



CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 5. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TIỄN



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$ trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?

Lời giải

Ta có: $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t + 1$.

Nhận xét: $v(t)$ có đồ thị là một parabol nên trong 5s đầu tiên vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng 13 tại $t = 2s$.

Câu 2: Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là $s(t)$ (km) là hàm phụ thuộc theo biến t (giây) tuân theo biểu thức sau: $s(t) = e^{t^2+3} + 2te^{3t+1}$ (km). Vận tốc của tên lửa sau 1 giây là $m.e^n$ (km/s). Tính $T = m + n$ (Biết hàm biểu thị vận tốc là đạo hàm cấp một của hàm biểu thị quãng đường theo thời gian)?

Lời giải

Ta có: $v(t) = s'(t) = 2te^{t^2+3} + 2e^{3t+1} + 6te^{3t+1} \Rightarrow v(1) = 2e^4 + 2e^4 + 6e^4 = 10e^4$ (km/s)

Vậy $\begin{cases} m = 10 \\ n = 4 \end{cases} \Rightarrow T = m + n = 10 + 4 = 14$

Câu 3: Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ độ cao 2 m với vận tốc ban đầu là 24,5 (m/s). Trong Vật lý, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí thì độ cao h (mét) của vật sau t (giây) được cho bởi công thức $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$. Hỏi sau bao nhiêu giây thì vật đạt độ cao lớn nhất?

Lời giải

Xét hàm số: $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $h'(t) = -9,8t + 24,5$; $h'(t) = 0 \Leftrightarrow -9,8t + 24,5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$

Bảng biến thiên:



t	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$h'(t)$	+	0	-
$h(t)$	$-\infty$	$\frac{261}{8}$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $t = \frac{5}{2}$

Vậy thời điểm vật đạt độ cao lớn nhất là $t = \frac{5}{2}$ giây

Câu 4: Công ty truyền hình cáp Vista hiện có 100 000 thuê bao. Mỗi thuê bao đang trả cước thuê bao 40\$/tháng. Một cuộc khảo sát cho thấy cứ mỗi lần giảm 0,25\$ cước thuê bao, công ty có thể có thêm 1000 thuê bao. Để doanh thu thu được là tối đa, công ty cần xác định mức cước thuê bao mỗi tháng là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 32,5

Gọi x là số lần giảm 0,25\$. Cước thuê bao hàng tháng lúc này là $40 - 0,25x$ với $0 \leq x \leq 160$ (do mức cước không thể âm), và số thuê bao mới là $1000x$.

Do đó, tổng số thuê bao là $100000 + 1000x$.

Hàm doanh thu được cho bởi $R = (\text{số thuê bao}) \times (\text{cước mỗi thuê bao trả})$

$$R = (100000 + 1000x)(40 - 0,25x)$$

$$= 1000(100 + x)(40 - 0,25x) = 1000(4000 + 15x - 0,25x^2).$$

$$\text{Đạo hàm } R' = 0, \text{ ta được } R' = 1000(15 - 0,5x) = 0 \Rightarrow x = 30.$$

$$\text{Ta có: } R(0) = 4000000; R(30) = 4225000; R(160) = 0.$$

Vậy doanh thu tối đa khi $x = 30$. Điều này tương ứng với 30 lần giảm 0,25\$, tức là cước thuê bao hàng tháng bằng $40\$ - 7,5\$ = 32,5\$$.

Câu 5: Để thiết kế một chiếc bể cá hình chữ nhật có chiều cao là 60 cm, thể tích là 96.000 cm^3 , người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 140.000 đồng/ m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 240.000 đồng/ m^2 . Chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là bao nhiêu nghìn đồng? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 173

$$\text{Diện tích đáy của bể bằng } 96000 : 60 = 1600 (\text{cm}^2)$$

Gọi độ dài 1 cạnh của đáy bể là $x (x > 0)$ (đơn vị cm), khi đó độ dài cạnh còn lại của đáy bể là $\frac{1600}{x}$.

$$\text{Tổng diện tích mặt bên là } S = 2 \left(x + \frac{1600}{x} \right) \cdot 60 = 120x + \frac{192000}{x} (\text{cm}^2)$$

$$\text{Ta có } S' = 120 - \frac{192000}{x^2}, S' = 0 \Rightarrow 120x^2 - 192000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ x = -40 (\text{loại}) \end{cases}$$

