



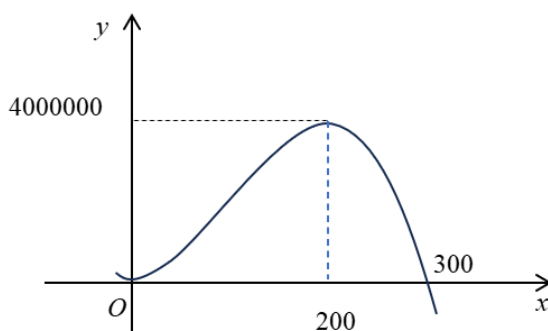
CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 5. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TIỄN

Câu 1: Một doanh nghiệp dự kiến lợi nhuận khi sản xuất x sản phẩm ($0 \leq x \leq 300$) được cho bởi hàm số $y = -x^3 + 300x^2$ (đơn vị: đồng) và được minh họa bằng đồ thị ở hình bên dưới.



Cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để doanh nghiệp thu được lợi nhuận cao nhất?

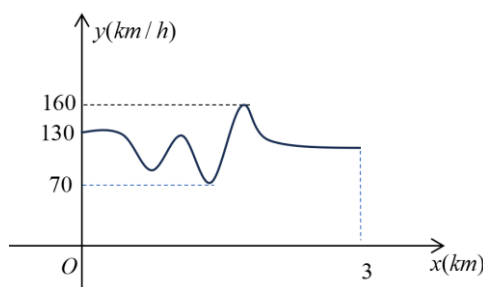
- A. 4000000. B. 300 C. 200. D. 150.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có giá trị lớn nhất bằng 4000000 khi $x = 200$.

Do đó cần sản xuất 200 sản phẩm thì doanh nghiệp thu được lợi nhuận cao nhất.

Câu 2: Đồ thị bên dưới là tốc độ của một chiếc xe đua trên đoạn đường đua bằng phẳng dài 3 km.



Tốc độ nhỏ nhất của xe đua trên đoạn đường này bằng

- A. 3 km/h. B. 160 km/h C. 130 km/h. D. 70 km/h.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy tốc độ nhỏ nhất bằng 70 km/h.

Câu 3: Một học sinh được giao thiết kế một cái hộp thỏa mãn: Tổng của chiều dài và chiều rộng bằng 12cm; tổng của chiều rộng và chiều cao là 24cm. Giáo viên yêu cầu học sinh ấy phải thiết kế sao cho thể tích cái hộp lớn nhất, giá trị thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

- A. 600. B. $843\sqrt{3}$. C. $384\sqrt{3}$. D. $348\sqrt{3}$.

Lời giải



+ Gọi chiều rộng là x , $0 < x < 12$.

+ Thể tích hình hộp là: $V = x(12 - x)(24 - x) = x^3 - 36x^2 + 288x$

+ Xét hàm số $f(x) = x^3 - 36x^2 + 288x$ trên $(0; 12)$ ta có:

$$f'(x) = 3x^2 - 72x + 288; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 + 4\sqrt{2} \notin (0; 12) \\ x = 12 - 4\sqrt{3} \in (0; 12) \end{cases}$$

+ Lập bảng biến thiên ta tìm được: $\max_{(0; 12)} f(x) = f(12 - 4\sqrt{3}) = 384\sqrt{3} \Rightarrow V_{\max} = 384\sqrt{3}$

Câu 4: Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) để vượt khoảng cách 400 km tới nơi sinh sản. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ cho bởi công thức $E(v) = cv^{3t}$. Trong đó c là hằng số cho trước; E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất bằng

- A.** 9 km/h . **B.** 8 km/h . **C.** 10 km/h . **D.** 12 km/h .

Lời giải

+ Vận tốc của cá khi bơi ngược dòng là $v - 6$ km/h ($v > 6$)

+ Năng lượng cá tiêu hao cả quá trình tìm về nguồn là: $E(v) = cv^3t = cv^3 \cdot \frac{400}{v-6}$.

+ Ta có: $E'(v) = c \cdot 400 \cdot \frac{2v^3 - 18v^2}{(v-6)^2} = 0 \Leftrightarrow v = 9 \text{ (km/h)}$

+ Từ đó tìm được $\text{Min} E(v) = E(9) = 97200c$

Câu 5: Giả sử chi phí (tính bằng trăm nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị hàng hóa nào đó là $C(x) = 27900 + 100x - 1,5x^2 + 0,025x^3$. Khi đó hàm chi phí biên tương ứng là

- A.** $C'(x) = 28000 - 3x + 0,075x^2$. **B.** $C'(x) = 100 - 3x + 0,075x^2$.
C. $C'(x) = 100 + 3x + 0,075x^2$. **D.** $C'(x) = 28000 + 3x + 0,075x^2$.

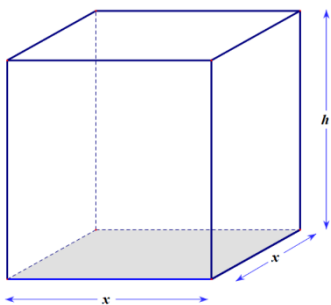
Lời giải

Hàm chi phí biên tương ứng là: $C'(x) = 100 - 3x + 0,075x^2$.

Câu 6: Một cửa hàng bán dầu muốn đóng những thùng đựng dầu có thể tích không đổi bằng $V = 30 \text{ dm}^3$, thùng có dạng hình hộp chữ nhật có nắp; đáy là hình vuông cạnh x dm ($x > 0$). Trên thị trường, giá nguyên vật liệu làm đáy và nắp thùng là 120 000 đồng/ m^2 , giá nguyên vật liệu làm mặt xung quanh của thùng là 100 000 đồng/ m^2 . Chi phí để cửa hàng làm một thùng đựng dầu được cho bởi công thức (đơn vị nghìn đồng)?

- A.** $f(x) = \frac{12}{5}x^2 + \frac{120}{x}$. **B.** $f(x) = 24x^2 + \frac{120}{x}$.
C. $f(x) = 2x^2 + \frac{120}{x}$. **D.** $f(x) = 24x^2 + \frac{1200}{x}$.

Lời giải



Thể tích của thùng $V = 30 \text{ dm}^3$, vì x ($x > 0$, đơn vị dm) là cạnh đáy của thùng (hình vuông) nên chiều cao của thùng là: $h = \frac{V}{x^2} = \frac{30}{x^2}$.

Giá nguyên vật liệu làm đáy và nắp thùng là 1 200 đồng/ dm^2 , giá nguyên vật liệu làm mặt xung quanh của thùng là 1 000 đồng/ dm^2 .

Diện tích mặt đáy, nắp thùng và diện tích xung quanh lần lượt là: $x^2; x^2; 4xh$. Chi phí làm một thùng đựng dầu là:

$$f(x) = 2.1,2.x^2 + 1.4xh = 2,4x^2 + \frac{120}{x} = \frac{12}{5}x^2 + \frac{120}{x} \text{ (đơn vị nghìn)}.$$

Câu 7: Một công ty sản xuất một sản phẩm. Bộ phận tài chính của công ty đưa ra hàm giá bán là $p(x) = 1000 - 25x$, trong đó $p(x)$ (triệu đồng) là giá bán của mỗi sản phẩm mà tại giá bán này có x sản phẩm được bán ra. Khi đó hàm doanh thu của công ty là

A. $f(x) = 1000x - 25x^2$.

B. $f(x) = 1000x + 25x^2$.

C. $f(x) = 25x^2 - 1000x$.

D. $f(x) = 1000 - 25x^2$.

Lời giải

Ta có khi có x sản phẩm được bán ra thì giá bán là $p(x) = 1000 - 25x$, do đó doanh thu của cửa hàng khi bán ra x sản phẩm là $f(x) = x.p(x) = 1000x - 25x^2$.

