_0x^2$; $f'(x) = -3x^2 + 2x_0x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \frac{2}{3}x_0$.

Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{2}x_0$	$\frac{2}{3}x_0$	x_0
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f(\frac{1}{2}x_0)$	$f(\frac{2}{3}x_0)$	$f(x_0)$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $\max_{\frac{1}{2}x_0 \leq x \leq x_0} f(x) = f(\frac{2}{3}x_0)$.

Vậy vận tốc của luồng khí một cơn ho lớn nhất khi $x = \frac{2}{3}x_0$.



Câu 12: Giả sử chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,...) được cho bởi công thức:

$$C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10\,000,$$

trong đó $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng.

a) Tính tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí.

b) Tỉ số $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Tính $M(x)$ theo x và tìm số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình là thấp nhất, biết rằng nhu cầu hiện tại xuất bản không quá 30 000 cuốn. Khi đó chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí là bao nhiêu?

Lời giải

a) Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng, tức là 0,4 vạn đồng. Suy ra chi phí phát hành cho x cuốn là $0,4x$ (vạn đồng).

Theo đề bài, ta có tổng chi phí xuất bản và phát hành cho x cuốn tạp chí là:

$$T(x) = C(x) + 0,4x = 0,0001x^2 + 0,2x + 10\,000, \text{ với } x > 0.$$

$$\text{b) Ta có: } M(x) = \frac{T(x)}{x} = 0,0001x + 0,2 + \frac{10000}{x}$$

Xét hàm số $f(x) = 0,0001x + 0,2 + \frac{10000}{x}$ với $0 < x \leq 30\,000$.

$$f'(x) = 0,0001 - \frac{10000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 10\,000 \text{ (do } x > 0).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

Bảng biến thiên:

x	0	10 000	30 000	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(10\,000)$	$f(30\,000)$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị của $M(x)$ nhỏ nhất khi $x = 10\,000$.

Vậy số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình thấp nhất là $x = 10\,000$ (cuốn).

Chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản 10 000 cuốn là: $M(10\,000) = 2,2$ (vạn đồng) = 22 000 (đồng).

Câu 13: Anh Nam có một mảnh đất rộng và muốn dành ra một khu đất hình chữ nhật có diện tích 200 m² để trồng vài loại cây mới. Anh dự kiến rào quanh ba cạnh của khu đất hình chữ nhật này bằng lưới thép, cạnh còn lại (chiều dài) sẽ tận dụng bức tường có sẵn (Hình vẽ). Do điều kiện địa lí, chiều rộng khu đất không vượt quá 15 m, hỏi chiều rộng của khu đất này bằng bao nhiêu để tổng chiều dài lưới thép cần dùng là ngắn nhất (nghĩa là chi phí rào lưới thép thấp nhất)?



Lời giải

Gọi x (m) là chiều rộng của khu đất hình chữ nhật cần rào.

Theo đề bài, ta có $0 < x \leq 15$.

Diện tích khu đất này là $200 \text{ (m}^2\text{)}$ nên chiều dài của khu đất là $\frac{200}{x}$ (m).

Tổng chiều dài lưới thép rào quanh khu đất là $L(x) = 2x + \frac{200}{x}$ (m).

Xét hàm số: $L(x) = 2x + \frac{200}{x}, x \in (0; 15]$

Ta có: $L'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 10$ (do $x > 0$)

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2x + \frac{200}{x} \right) = +\infty$

$L(10) = 40$;

$L(15) = \frac{130}{3}$.

Bảng biến thiên:

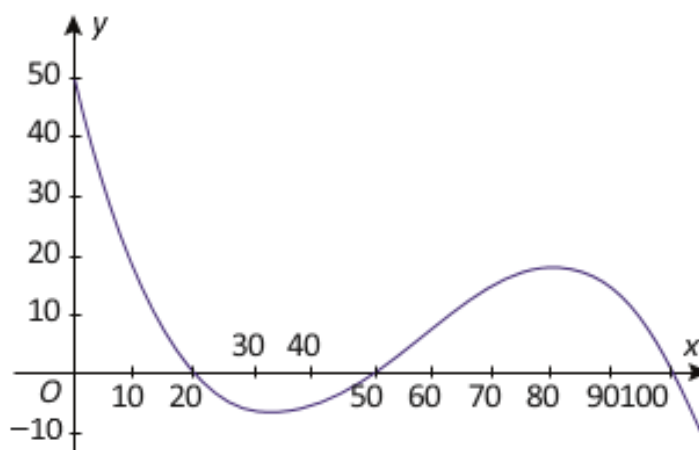
Dựa vào bảng biến thiên, chiều dài lưới thép ngắn nhất

là 40 m khi chiều rộng khu đất này là $x = 10$ (m) và chiều dài là $\frac{200}{10} = 20$ (m).

x	0	10	15
$L'(x)$	-	0	+
$L(x)$	$+\infty$	40	$\frac{130}{3}$

Câu 14: Một phần đường ray tàu lượn siêu tốc có dạng đồ thị hàm số bậc ba: $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$. Trục Ox mô tả quãng đường tàu di chuyển theo chiều ngang (tính bằng centimét), trục Oy mô tả chiều cao của đường ray (tính bằng centimét) tại mỗi vị trí x . Chiều cao xuất phát là 50 cm. Tàu xuống dưới mặt đất lần thứ nhất từ vị trí $x = 20$ cm, tàu lên khỏi mặt đất ở vị trí $x = 50$ cm và sau đó xuống dưới mặt đất lần thứ hai ở vị trí $x = 100$ cm.

Xét đồ thị của hàm số đã cho khi $x \in [0; 100]$ như hình vẽ:



Hình 1.46

a) Tìm công thức hàm số $f(x)$.

b) Tìm điểm cao nhất của đường ray khi tàu lên khỏi mặt đất và tọa độ điểm thấp nhất của đường ray khi tàu xuống dưới mặt đất.

Lời giải

a) Do đồ thị hàm số giao với trục hoành tại các điểm $x = 20$; $x = 50$, $x = 100$ nên phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm 20, 50, 100, từ đó ta có: $y = a(x - 20)(x - 50)(x - 100)$.

Mặt khác, tại điểm $x = 0$ ta có $y = 50$, suy ra: $50 = a(0 - 20)(0 - 50)(0 - 100)$ hay $a = -\frac{1}{2000}$.

Suy ra: $y = -\frac{1}{2000}(x - 20)(x - 50)(x - 100) = -\frac{1}{2000}x^3 + \frac{17}{200}x^2 - 4x + 50$.

b) Các điểm cần tìm chính là các điểm cực trị của hàm số: $y = f(x) = -\frac{1}{2000}x^3 + \frac{17}{200}x^2 - 4x + 50$

$$y' = -\frac{3}{2000}x^2 + 1\frac{17}{200}x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{100}{3}; x = 80$$

Ta có các điểm cực trị của hàm số $f(x)$ là $A\left(\frac{10}{3}; -\frac{200}{27}\right); B(80; 18)$