Bảng biến thiên

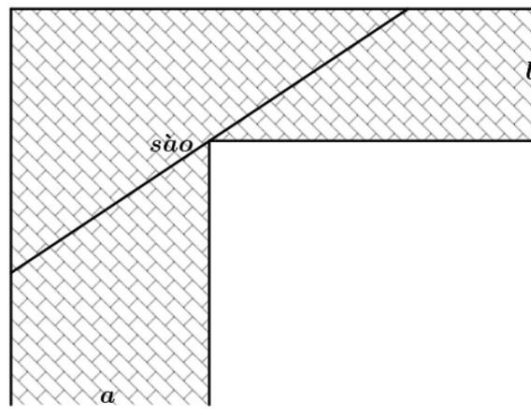


x	40	$+\infty$
S'	- 0 +	
S	$+\infty$ ↘ 9600 ↗ $+\infty$	

Chi phí hoàn thành bể cá thấp nhất khi $S = \min_{(0;+\infty)} S = 9600 (cm^2)$, tức là $x = 40 (cm)$

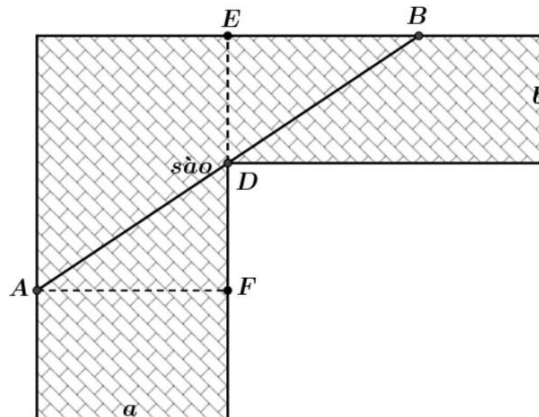
Vậy chi phí thấp nhất hoàn thành bể cá là $0,96.140 + 0,16.240 = 172,8 \approx 173$ nghìn đồng.

Câu 6: Để chặn đường hành lang hình chữ L, người ta dùng một que sào thẳng dài đặt kín những điểm chạm với hành lang (như hình vẽ). Biết $a = 24$ và $b = 3$. Hỏi cái sào thảo mãn điều kiện trên có chiều dài tối thiểu là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Trả lời: 33,5

Lời giải



Đặt các điểm như hình vẽ

Đặt $DF = x, x > 0$, ta có $\triangle ADF$ đồng dạng với $\triangle BED$ nên $\frac{EB}{ED} = \frac{AF}{DF} \Rightarrow EB = \frac{ab}{x}$

Gọi l là chiều dài của que sào, ta có $l^2 = AB^2 = (x+b)^2 + \left(a + \frac{ab}{x}\right)^2 = f(x)$

Đạo hàm $f'(x) = 2(x+b) - 2\frac{ab}{x^2} \left(a + \frac{ab}{x}\right) = 2(x+b) \left(1 - \frac{a^2b}{x^3}\right)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a^2b} = 12$

Dễ dàng suy ra được $\min_{(0;+\infty)} f(x) = f(12) = 1125$



Vậy giá trị nhỏ nhất của que sào là $l = \sqrt{1125} = 15\sqrt{5} \approx 33,5$.

Câu 7: Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18000. Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì cơ sở sản xuất cần tăng giá bán mỗi chiếc khăn là bao nhiêu nghìn đồng?

Lời giải

Trả lời: 9000

Gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là x (nghìn đồng).

Vì cứ tăng giá thêm 1 (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm 100 chiếc nên tăng x (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm $100x$ chiếc.

Do đó tổng số khăn bán ra mỗi tháng là: $3000 - 100x$ chiếc.

Lúc đầu bán với giá 30 (nghìn đồng), mỗi chiếc khăn có lãi 12 (nghìn đồng). Sau khi tăng giá, mỗi chiếc khăn thu được số lãi là: $12 + x$ (nghìn đồng).

Do đó tổng số lợi nhuận một tháng thu được sau khi tăng giá là:

$$f(x) = (3000 - 100x)(12 + x) \text{ (nghìn đồng)}.$$

Xét hàm số $f(x) = (3000 - 100x)(12 + x)$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $f'(x) = -100x^2 + 1800x + 36000$.

$$f'(x) = -200x + 1800$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -200x + 1800 = 0 \Leftrightarrow x = 9$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0; +\infty)$ ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất khi

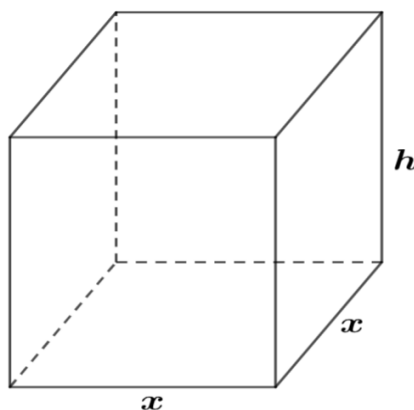
$$x = 9$$

Như vậy, để thu được lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sản xuất cần tăng giá bán mỗi chiếc khăn là 9000 đồng.

Câu 8: Một hộp sữa dung tích 1 lít có dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh bằng x (cm) và chiều cao h (cm). Tìm giá trị của x để diện tích toàn phần của hình hộp là nhỏ nhất.