Câu 8: Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa $1 \leq x \leq 18$. Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

$$C(x) = x^3 - 6x^2 + 20x + 500$$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 320 nghìn đồng/mét. Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa. Hãy viết biểu thức tính $L(x)$ theo x

A. $L(x) = 320x$.

B. $L(x) = -x^3 + 6x^2 + 300x - 500$.

C. $L(x) = x^3 - 6x^2 - 300x + 500$.

D. $L(x) = x^3 - 6x^2 + 340x + 500$.

Lời giải

Khi bán x mét vải lụa:

Số tiền thu được là: $B(x) = 320x$ (nghìn đồng).

Lợi nhuận thu được là: $L(x) = B(x) - C(x) = -x^3 + 6x^2 + 300x - 500$ (nghìn đồng).

Câu 9: Giả sử một công ty du lịch bán tour với giá là x (triệu đồng)/khách thì doanh thu sẽ được biểu diễn qua hàm số $f(x) = -200x^2 + 550x$. Công ty phải bán giá tour cho một khách là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất (làm tròn tới hàng phần trăm).

A. 1,38 triệu.

B. 1,37 triệu.

C. 1,3 triệu.

D. 1,2 triệu.

Lời giải



Doanh thu là $f(x) = -200x^2 + 550x$.

Ta có $f'(x) = -400x + 550$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{8}$.

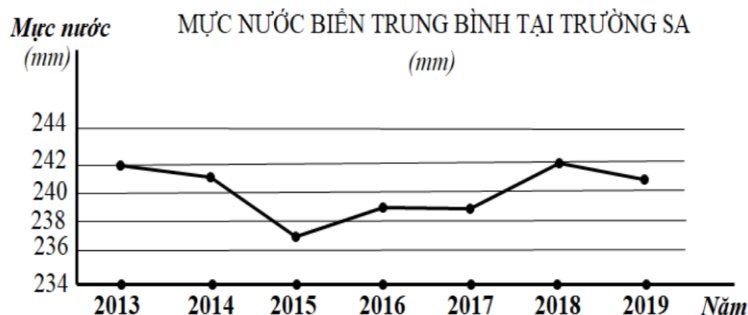
Bảng biến thiên

x	0	$\frac{11}{8}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\frac{3025}{8}$		

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{11}{8} = 1,375$.

Vậy công ty cần bán tour với giá 1,38 triệu đồng/khách thì doanh thu sẽ cao nhất.

Câu 10: Mức nước biển trung bình tại trường sa từ năm 2013 đến năm 2019 được cho bởi biểu đồ trong hình bên dưới.



Trong khoảng thời gian từ năm 2016 đến năm 2019, năm nào mực nước biển trung bình tại trường sa cao nhất ?

A. 2013.

B. 2018.

C. 2015.

D. 2019.

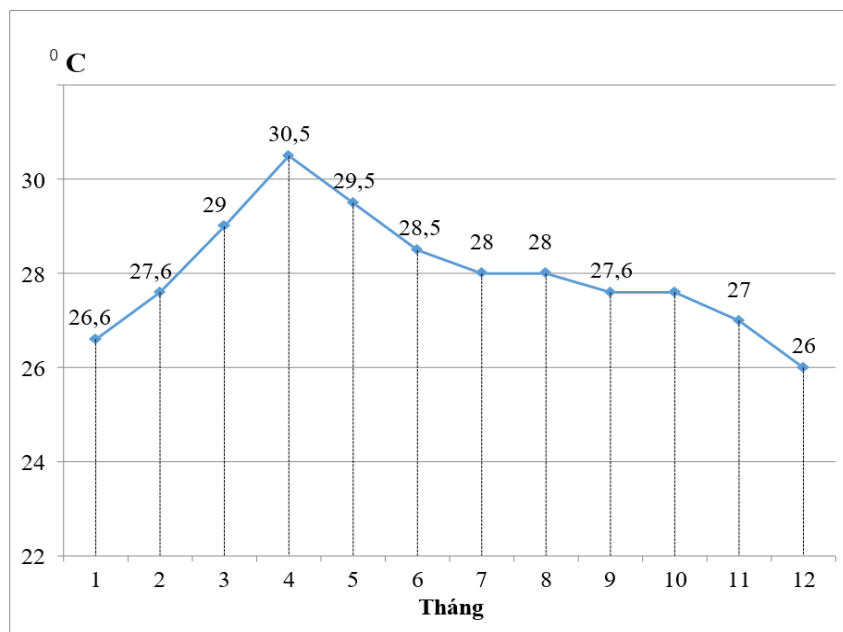
Lời giải

Nhìn vào biểu đồ ta thấy, tại năm 2018 mực nước biển trung bình tại trường sa cao nhất bằng 242 mm.

Câu 11: Hình vẽ cho biết nhiệt độ trung bình các tháng năm 2020 tại Thành phố Hồ Chí Minh đo bằng đơn vị $^{\circ}\text{C}$. Hãy cho biết trong năm 2020 tại Thành phố Hồ Chí Minh thì nhiệt độ trung bình của tháng nào cao nhất, nhiệt độ trung bình của tháng nào thấp nhất?



Nhiệt độ trung bình các tháng năm 2020 tại TPHCM (°C)

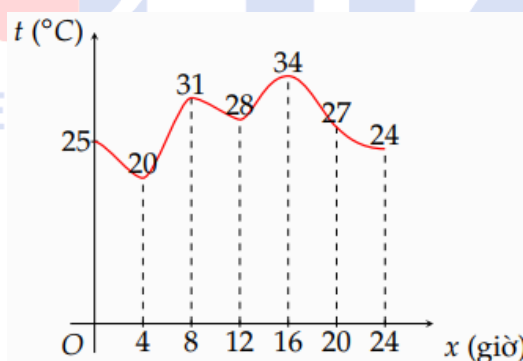


- A. Nhiệt độ trung bình của tháng 6 cao nhất và tháng 12 thấp nhất.
B. Nhiệt độ trung bình của tháng 4 cao nhất và tháng 2 thấp nhất.
C. Nhiệt độ trung bình của tháng 4 cao nhất và tháng 12 thấp nhất.
D. Nhiệt độ trung bình của tháng 5 cao nhất và tháng 12 thấp nhất.

Lời giải

Từ hình vẽ ta thấy nhiệt độ trung bình của tháng cao nhất là tháng 4. Nhiệt độ trung bình của tháng thấp nhất là tháng 12.

Câu 12: Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở một thành phố trong một ngày. Thời điểm nào trong ngày có nhiệt độ thấp nhất ?

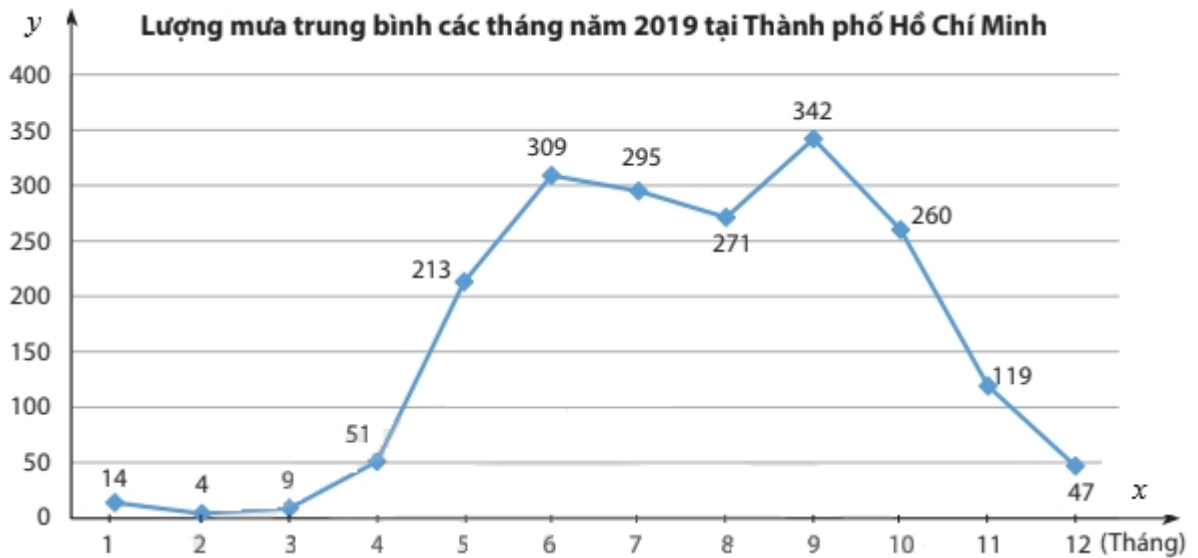


- A. 4 h. B. 0 h. C. 2 h. D. 6 h.