Lời giải

Trả lời: 10



Thể tích của hộp sữa là: $V = x^2h$ (cm³).

Theo bài ra, ta có: $V = 1(l) = 1000$ (cm³) $\Rightarrow x^2h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{x^2}$.



Ta có diện tích toàn phần của hộp sữa là: $S_p = S_{xq} + S_d = 4hx + 2x^2 = 4 \cdot \frac{1000}{x^2} \cdot x + 2x^2 = 2x^2 + \frac{4000}{x}$

Đặt $y = 2x^2 + \frac{4000}{x} \Rightarrow y' = 4x - \frac{4000}{x^2}$.

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow 4x - \frac{4000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4000 = 0 \Leftrightarrow x = 10$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0	10	$+\infty$
y'		- 0 +	
y	$+\infty$	600	$+\infty$

Vậy để hộp sữa có diện tích toàn phần nhỏ nhất thì $x = 10$.

Câu 9: Hai sinh viên Thành và Linh rủ nhau mở một công ty vận tải taxi điện (Sử dụng nguồn cung sẵn có trong nước với nhiều ưu đãi khuyến khích phát triển loại phương tiện này). Hai bạn Thành và Linh dự định sử dụng không quá 10 xe. Nếu công ty sử dụng tối đa thời gian hoạt động của x xe điện trên ($1 \leq x \leq 10, x \in \mathbb{N}$) thì doanh thu nhận được của số xe đó là $D(x) = x^3 - 4597x^2 + 50300x + 30000$ (triệu đồng), trong khi chi phí nạp điện, bảo dưỡng, phí cầu đường, thuế và thuê nhân công lái xe. bình quân cho mỗi xe là $C(x) = 3x + 300 + \frac{30000}{x}$ (triệu đồng). Hai bạn Thành và Linh cần ưu tiên tối đa cho bao nhiêu xe hoạt động thường xuyên để lợi nhuận công ty thu được là lớn nhất?

Lời giải

Trả lời: 5

Chi phí hoạt động cho x xe điện là: $x.C(x) = x \cdot \left(3x + 300 + \frac{30000}{x} \right) = 3x^2 + 300x + 30000$

(triệu đồng).

Lợi nhuận của công ty được tính bằng doanh thu trừ cho chi phí đầu tư.

Suy ra, lợi nhuận của công ty là: $T(x) = D(x) - x.C(x), 1 \leq x \leq 10, x \in \mathbb{N}$ (triệu đồng).

$$T(x) = (x^3 - 4597x^2 + 50300x + 30000) - (3x^2 + 300x + 30000) = x^3 - 4600x^2 + 50000x.$$

$$T'(x) = 3x^2 - 9200x + 50000.$$

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 9200x + 50000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \approx 3061,222218 \notin [1;10] \\ x_2 \approx 5,444448485 \in [1;10] \end{cases}$$

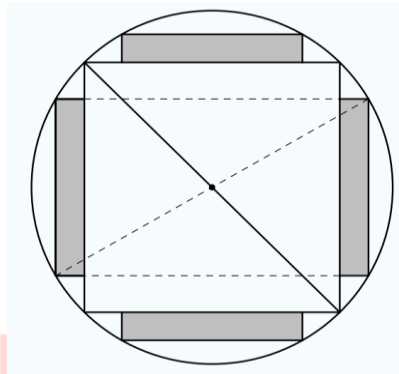
BBT:



x	1	5	5,444448485	6	10
$T'(x)$		+	+	0	-
$T(x)$			135125	136030,5	134616

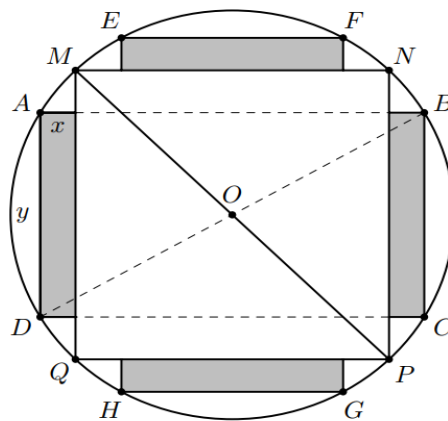
Từ BBT, kết hợp với $x \in \mathbb{N}$ suy ra để lợi nhuận của công ty thu được là lớn nhất thì cần ưu tiên tối đa cho 5 chiếc xe điện hoạt động thường xuyên.

Câu 10: Từ một khúc gỗ tròn hình trụ có đường kính bằng 40 cm, cần xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và bốn miếng phụ được tô màu xám như hình vẽ dưới đây. Tìm chiều rộng x của miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất. (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải

Trả lời: 3,97



Gọi y là chiều dài của miếng phụ.

Diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là $S = S_{MNPQ} + 4xy$.

$$\text{Cạnh hình vuông } MN = \frac{MP}{\sqrt{2}} = \frac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow S = (20\sqrt{2})^2 + 4xy = 800 + 4xy$$

$$\text{Ta có } 2x = AB - MN = AB - 20\sqrt{2} < BD - 20\sqrt{2} = 40 - 20\sqrt{2} \Rightarrow 0 < x < 20 - 10\sqrt{2}.$$

$$\text{Lại có } AB^2 + AD^2 = BD^2 = 40^2 \Rightarrow (2x + 20\sqrt{2})^2 + y^2 = 1600.$$

Thế vào (1), ta được

$$S = 800 + 4x\sqrt{800 - 80x\sqrt{2} - 4x^2} = 800 + 4\sqrt{800x^2 - 80x^3\sqrt{2} - 4x^4}$$

Xét hàm số $f(x) = 800x^2 - 80x^3\sqrt{2} - 4x^4$, với $x \in (0; 20 - 10\sqrt{2})$ có



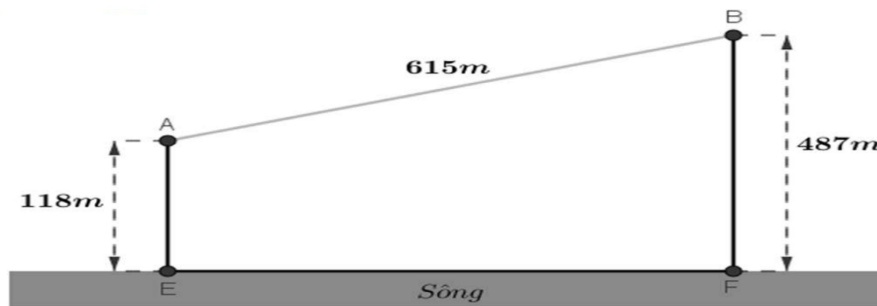
$$f'(x) = 1600x - 240x^2\sqrt{2} - 16x^3 = 16x(100 - 15x\sqrt{2} - x^2).$$

Ta có bảng biến thiên

x	0	$\frac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2}$	$20 - 10\sqrt{2}$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$f\left(\frac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2}\right)$	$f(20 - 10\sqrt{2})$

Vậy $x = \frac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2} \approx 3,97$ chính là giá trị cần tìm.

Câu 11: Cho hai vị trí A, B cách nhau 615 m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ.



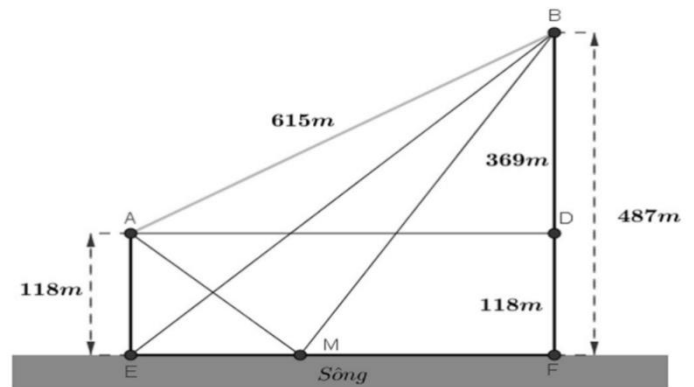
Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118 m và 487 m. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B . Đoạn đường ngắn nhất là số nguyên dương mà người đó có thể đi là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 780

Giả sử người đó đi từ A đến M để lấy nước và đi từ M về B để dễ dàng tính được $BD = 369, EF = 492$.

Ta đặt $EM = x$, khi đó ta được:



$$MF = 492 - x, AM = \sqrt{x^2 + 118^2}, BM = \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}.$$

Như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định bằng tổng quãng đường AM và MB :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} \text{ với } x \in [0; 492]$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được quãng đường ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm M .



$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} = \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}} \Leftrightarrow x\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} = (492 - x)\sqrt{x^2 + 118^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2[(492 - x)^2 + 487^2] = (492 - x)^2(x^2 + 118^2) \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (487x)^2 = (58056 - 118x)^2 \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{58056}{605} \text{ hay } x = -\frac{58056}{369} \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{58056}{605}$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 492]$. So sánh các giá trị của $f(0)$, $f\left(\frac{58056}{605}\right)$, $f(492)$ ta có

giá trị nhỏ nhất là $f\left(\frac{58056}{605}\right) \approx 779,8 \approx 780m$

Khi đó quãng đường đi ngắn nhất là xấp xỉ $780m$.