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy thời điểm có nhiệt độ thấp nhất trong ngày là vào 4h sáng.

Câu 13: Hình bên cho biết lượng mưa trung bình các tháng năm 2019 tại Thành phố Hồ Chí Minh đo theo đơn vị milimet. Hãy cho biết vào tháng nào trong năm 2019 thì lượng mưa (mm) là cao nhất ?



A. Tháng 6.

B. Tháng 8.

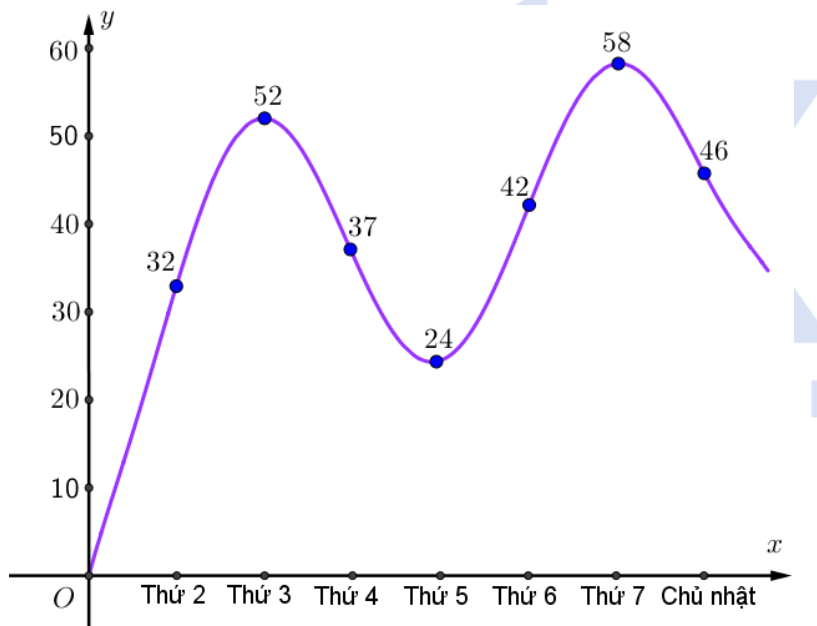
C. Tháng 9.

D. Tháng 10.

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy vào Tháng 9 thì lượng mưa ở Thành phố Hồ Chí Minh cao nhất trong năm 2019

Câu 14: Một cửa hàng trà sữa có đồ thị biểu diễn số ly trà sữa bán được trong một tuần như sau. Số ly trà sữa của hàng đó bán được nhiều nhất trong một ngày là bao nhiêu



A. 62 ly.

B. 52 ly.

C. 68 ly.

D. 58 ly.

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy vào thứ 7 cửa hàng bán được nhiều nhất là 58 ly trà sữa.

Câu 15: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã nhận thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $P(n) = 800 - 20n$ (g). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

A. 19.

B. 20.

C. 21.

D. 22.

Lời giải

Gọi $F(n)$ là hàm cân nặng của n con cá sau vụ thu hoạch trên một đơn vị diện tích.

Ta có: $F(n) = (800 - 20n).n = 800n - 20n^2$.



Để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất thì cân nặng của n con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ là lớn nhất.

Bài toán trở thành tìm $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $F(n)$ đạt GTLN.

$$F'(n) = 800 - 40n$$

$$F'(n) = 0 \Leftrightarrow 800 - 40n = 0 \Leftrightarrow n = 20$$

Ta có bảng biến thiên:

n	$-\infty$	20	$+\infty$
$F'(n)$	+	0	-
$F(n)$	$-\infty$	8000	$-\infty$

Vậy phải thả 20 con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất.

Câu 16: Thể tích V (đơn vị: cm^3) của 1kg nước tại nhiệt độ T (đơn vị: $^{\circ}C$) được tính bởi hàm số $V(T)$, $T \in [0; 30]$. Biết hàm số $V(T)$ có bảng biến thiên như sau

T	0	T_1	30
$V'(T)$	-	0	+
$V(T)$	$V(0)$	$V(T_1)$	$V(30)$

Với $T_1 \approx 3,97^{\circ}C$. Hỏi thể tích $V(T)$ giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

A. 0; 3,97 .

B. 0; 5 .

C. 0; 10 .

D. 0; 30 .

Lời giải

Từ bảng biến thiên suy ra, thể tích $V(T)$ giảm trong khoảng nhiệt độ từ $0^{\circ}C$ đến $3,97^{\circ}C$.

Câu 17: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi hàm số $y = G(x)$. Trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân nằm trong khoảng nào để độ giảm huyết áp của bệnh nhân tăng biết hàm số $y = G(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	0	20	$+\infty$
$G'(x)$	+	0	-
$G(x)$		100	

A. 0; 30 .

B. 20; 30 .

C. 0; 25 .

D. 0; 20 .

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta có liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân nằm trong khoảng 0; 20 thì độ giảm huyết áp của bệnh nhân tăng.

Câu 18: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế nhận thấy tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t là $f(t) = -3t^2 + 90t$, $t = 0, 1, 2, \dots, 25$. Xác định khoảng thời gian mà tốc độ truyền bệnh giảm?

A. 15; 25 .

B. 0; 10 .

C. 10; 15 .

D. 0; 15 .



Lời giải

Ta có $f'(t) = -6t + 90 = 0 \Leftrightarrow t = 15$.

Bảng biến thiên

t	0	15	25
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	0	↗ 675	↘ 375

Từ bảng biến thiên ta thấy tốc độ truyền bệnh giảm trong khoảng thời gian $15; 25$.

Câu 19: Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hóa bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2$, $0 \leq t \leq 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần). Hỏi số người bị nhiễm bệnh tăng trong khoảng thời gian nào?

A. $0; 10$

B. $0; 8$.

C. $8; 10$.

D. $8; 12$.

Lời giải

Ta có $N'(t) = -3t^2 + 24t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 8 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

	0	8	12	
$N'(t)$	0	+	0	-
$N(t)$	0	256		0

Từ bảng biến thiên ta thấy số người bị nhiễm bệnh tăng trong khoảng thời gian $0; 8$.

Câu 20: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t$ với $t \geq 0$ (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (mét) là quãng đường vật chuyển động trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, khoảng thời gian nào vận tốc của vật tăng?

A. $(0; 5)$.

B. $(0; 4)$.

C. $(4; 10)$.

D. $(3; 10)$.

Lời giải

Ta có vận tốc của vật $v(t) = S'(t) = -t^2 + 8t + 9$, $t \in (0; 10)$

$v'(t) = -2t + 8$. Xét $v'(t) = 0 \Rightarrow t = 4 \in (0; 10)$

Bảng biến thiên:

t	0	4	10	
v'		+	0	-
v	$v(0)$	↗ 25	↘ $v(10)$	

Từ bảng biến thiên ta có trong khoảng thời gian $(0; 4)$ thì vận tốc của vật tăng.



Câu 21: Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin $12V$ được cho bởi công thức $P = 12I - 0,5I^2$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Hỏi công suất P tăng trong khoảng cường độ dòng điện nào?

A. $(0; 20)$.

B. $(4; 20)$.

C. $(12; +\infty)$.

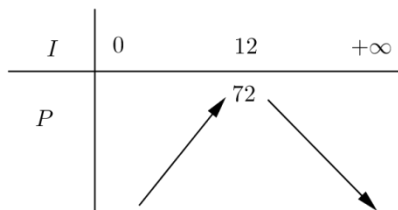
D. $(0; 12)$.

Lời giải

Xét hàm số $P = 12I - 0,5I^2$ với $I \geq 0$.

Ta có $P' = 12 - I \Rightarrow P' = 0 \Leftrightarrow I = 12$.

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta có công suất P tăng trong khoảng cường độ dòng điện $(0; 12)$.

Câu 22: Để giảm nhiệt độ trong phòng từ $28^{\circ}C$, một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị $^{\circ}C$) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1; 10]$. Trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động, nhiệt độ trong phòng tăng hay giảm?

A. Tăng.

B. Giảm.

C. Tăng rồi giảm.

D. Giảm rồi tăng.

Lời giải

Xét hàm số $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1; 10]$.

$T' = -0,024t^2 - 0,16 < 0, \forall t \in [1; 10]$.

Suy ra hàm số T nghịch biến trên đoạn $[1; 10]$ nhiệt độ trong phòng giảm.

Câu 23: Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả cá trong khoảng nào trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để số gam tăng?

A. $(0; 20)$.

B. $(0; 30)$.

C. $(12; +\infty)$.

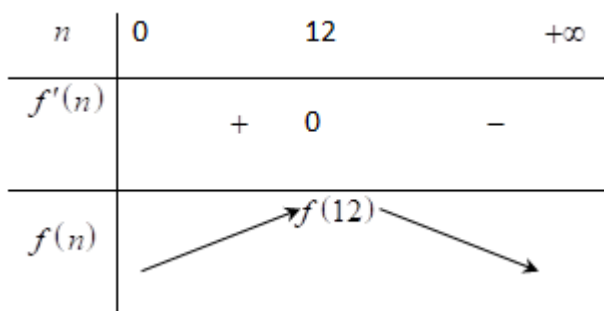
D. $(0; 12)$.

Lời giải

Sau một vụ, trung bình số cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ cân nặng: $f(n) = nP(n) = 480n - 20n^2$ (gam).

$f'(n) = 480 - 40n = 0 \Leftrightarrow n = 12$

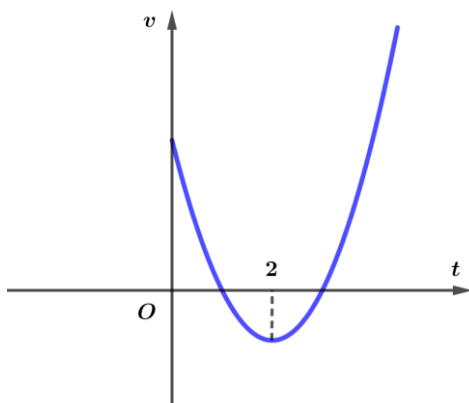
Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta có: trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ, thả cá trong khoảng $(0; 12)$ thì số gam tăng



Câu 24: Cho một chất điểm có đồ thị biểu diễn vận tốc theo thời gian như hình minh họa. Hỏi vận tốc của chất điểm giảm trong khoảng thời gian nào sau đây?



- A. $t \in [0; 2]$. B. $t \in (0; +\infty)$ C. $t \in (2; +\infty)$. D. $t \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có vận tốc của chất điểm giảm khi $t \in [0; 2]$.

Câu 25: Một doanh nghiệp sản xuất với số lượng là x sản phẩm và thu được lợi nhuận $f(x)$ được biểu thị bởi bảng xét dấu như sau. Hỏi doanh nghiệp sản xuất bao nhiêu sản phẩm trở đi thì lợi nhuận bắt đầu giảm?

x	0	20	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

- A. 20. B. 0 C. 750. D. 15850.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, khi $x = 20$ thì lợi nhuận của doanh nghiệp đạt giá trị lớn nhất, và từ sản phẩm thứ 21 thì lợi nhuận của doanh nghiệp sẽ giảm.

Câu 26: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 (cm). Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau cạnh x (cm), rồi gấp tấm nhôm lại thành một hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích là $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như hình sau. Thể tích của hình hộp chữ nhật giảm xuống khi nào ?

x	0	2	6	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	128	0	

- A. 128. B. 2 C. 6. D. 0.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, khi $x \in (2; 6)$ (cm) thì thể tích hình hộp chữ nhật giảm đi.

Câu 27: Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục. Hỏi vận tốc của chất điểm tăng khi t thuộc khoảng nào dưới đây, biết rằng vận tốc của chất điểm được xác định theo bảng biến thiên sau :



t	0	2	$+\infty$	
$v'(t)$		-	0	+
$v(t)$	9		-3	$+\infty$

A. $(2; +\infty)$.

B. $(0; 2)$

C. $(0; +\infty)$.

D. $(-3; +\infty)$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có vận tốc chất điểm tăng khi $t \in (2; +\infty)$.

Câu 28: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = t^2 - \frac{1}{6}t^3$ (m). Tìm thời điểm t (giây) mà tại đó vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

A. $t = 2$.

B. $t = 0,5$.

C. $t = 2,5$.

D. $t = 1$.

Lời giải

Ta có $v(t) = s'(t) = 2t - \frac{1}{2}t^2$. Suy ra $v'(t) = 2 - t$ và $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Bảng biến thiên

t	2
$v'(t)$	+ 0 -
$v(t)$	2

Vậy chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm $t = 2$ (giây).

Câu 29: Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin 12V được cho bởi công thức $P = 12I - 0,5I^2$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Tìm công suất tối đa của mạch điện.

A. 72.

B. 12.

C. $-\frac{1}{192}$.

D. $\frac{23}{2}$.

Lời giải

Xét hàm số $P = 12I - 0,5I^2$ với $I \geq 0$ có đạo hàm $P' = 12 - I$; $P' = 0 \Leftrightarrow I = 12$.

Bảng biến thiên:

I	0	12	$+\infty$
$P'(I)$		+ 0 -	
$P(I)$		72	



Công suất tối đa của mạch điện là $72(W)$ đạt được khi cường độ dòng điện là $12(A)$.

Câu 30: Một vật chuyển động theo quy luật $s = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. $289 (m/s)$. B. $105 (m/s)$. C. $111 (m/s)$. D. $487 (m/s)$.

Lời giải

Ta có $v(t) = s' = -6t^2 + 48t + 9$. Xét hàm số $v(t) = -6t^2 + 48t + 9, t \in [0;10]$.

Ta có $v'(t) = -12t + 48 = 0 \Leftrightarrow t = 4$ (Nhận). Ta có $\begin{cases} v(0) = 9 \\ v(4) = 105 \\ v(10) = -111 \end{cases} \Rightarrow \max_{t \in [0;10]} v(t) = v(4) = 105$.

Câu 31: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức $G(x) = 0,25x^2(30 - x)$ trong đó $x(mg)$ và $x > 0$ là lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng bao nhiêu:

- A. 15mg B. 30mg C. 40mg D. 20mg

Lời giải

Ta có: $G(x) = 0,25x^2(30 - x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{40}x^3$

$G'(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{40}x^2; G'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - \frac{3}{40}x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 20 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	0	20	$+\infty$
$G'(x)$		+	-
$G(x)$		100	

Dựa vào bảng biến thiên thì bệnh nhân cần tiêm một lượng thuốc 20mg

Câu 32: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $G(t) = 45t^2 - t^3$, (kết quả khảo sát được trong 10 tháng vừa qua). Nếu xem $G'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người / ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ:

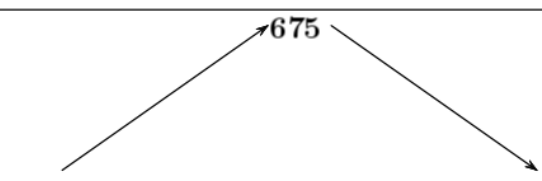
- A. 25 B. 30 C. 20 D. 15

Lời giải

Ta có: $G'(t) = 90t - 3t^2; G''(t) = 90 - 6t = 0 \Leftrightarrow 90 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 15$

Bảng biến thiên:



t	0	15	$+\infty$
$G''(t)$	+	0	-
$G(t)$			

Vậy tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ 15.