Câu 12: Khi làm nhà kho, bác Cường muốn để cửa sổ có dạng hình chữ nhật với diện tích bằng $3,4m^2$ (tham khảo hình vẽ). Tìm chu vi nhỏ nhất của khung cửa sổ (để tiết kiệm vật liệu nhất, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Trả lời: 7,34

Gọi chiều dài, chiều rộng lần lượt của khung cửa sổ là x, y (mét). Điều kiện $x, y > 0$.

Diện tích của khung cửa sổ là $xy = 3,4 \Rightarrow y = \frac{3,4}{x}$.

Khi đó chu vi của khung cửa sổ là $C = 2x + 2y = 2x + \frac{6,8}{x}$.

Xét hàm số $f(x) = 2x + \frac{6,8}{x}$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(x) = 2 - \frac{6,8}{x^2}$

Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{85}}{5} \in (0; +\infty)$

Ta có bảng biến thiên như sau



x	0	$\frac{\sqrt{85}}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{4\sqrt{85}}{5}$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy được chu vi khung cửa sổ nhỏ nhất bằng $\frac{4\sqrt{85}}{5} \approx 7,34$ m.

Câu 13: Công ty TNHH Quang Minh muốn sản xuất độc quyền một loại sản phẩm để bán ra thị trường trong dịp tết Nguyên Đán. Biết rằng tổng chi phí sản xuất loại sản phẩm này là một hàm số được cho bởi công thức $g(x) = x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000$, doanh thu của công ty khi đó là hàm số $h(x) = -2x^2 + 1312x$, với x là số sản phẩm. Lợi nhuận của công ty được xác định bằng hàm số $f(x) = g(x) - h(x)$. Để lợi nhuận cao nhất mà công ty đạt được thì cần phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải

Trả lời: 52

Xét hàm số $f(x) = g(x) - h(x) = -x^3 + 75x^2 + 312x - 40000$.

TXĐ: $D = (0; +\infty)$.

$$f'(x) = -3x^2 + 150x + 312 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 52(N) \\ x = -2(L) \end{cases}$$

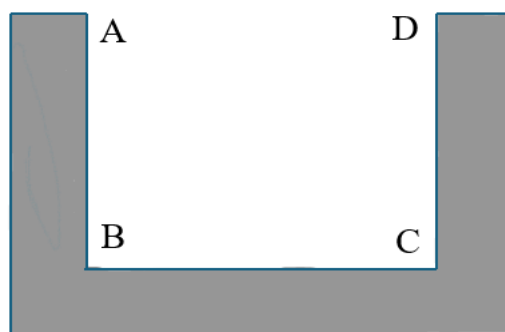
Bảng biến thiên:

x	0	52	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	-4000	74416	$-\infty$

Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 74416 tại $x = 52$.

Vậy lợi nhuận của công ty đạt được cao nhất khi sản xuất số sản phẩm là 52.

Câu 14: Hình dưới đây là mương dẫn nước thủy lợi tại một địa phương phục vụ tưới tiêu cho ruộng đồng. Phần không gian trong mương để nước chảy có mặt cắt ngang là hình chữ nhật $ABCD$. Với điều kiện lưu lượng nước qua mương cho phép thì diện tích mặt cắt $ABCD$ là $0,48 m^2$. Để đảm bảo yêu cầu kỹ thuật tốt nhất cho mương, người ta cần thiết kế sao cho tổng độ dài $T = AB + BC + CD$ là ngắn nhất. Khi đó chiều rộng đáy mương bằng bao nhiêu (biết chiều rộng phải dưới 1m, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải

Trả lời: 0,98

Đặt $BC = x(m)$, $0 < x < 1$. Theo đề bài, ta có $AB \cdot BC = 0,48 \Rightarrow AB = \frac{0,48}{BC} = \frac{0,48}{x}$.

$$T = f(x) = AB + BC + CD = x + 2 \cdot AB = x + \frac{0,96}{x}.$$

$$f'(x) = 1 - \frac{0,96}{x^2}. \text{ Khi đó } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 0,96 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{5} \approx 0,98(m).$$

x	0	$\frac{2\sqrt{6}}{5}$	1		
$f'(x)$	$\parallel$	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4\sqrt{6}}{5}$	$\nearrow$	$\frac{49}{25}$

Vậy chiều rộng đáy mương $BC = 0,98(m)$ thỏa ycbt.

Câu 15: Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là $300km$. Vận tốc của dòng nước là $8km/h$. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v(km/h)$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$. Trong đó c là một hằng số, E được tính bằng *jun*. Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.

Lời giải

Trả lời: 12

Vận tốc của cá bơi khi ngược dòng là: $v - 8 (km/h)$, $v > 8$.

Thời gian để cá bơi vượt khoảng cách $300km$ là $t = \frac{300}{v-8}$.