Câu 33: Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(h)$ trong ngày cho bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$. Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

A. $t = 10(h)$

B. $t = 14(h)$

C. $t = 15(h)$

D. $t = 22(h)$

Lời giải

Ta có: $h' = -3\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$.

$$h' = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow t = -2 + 6k, (k \in \mathbb{Z}_{(+)})$$

Ở đây ta chỉ cần xét một số giá trị

k	1	2	3	4
t	4	10	16	22

Ta suy ra được h đạt giá trị lớn nhất khi $t = 10 (h)$

Lưu ý: Ngoài cách trên ta có thể làm như sau

$$\text{Vì } -1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Rightarrow 9 \leq 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12 \leq 15.$$

$$\text{Vậy để } h \text{ lớn nhất thì } \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow t = -2 + 12k, (k \in \mathbb{Z}_{(+)})$$

Vậy h đạt giá trị lớn nhất khi $t = 10 (h)$

Câu 34: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã nhận thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $P(n) = 480 - 20n(g)$. Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

A. 14

B. 13

C. 12

D. 11

Lời giải

Gọi $F(n)$ là hàm cân nặng của n con cá sau vụ thu hoạch trên một đơn vị diện tích

$$\text{Ta có: } F(n) = (480 - 20n).n = 480n - 20n^2$$



Để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất thì cân nặng của n con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ là lớn nhất.

Bài toán trở thành tìm $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

$$F'(n) = 480 - 40n; F'(n) = 0 \Leftrightarrow 480 - 40n = 0 \Leftrightarrow n = 12$$

Học sinh tự lập bảng biến thiên.

Vậy phải thả 12 con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất.

Câu 35: Để giảm nhiệt độ trong phòng từ 28°C , một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị $^{\circ}\text{C}$) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1;10]$. Tìm nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động.

- A.** $27,832^{\circ}\text{C}$. **B.** $18,4^{\circ}\text{C}$. **C.** $26,2^{\circ}\text{C}$. **D.** $25,312^{\circ}\text{C}$.

Lời giải

Xét hàm số $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1;10]$.

$T' = -0,024t^2 - 0,16 < 0, \forall t \in [1;10]$ suy ra hàm số T nghịch biến trên đoạn $[1;10]$.

Nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được là $T_{\min} = T(10) = 18,4^{\circ}\text{C}$.

Câu 36: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

- A.** 2.250.000 **B.** 2.350.000 **C.** 2.450.000 **D.** 2.550.000

Lời giải

Gọi x là giá thuê thực tế của mỗi căn hộ, (x : đồng; $x \geq 2000.000$ đồng)

Ta có thể lập luận như sau:

Tăng giá 100.000 đồng thì có 2 căn hộ bị bỏ trống.

Tăng giá $x - 2.000.000$ đồng thì có bao nhiêu căn hộ bị bỏ trống.

Theo quy tắc tam xuất ta có số căn hộ bị bỏ trống là: $\frac{2(x - 2.000.000)}{100.000} = \frac{x - 2.000.000}{50.000}$

Do đó khi cho thuê với giá x đồng thì số căn hộ cho thuê là:

$$50 - \frac{x - 2.000.000}{50.000} = -\frac{x}{50.000} + 90$$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ, ($F(x)$: đồng).

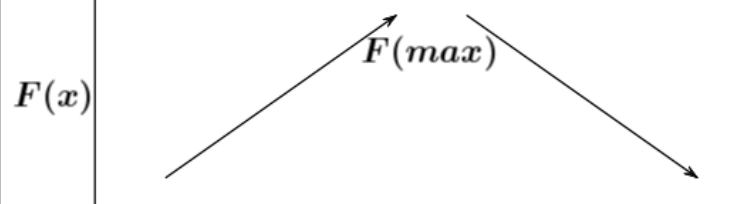
Ta có: $F(x) = \left(-\frac{x}{50.000} + 90\right)x = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$ (bảng số căn hộ cho thuê nhân với giá cho thuê mỗi căn hộ).



Câu toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của $F(x) = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$, $x \geq 2.000.000$

$$F'(x) = -\frac{1}{25.000}x + 90; F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{25.000}x + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 2.250.000$$

Bảng biến thiên:

x	2 000 000	2 250 000	$+\infty$
$F'(x)$	+	0	-
$F(x)$			

Suy ra $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2.250.000$

Vậy công ty phải cho thuê với giá 2.250.000 đồng mỗi căn hộ thì được lãi lớn nhất.

Nhận xét:

Sau khi tìm được hàm $F(x) = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$. Ta không cần phải đi khảo sát và vẽ bảng biến thiên như trên. Đề đã cho bốn đáp án x , ta dùng phím CALC của MTCT để thay lần lượt các giá trị vào, cái nào làm cho $F(x)$ lớn nhất chính là giá trị cần tìm.

Câu 37: Một cửa hàng bán bưởi Đoàn Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.

A. 44.000đ **B.** 43.000đ **C.** 42.000đ **D.** 41.000đ

Lời giải

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoàn Hùng, (x : đồng; $30.000 \leq x \leq 50.000$ đồng).

Ta có thể lập luận như sau:

Giá 50.000 đồng thì bán được 40 quả bưởi

Giảm giá 5.000 đồng thì bán được thêm 50 quả.

Giảm giá $50.000 - x$ thì bán được thêm bao nhiêu quả?

Theo quy tắc tam xuất số quả bán thêm được là: $(50000 - x) \cdot \frac{50}{5000} = \frac{1}{100}(50000 - x)$.

Do đó Số quả bưởi bán được tương ứng với giá bán x : $40 + \frac{1}{100}(50000 - x) = -\frac{1}{100}x + 540$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($F(x)$: đồng).

Ta có: $F(x) = \left(-\frac{1}{100}x + 540\right) \cdot (x - 30.000) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16.200.000$



Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$F(x) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16.200.000, \text{ điều kiện: } 30.000 \leq x \leq 50.000.$$

$$F'(x) = -\frac{1}{50}x + 840; F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{50}x + 840 = 0 \Leftrightarrow x = 42.000$$

Vì hàm $F(x)$ liên tục trên $30.000 \leq x \leq 50.000$ nên ta có:

$$F(30.000) = 0; F(42.000) = 1.440.000; F(50.000) = 800.000$$

Vậy với $x = 42.000$ thì $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Vậy để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất thì giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoàn Hùng là 42.000 đồng.

Câu 38: Một xe khách đi từ Việt Trì về Hà Nội chở tối đa được là 60 hành khách một chuyến. Nếu một chuyến chở được m hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách được tính là $\left(300 - \frac{5m}{2}\right)^2$ đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để nhà xe thu được lợi nhuận mỗi chuyến xe là lớn nhất?

A. 30

B. 40

C. 50

D. 60

Lời giải

Gọi x là số hành khách trên mỗi chuyến xe để số tiền thu được là lớn nhất ($0 < x \leq 60$)

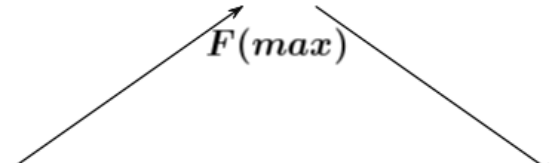
Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($F(x)$: đồng)

$$\text{Số tiền thu được: } F(x) = \left(300 - \frac{5x}{2}\right)^2 \cdot x = 90.000x - 1500x^2 + \frac{25}{4}x^3$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$F'(x) = 90000 - 3000x + \frac{75}{4}x^2; F'(x) = 0 \Leftrightarrow 90000 - 3000x + \frac{75}{4}x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 120(\text{loại}) \\ x = 40(\text{t/m}) \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	40	60	
$F'(x)$		+	0	-
$F(x)$				

Vậy để thu được số tiền lớn nhất thì trên mỗi chuyến xe khách đó phải chở 40 người.

Câu 39: Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 ngàn đồng thì có thêm 2 phòng trống. Giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất.



- A. 480 ngàn. B. 50 ngàn. C. 450 ngàn. D. 80 ngàn.

Lời giải

Gọi x (ngàn đồng) là giá phòng khách sạn cần đặt ra, $x > 400$ (đơn vị: ngàn đồng).

Giá chênh lệch sau khi tăng $x - 400$.

Số phòng cho thuê giảm nếu giá là x : $\frac{(x - 400) + 2}{20} = \frac{x - 400}{10}$.

Số phòng cho thuê với giá x là $50 - \frac{x - 400}{10} = 90 - \frac{x}{10}$.

Tổng doanh thu trong ngày là: $f(x) = x \left(90 - \frac{x}{10} \right) = -\frac{x^2}{10} + 90x$.

$$f'(x) = -\frac{x}{5} + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 450.$$

Bảng biến thiên:

x	400	450	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		20250	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 450$.

Vậy nếu cho thuê với giá 450 ngàn đồng thì sẽ có doanh thu cao nhất trong ngày là 2.025.000 đồng.

Câu 40: Một doanh nghiệp bán xe gắn máy trong đó có loại xe A bán ế nhất với giá mua vào mỗi chiếc xe là 26 triệu VNĐ và bán ra 30 triệu VNĐ, với giá bán này thì số lượng bán một năm là 600 chiếc. Cửa hàng cần đẩy mạnh việc bán được loại xe này nên đã đưa ra chiến lược kinh doanh giảm giá bán và theo tính toán của CEO nếu giảm 1 triệu VNĐ mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi cửa hàng định giá bán loại xe đó bao nhiêu thì doanh thu loại xe đó của cửa hàng đạt lớn nhất.

- A. 29 triệu VNĐ B. 27, 5 triệu VNĐ C. 29, 5 triệu VNĐ D. 27 triệu VNĐ

Lời giải

Gọi x (triệu VNĐ) là số tiền cần giảm cho mỗi chiếc xe ($0 \leq x \leq 4$).

Số lượng xe bán ra được trong một năm sau khi giảm giá là: $x.200 + 600$ (chiếc)

Số lợi nhuận thu được từ việc bán xe trong một năm sau khi giảm giá là: $(x.200 + 600)(4 - x)$

Xét hàm số $f(x) = (x.200 + 600)(4 - x) = 200(-x^2 + x + 12)$ ($0 \leq x \leq 4$) đạt giá trị lớn nhất là 2450

khi $x = \frac{1}{2}$.

Câu 41: Công ty dự lịch Ban Mê dự định tổ chức một tua xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tua là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tua 100 ngàn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất.



- A.** 1375000. **B.** 3781250. **C.** 2500000. **D.** 3000000.

Lời giải

Gọi x (triệu đồng) là giá tua.

Giá đã giảm so với ban đầu là $2 - x$.

Số người tham gia tăng thêm nếu giá bán x là: $\frac{(2-x)20}{0,1} = 400 - 200x$.

Số người sẽ tham gia nếu bán giá x là: $150 + (400 - 200x) = 550 - 220x$.

Tổng doanh thu là: $f(x) = x(550 - 200x) = -200x^2 + 550x$;

$$f'(x) = -400x + 550 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{8}$$

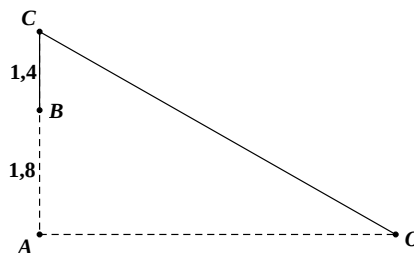
Bảng biến thiên

x	0	$\frac{11}{8}$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$		$\frac{3025}{8}$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{11}{8} = 1,375$.

Vậy công ty cần đặt giá tua 1375000 đồng thì tổng doanh thu sẽ cao nhất là 378125000 đồng.

Câu 42: Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4 mét và đặt ở độ cao 1,8 mét so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đó? Biết rằng góc BOC là góc nhọn.



- A.** $AO = 2,4\text{m}$ **B.** $AO = 2\text{m}$ **C.** $AO = 2,6\text{m}$ **D.** $AO = 3\text{m}$

Lời giải

Đặt độ dài cạnh $AO = x\text{ cm}$, ($x > 0$)

$$\text{Suy ra: } BO = \sqrt{3,24 + x^2}, CO = \sqrt{10,24 + x^2}$$

Ta sử dụng định lí cosin trong tam giác OBC ta có:



$$\cos BOC = \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2.OB.OC} = \frac{(3,24 + x^2) + (10,24 + x^2) - 1,96}{2\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}} = \frac{5,76 + x^2}{\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}}$$

Vì góc BOC là góc nhọn nên bài toán trở thành tìm x để $F(x) = \frac{5,76 + x^2}{\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

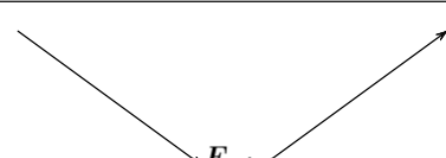
$$\text{Đặt } (3,24 + x^2) = t, (t > 3,24) \text{ suy ra } F(t) = \frac{t + \frac{63}{25}}{\sqrt{t(t+7)}} = \frac{25t + 63}{25\sqrt{t(t+7)}}$$

Ta tìm t để $F(t)$ nhận giá trị nhỏ nhất.

$$F'(t) = \left(\frac{25t + 63}{25\sqrt{t(t+7)}} \right)' = \frac{1}{25} \left(\frac{25\sqrt{t(t+7)} - (25t + 63) \left(\frac{2t+7}{2\sqrt{t(t+7)}} \right)}{t(t+7)} \right)$$

$$= \frac{1}{25} \left(\frac{50(t^2 + 7t) - (25t + 63)(2t + 7)}{2t(t+7)\sqrt{t(t+7)}} \right) = \frac{1}{25} \left(\frac{49t - 441}{2t(t+7)\sqrt{t(t+7)}} \right) = 0 \Leftrightarrow t = 9$$

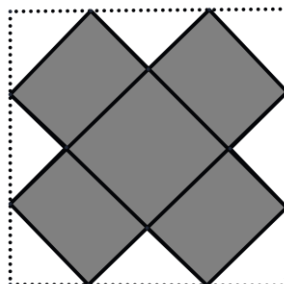
Bảng biến thiên:

t	3,24	9	$+\infty$
$F'(t)$	-	0	+
$F(t)$			

$$\text{Thay vào đặt ta có: } (3,24 + x^2) = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{144}{25} \Leftrightarrow x = 2,4m$$

Vậy để nhìn rõ nhất thì $AO = 2,4m$.

Câu 43: Từ hình vuông có cạnh bằng 6 người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ. Sau đó người ta gập thành hình hộp chữ nhật không nắp. Tính thể tích lớn nhất của khối hộp.



A. $8\sqrt{2}$.

B. $10\sqrt{2}$.

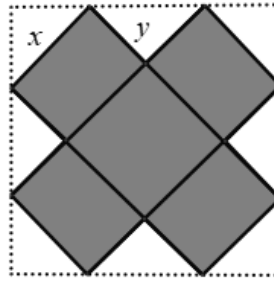
C. $9\sqrt{2}$.

D. $11\sqrt{2}$.



Lời giải

Đặt kích thước các cạnh như hình vẽ

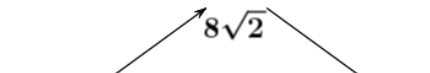


Ta có $\frac{x}{\sqrt{2}} + y\sqrt{2} + \frac{x}{\sqrt{2}} = 6 \Leftrightarrow x + y = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow y = 3\sqrt{2} - x$ với $0 < x < 3\sqrt{2}$.

Thể tích của khối hộp tạo thành là $V = x^2y = x^2(3\sqrt{2} - x)$.

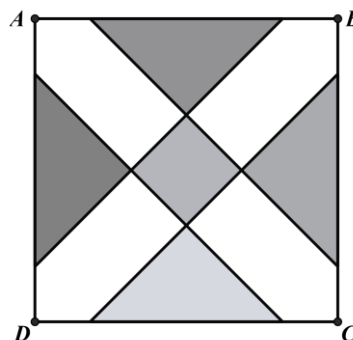
Ta có $V' = 3x(2\sqrt{2} - x) = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên

x	0	$2\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	
$V'(x)$		+	0	-
$V(x)$				

Vậy: $\max V = 8\sqrt{2}$ khi $x = 2\sqrt{2}, y = \sqrt{2}$.