Năng lượng tiêu hao của cá để vượt khoảng cách đó là:

$$E(v) = cv^3 \cdot \frac{300}{v-8} = 300c \cdot \frac{v^3}{v-8} (jun), v > 8.$$

$$E'(v) = 600cv^2 \cdot \frac{v-12}{(v-8)^2} \Leftrightarrow E'(v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 (loại) \\ v = 12 \end{cases}.$$

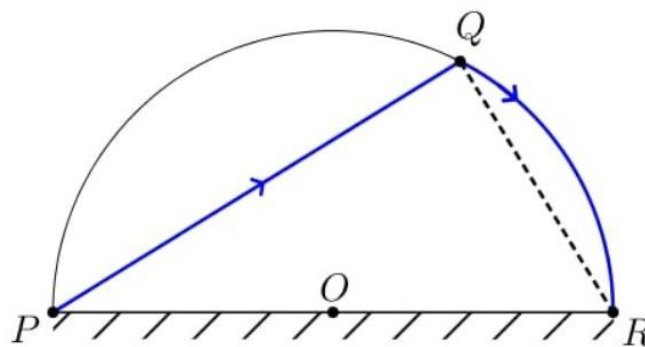
Bảng biến thiên



v	8	12	$+\infty$
$E'(v)$	-	0	+
$E(v)$			

$$\Rightarrow E_{\min} \Leftrightarrow v = 12 \text{ km/h.}$$

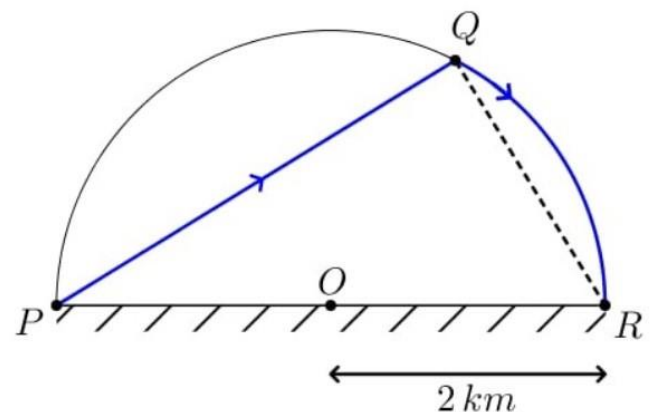
Câu 16: Cho một bờ sông hình bán nguyệt có bán kính bằng 2km , đường kính PR như hình vẽ sau:



Từ điểm P anh Tèo chèo một chiếc thuyền với vận tốc 3km/h đến điểm Q trên bờ hồ, rồi chạy bộ dọc theo thành hồ đến vị trí R với vận tốc 6km/h . Thời gian lớn nhất mà anh Tèo di chuyển từ P đến R là bao nhiêu? (thời gian tính bằng giờ, kết quả làm tròn đến phần chục)

Lời giải

Trả lời: 1,5



$$\text{Đặt } \angle QPR = \alpha \text{ (rad)}, \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Ta có $\triangle PQR$ vuông tại $Q \Rightarrow PQ = PR \cdot \cos \alpha = 4 \cos \alpha$ mà $OQ = 2 \cdot QP = 2\alpha$.

Độ dài cung tròn $QR = 2.2\alpha = 4\alpha$.

Thời gian anh Tèo chèo thuyền từ P đến Q là $\frac{4 \cos \alpha}{3}$ (giờ)

Thời gian anh Tèo chạy từ Q đến R là $\frac{4\alpha}{6} = \frac{2\alpha}{3}$ (giờ)



Tổng thời gian anh Tèo di chuyển từ P đến R là $t = \frac{4\cos\alpha}{3} + \frac{2\alpha}{3}$, $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

Xét hàm số $t(\alpha) = \frac{4\cos\alpha}{3} + \frac{2\alpha}{3}$ với $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$t'(\alpha) = \frac{1}{3}(-4\sin\alpha + 2), \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$t'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

Bảng biến thiên Tìm được $t(\alpha) \leq t\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 1,5$ (giờ)

Vậy thời gian lớn nhất mà anh Tèo di chuyển từ P đến R là 1,5 giờ

Câu 17: Người ta thấy rằng trong vòng 4 năm tính từ đầu năm 2020, giá thành P của một loại sản phẩm vào tháng thứ t thay đổi theo công thức $P(t) = 30t^2 - 2400t + 90000$ với $0 \leq t \leq 48$. Giá thành P sản phẩm giảm khi t trong khoảng $(a; b)$. Tính $T = b - a$

Lời giải

Trả lời: 40

$$P'(t) = 60t - 2400$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow t = 40$$

Lập bảng biến thiên

t	0	40	48
$P'(t)$		- 0 +	

Giá thành giảm khi t trong khoảng $(0; 40) \Rightarrow T = b - a = 40$.

Câu 18: Giả sử số lượng quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hóa bằng hàm số $P(t) = \frac{25}{0,25 + e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tốc độ sinh trưởng của quần thể nấm men ở thời điểm t được tính theo công thức $P'(t)$. Biết số lượng quần thể nấm men được nuôi cấy luôn tăng, hỏi số lượng quần thể nấm men tăng nhưng không vượt quá bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 100

Ta có: $P'(t) = \frac{18,75 \cdot e^{-0,75t}}{(0,25 + e^{-0,75t})^2} > 0, \forall t > 0$. Suy ra số lượng quần thể nấm men được nuôi cấy luôn

tăng.

Ta lại có: $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{0,25 + e^{-0,75t}} = 100$. Do đó số lượng quần thể nấm men tăng nhưng không vượt quá 100.

Câu 19: Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng 169 m^2 . Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là $x(\text{m})$. Gọi $P(x)$ là chu vi của mảnh vườn. Đồ thị hàm số $P(x)$ có hai đường tiệm cận $x = a$ và $y = bx$. Tính $T = a + b$.



Lời giải

Trả lời: 2

Cạnh còn lại của mảnh vườn hình chữ nhật là: $\frac{169}{x}$ (m).

Suy ra chu vi của mảnh vườn là: $P(x) = 2\left(x + \frac{169}{x}\right) = 2x + \frac{338}{x}$, với $x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\left(x + \frac{169}{x}\right) = +\infty$$

Suy ra đồ thị hàm số $P(x)$ có đường tiệm cận đứng là trục tung $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\left(x + \frac{169}{x}\right) = +\infty \text{ suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [P(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{338}{x} = 0$$

Suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = 2x$.

Khi đó $T = 0 + 2 = 2$

Câu 20: Hằng ngày mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (m) của mực nước trong kênh tại thời điểm t (h) ($0 \leq t \leq 24$) trong ngày được xác định bởi công thức $h = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi t}{12}\right) + 5$. Gọi $(a; b)$ là khoảng thời gian trong ngày mà độ sâu của mực nước trong kênh tăng dần. Tính giá trị của $2a + b$.

Lời giải

Trả lời: 36

$$\text{Ta có } h(t) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi t}{12}\right) + 5 \Rightarrow h'(t) = -\frac{\pi}{6} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi t}{12}\right).$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi t}{12}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} - \frac{\pi t}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = -4 - 12k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Mà } 0 \leq t \leq 24 \text{ nên } 0 \leq -4 - 12k \leq 24 \Leftrightarrow -\frac{7}{3} \leq k \leq -\frac{1}{3} \Rightarrow k \in \{-2; -1\}.$$

$$\text{Do đó } h'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 8 \\ t = 20 \end{cases}$$

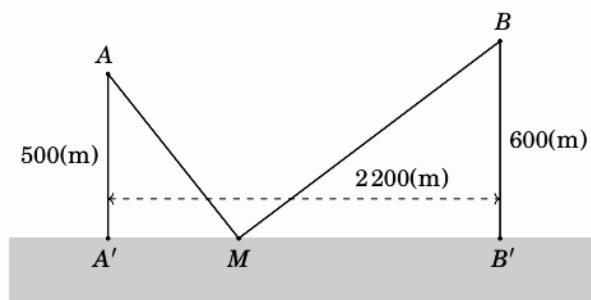
t	0	8	20	24			
$h'(t)$		-	0	+	0	-	
$h(t)$	6		3		7		6



$\Rightarrow h(t)$ đồng biến trên khoảng $(8; 20)$ hay trong khoảng từ 8h đến 20h độ sâu của mực nước trong kênh tăng dần.

Vậy $a = 8; b = 20$ và $2a + b = 36$.

Câu 21: Kết Có hai xã A, B cùng ở một bên bờ sông. Khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 550$ m, $BB' = 600$ m. Người ta đo được $A'B' = 2200$ m như hình vẽ dưới đây. Các kỹ sư muốn xây dựng một trạm cung cấp nước sạch nằm cạnh bên bờ sông cho người dân của hai xã sử dụng. Để tiết kiệm chi phí, các kỹ sư phải chọn một vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn $A'B'$ sao cho tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó.