Câu 44: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4, chính giữa có một hình vuông đồng tâm với $ABCD$. Biết rằng bốn tam giác là bốn tam giác cân. Hỏi tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ nhất bằng bao nhiêu?



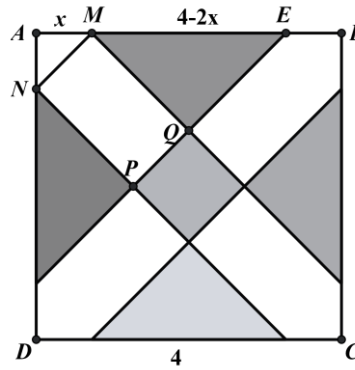
A. $\frac{19}{3}$.

B. $\frac{17}{3}$.

C. $\frac{16}{3}$.

D. $\frac{14}{3}$.

Lời giải



Đặt $AM = x$ ($0 < x < 4$) $\Rightarrow ME = 4 - 2x$.

$$2MQ^2 = (4 - 2x)^2 \Leftrightarrow MQ^2 = 2(2 - x)^2 \Leftrightarrow MQ = \sqrt{2}(2 - x)$$

Gọi S tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ.

$$S = 4 \cdot \frac{MQ^2}{2} + PQ^2 = 2MQ^2 + MN^2 = (4 - 2x)^2 + (x\sqrt{2})^2 = 6x^2 - 16x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{4}{3}$	4
$S'(x)$	-	0	+
$S(x)$		$\frac{16}{3}$	

Vậy $S_{\min} = \frac{16}{3}$

Câu 45: Trong một bài thực hành huấn luyện quân sự có một tình huống chiến sĩ phải bơi qua sông để tấn công mục tiêu ở ngay phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 100m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một phần ba vận tốc chạy trên bộ. Hãy cho biết chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất? Biết dòng sông là thẳng, mục tiêu cách chiến sĩ 1km theo đường chim bay và chiến sĩ cách bờ bên kia 100m.

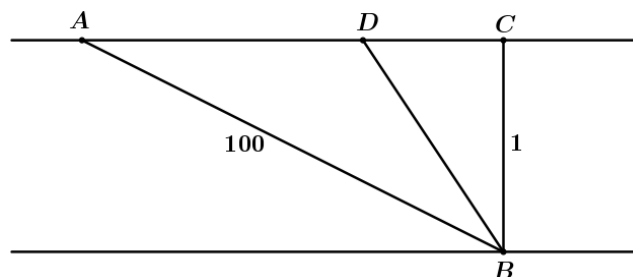
A. $\frac{200\sqrt{2}}{3}$.

B. $75\sqrt{3}$.

C. $\frac{200\sqrt{3}}{3}$.

D. $75\sqrt{2}$.

Lời giải



Gọi A là mục tiêu; B là vị trí chiến sĩ và BD là đường bơi của chiến sĩ.

Chọn một đơn vị độ dài là 100m suy ra $BC = 1$; $AB = 10$; $AC = 3\sqrt{11}$



Gọi vận tốc bơi của chiến sỹ là một đơn vị vận tốc thì vận tốc chạy của chiến sỹ là 3 đơn vị vận tốc.
Gọi x là quãng đường chiến sỹ bơi suy ra $BD = x$

Vậy quãng đường chiến sỹ chạy là $AD = AC - CD = 3\sqrt{11} - \sqrt{x^2 - 1}$

Thời gian chiến sỹ đến được mục tiêu là: $t = \frac{3\sqrt{11} - \sqrt{x^2 - 1}}{3} + \frac{x}{1} = \sqrt{11} - \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 1} + x$

Xét hàm $f(x) = \sqrt{11} - \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 1} + x$ có $f'(x) = 1 - \frac{1}{3} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ (thỏa mãn)} \\ x = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ (loại)} \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	1	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$	10
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$			

Vậy thời gian chiến sỹ đến mục tiêu ngắn nhất khi $f(x)_{\min} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

Vậy chiến sỹ phải bơi $\frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot 100 = 75\sqrt{2} (m)$.

Câu 46: Một người dự định làm một bể chứa nước hình trụ bằng inox có nắp đậy với thể tích 1 (m³). Chi phí mỗi m² đáy là 600 nghìn đồng, mỗi m² nắp là 200 nghìn đồng và mỗi m² mặt bên là 400 nghìn đồng. Hỏi người đó án kính bể là bao nhiêu để chi phí làm bể ít nhất?

- A. $\sqrt[3]{2\pi}$. B. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. C. $\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$. D. $\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$.

Lời giải

Gọi R và h lần lượt là bán kính và chiều cao của bể chứa nước.

Ta có thể tích bể chứa nước là: $V = 1 \Rightarrow \pi R^2 h = 1 \Leftrightarrow h = \frac{1}{\pi R^2}$.

Diện tích nắp và mặt đáy bể chứa nước là: $S_1 = \pi R^2$.

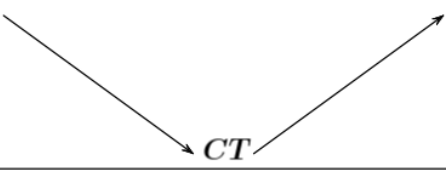
Diện tích xung quanh của bể chứa nước là: $S_2 = 2\pi R h = 2\pi R \cdot \frac{1}{\pi R^2} = \frac{2}{R}$.

Chi phí làm bể chứa nước là: $f(R) = 6\pi R^2 + 2\pi R^2 + 4 \cdot \frac{2}{R} = 8\pi R^2 + \frac{8}{R}$ (trăm nghìn đồng).

Ta có: $f'(R) = 16\pi R - \frac{8}{R^2}$. Xét $f'(R) = 0 \Leftrightarrow 16\pi R - \frac{8}{R^2} = 0 \Leftrightarrow 2\pi R^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$.

Bảng biến thiên:

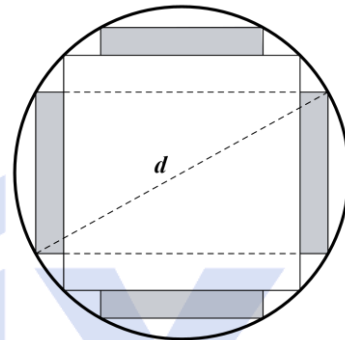


R	0	$\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$	$+\infty$
$f'(R)$	-	0	+
$f(R)$			

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy chi phí làm bể chứa nước thấp nhất khi $R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$.

Câu 47: Một khúc gỗ tròn hình trụ cần xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và 4 miếng phụ như hình vẽ. Hãy xác định kích thước của các miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất. Biết đường kính khúc gỗ là d .

- A. Rộng $\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d$, dài $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{17}}{4}d$
- B. Rộng $\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{15}d$, dài $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{17}}{4}d$
- C. Rộng $\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{14}d$, dài $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{17}}{4}d$
- D. Rộng $\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{13}d$, dài $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{17}}{4}d$



Lời giải

Gọi chiều dài và chiều rộng của miếng phụ lần lượt là x, y . Đường kính của khúc gỗ là d , khi đó tiết diện ngang của thanh xà có độ dài cạnh là $\frac{d}{\sqrt{2}}$ và $0 < x < \frac{d(2-\sqrt{2})}{4}, 0 < y < \frac{d}{\sqrt{2}}$

Theo đề Câu ta được hình chữ nhật ABCD như hình vẽ, theo định lý Pitago ta có:

$$\left(2x + \frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = d^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2 - 8x^2 - 4\sqrt{2}dx}$$

Do đó, miếng phụ có diện tích là: $S(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2 - 8x^2 - 4\sqrt{2}dx}$ với $0 < x < \frac{d(2-\sqrt{2})}{4}$

Bài toán trở thành tìm x để $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

$$\text{Ta có: } S'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2 - 8x^2 - 4\sqrt{2}dx} + \frac{x(-8x - 2\sqrt{2}d)}{\sqrt{2}\sqrt{d^2 - 8x^2 - 4\sqrt{2}dx}} = \frac{-16x^2 - 6\sqrt{2}dx + d^2}{\sqrt{2}\sqrt{d^2 - 8x^2 - 4\sqrt{2}dx}}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow -16x^2 - 6\sqrt{2}dx + d^2 = 0 \Leftrightarrow -16\left(\frac{x}{d}\right)^2 - 6\sqrt{2}\left(\frac{x}{d}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d$$



Vậy miếng phụ có kích thước $x = \frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{16}d, y = \frac{\sqrt{7 - \sqrt{17}}}{4}d$

- Câu 48:** Nhà Long muốn xây một hồ chứa nước có dạng một khối hộp chữ nhật có nắp đậy có thể tích bằng $576m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá tiền thuê nhân công để xây hồ tính theo m^2 là 500.000 đồng/ m^2 . Hãy xác định kích thước của hồ chứa nước sao cho chi phí thuê nhân công là ít nhất và chi phí đó là bao nhiêu?
- A.** Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 216 triệu
B. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 215 triệu
C. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 214 triệu
D. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 213 triệu.

Lời giải

Gọi x, y, h lần lượt là chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hồ chứa nước, ($x > 0, y > 0, h > 0, m$)

Ta có: $\frac{y}{x} = 2 \Leftrightarrow y = 2x$. Thể tích hồ chứa nước $V = xyh \Leftrightarrow h = \frac{V}{xy} = \frac{576}{x(2x)} = \frac{288}{x^2}$

Diện tích cần xây dựng hồ chứa nước:

$$S(x) = 2xy + 2xh + 2yh = 2x(2x) + 2x \frac{288}{x^2} + 2(2x) \frac{288}{x^2} = 4x^2 + \frac{1728}{x}$$

Để chi phí nhân công là ít nhất thì diện tích cần xây dựng là nhỏ nhất, mà vẫn đạt thể tích như mong muốn.

Bài toán trở thành tìm x để $S(x)$ nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow S(x) = 4x^2 + \frac{1728}{x} \Rightarrow S'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x - \frac{1728}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

Bảng biến thiên:

x	0	6	$+\infty$
$S'(x)$		0	
$S(x)$		S_{min}	

Vậy kích thước của hồ là: rộng 6m, dài 12m, cao 8m.

Diện tích cần xây: $432m^2$ và chi phí ít nhất là: $432 \times 500.000 = 216.000.000$

- Câu 49:** Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính R , nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp?
- A.** $2R^2$ **B.** $5R^2$ **C.** R^2 **D.** $3R^2$

Lời giải

Gọi x là độ dài cạnh của hình chữ nhật không nằm dọc theo đường kính của hình tròn ($0 < x < R$)



Độ dài cạnh còn lại của hình chữ nhật là $2\sqrt{R^2 - x^2}$

Ta có diện tích của hình chữ nhật là: $S(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$

Bài toán trở thành tìm x để $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

$$S'(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{2R^2 - 4x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow 2R^2 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{R\sqrt{2}}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ x = -\frac{R\sqrt{2}}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	R
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$			

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là R^2 .

Câu 50: Để thiết kế một chiếc bể cá hình chữ nhật có chiều cao là 60cm , thể tích là 96.000cm^3 , người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70.000 đồng/ m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/ m^2 . Chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là:

A. 83.200.000 đồng **B.** 382.000 đồng **C.** 83.200 đồng **C.** 8.320.000 đồng.

Lời giải

Diện tích của đáy hộp là: $S = \frac{V}{h} = \frac{96.000}{60} = 1600\text{cm}^2 = 0,16\text{m}^2$

Gọi chiều dài cạnh đáy của hộp là x ($x > 0, m$), chiều rộng của hộp là $\frac{0,16}{x}$

Gọi $F(x)$ là hàm chi phí để làm bể cá.

Chi phí để hoàn thành bể cá:

$$F(x) = 0,16 \times 100.000 + 2,0,6x \cdot 70.000 + 2,0,6 \cdot \frac{0,16}{x} \cdot 70.000 = 16.000 + 48.000x + \frac{13440}{x}$$

Bài toán trở thành tìm x để $F(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$F'(x) = 48.000 - \frac{13440}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 48.000 - \frac{13440}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$$

Bảng biến thiên:



x	0	0,4	$+\infty$
$F'(x)$		— 0 +	
$F(x)$			

Vậy chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là: 83.200 đồng

- Câu 51:** Ông Nam cần xây dựng một bể nước mưa có thể tích $V = 8(m^3)$ dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài gấp $\frac{4}{3}$ lần chiều rộng, đáy và nắp đổ bê tông, cốt thép; xung quanh xây bằng gạch và xi măng. Biết rằng chi phí trung bình là $980.000đ/m^2$ và ở nắp để hở một khoảng hình vuông có diện tích bằng $\frac{2}{9}$ diện tích nắp bể. Tính chi phí thấp nhất mà ông Nam phải chi trả (làm tròn đến hàng nghìn đồng).
- A.** 22.770.000 đ. **B.** 27.657.000 đ. **C.** 20.965.000 đ. **D.** 23.235.000 đ.

Lời giải

Gọi chiều rộng của bể là $3x$ (m). Ta có chiều dài bể là $4x$ (m) và chiều cao của bể là $\frac{2}{3x^2}$ (m)

Khi đó tổng diện tích bề mặt xây là:

$$T = (3x + 4x) \cdot 2 \cdot \frac{2}{3x^2} + 2 \cdot 3x \cdot 4x - \frac{2}{9} \cdot 3x \cdot 4x = \frac{28}{3x^2} + \frac{64x^2}{3} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{28}{3x^2} \cdot \frac{64x^2}{3}} = \frac{32\sqrt{7}}{3} (m^2).$$

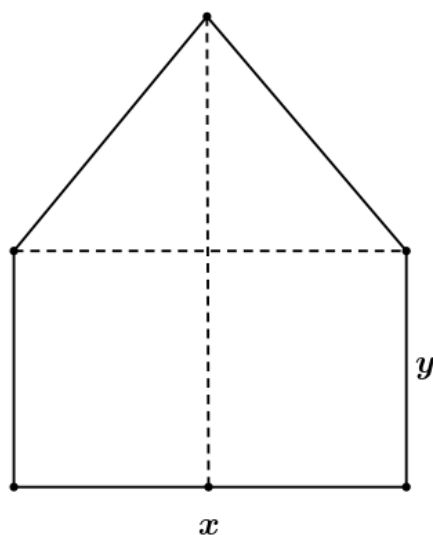
Chi phí C (tính theo đồng) xây dựng là: $C = T \cdot 980000 \geq \frac{32\sqrt{7}}{3} \cdot 980000 \approx 27657000$ (đồng).

- Câu 52:** Dùng một dây thép dài 60 m uốn thành một khung có dạng như hình vẽ. Biết phần dưới là hình chữ nhật và phía trên là một tam giác đều. Diện tích lớn nhất của khung có giá trị bằng:
- A.** $\frac{900}{6-\sqrt{3}}(m^2)$. **B.** $\frac{1200}{6-\sqrt{3}}(m^2)$. **C.** $\frac{700}{3+\sqrt{3}}(m^2)$. **D.** $\frac{600}{3-\sqrt{3}}(m^2)$.

Lời giải

Gọi hai cạnh của hình chữ nhật là x và y như hình vẽ

Khi đó chu vi của khung là $(x + 2y) + 2x = 60 \Leftrightarrow y = 30 - \frac{3}{2}x$



Suy ra diện tích của khung là: $S = xy + \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = x(30 - 1,5x) + \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6 - \sqrt{3}}{4}x^2 + 30x = f(x)$

Dễ dàng suy ra được: $S_{\max} = \max f(x) = f\left(\frac{60}{6 - \sqrt{3}}\right) = \frac{900}{6 - \sqrt{3}} (\text{m}^2)$