Lời giải

Trả lời: 1000

Đặt $A'M = x$ ($0 < x < 2200$), $B'M = 2200 - x$

Ta có $AM = \sqrt{x^2 + 500^2}$, $BM = \sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}$

Khi đó tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là:

$$AM + BM = \sqrt{x^2 + 500^2} + \sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 500^2} + \sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}$ trên khoảng $(0; 2200)$

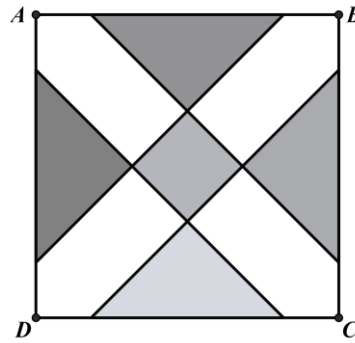
$$\text{Đạo hàm } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 500^2}} - \frac{2200 - x}{\sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 1000$$

Bảng biến thiên:

x	0	1000	2200
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	2780	2460	2856

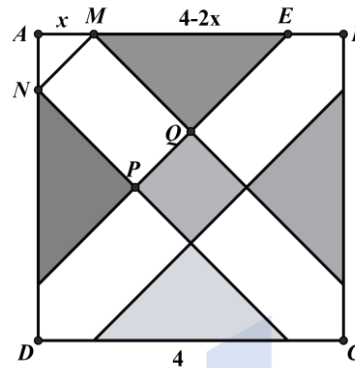
Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông là khoảng 2460 m, tại vị trí M cách điểm A' là 1000 m.

Câu 22: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4, chính giữa có một hình vuông đồng tâm với $ABCD$. Biết rằng bốn tam giác là bốn tam giác cân. Hỏi tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?



Lời giải

Trả lời: 5,33



Đặt $AM = x$ ($0 < x < 4$) $\Rightarrow ME = 4 - 2x$.

$$2MQ^2 = (4 - 2x)^2 \Leftrightarrow MQ^2 = 2(2 - x)^2 \Leftrightarrow MQ = \sqrt{2}(2 - x)$$

Gọi S tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ.

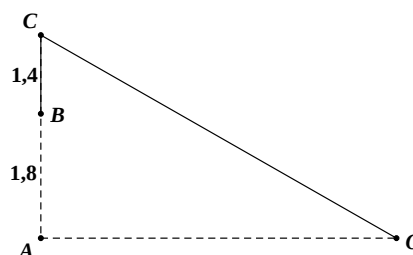
$$S = 4 \cdot \frac{MQ^2}{2} + PQ^2 = 2MQ^2 + MN^2 = (4 - 2x)^2 + (x\sqrt{2})^2 = 6x^2 - 16x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{4}{3}$	4
$S'(x)$	–	0	+
$S(x)$			

$$\text{Vậy } S_{\min} = \frac{16}{3} \approx 5,33$$

Câu 23: Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4 mét và đặt ở độ cao 1,8 mét so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đó? Biết rằng góc BOC là góc nhọn.



Lời giải



Trả lời: 2,4

Đặt độ dài cạnh $AO = x(cm), (x > 0)$

Suy ra:

$$BO = \sqrt{3,24 + x^2}, CO = \sqrt{10,24 + x^2}$$

Ta sử dụng định lí cosin trong tam giác OBC ta có:

$$\begin{aligned} \cos BOC &= \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2.OB.OC} = \frac{(3,24 + x^2) + (10,24 + x^2) - 1,96}{2\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}} \\ &= \frac{5,76 + x^2}{\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}} \end{aligned}$$

Vì góc BOC là góc nhọn nên Câu toán trở thành Câu toán tìm x để

$$F(x) = \frac{5,76 + x^2}{\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}} \text{ đạt GTNN.}$$

Đặt $(3,24 + x^2) = t, (t > 3,24)$.

$$\text{Suy ra } F(t) = \frac{t + \frac{63}{25}}{\sqrt{t(t+7)}} = \frac{25t + 63}{25\sqrt{t(t+7)}}$$

Ta tìm t để $F(t)$ nhận giá trị nhỏ nhất.

$$\begin{aligned} F'(t) &= \left(\frac{25t + 63}{25\sqrt{t(t+7)}} \right)' = \frac{1}{25} \left(\frac{25\sqrt{t(t+7)} - (25t + 63) \left(\frac{2t+7}{2\sqrt{t(t+7)}} \right)}{t(t+7)} \right) \\ &= \frac{1}{25} \left(\frac{50(t^2 + 7t) - (25t + 63)(2t + 7)}{2t(t+7)\sqrt{t(t+7)}} \right) = \frac{1}{25} \left(\frac{49t - 441}{2t(t+7)\sqrt{t(t+7)}} \right) \end{aligned}$$

$$F'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 9$$

BBT

t	3,24	9	$+\infty$
F'(t)	-	0	+
F(t)			

$$\text{Thay vào đặt ta có: } (3,24 + x^2) = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{144}{25} \Leftrightarrow x = 2,4m$$

Vậy để nhìn rõ nhất thì $AO = 2,4m$.

Câu 24: Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe hơn đa Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy



mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.



Lời giải

Trả lời: 30,5

Gọi x (triệu đồng) là số tiền mà doanh nghiệp A dự định giảm giá; $(0 \leq x \leq 4)$.

Khi đó:

Lợi nhuận thu được khi bán một chiếc xe là $31 - x - 27 = 4 - x$.

Số xe mà doanh nghiệp sẽ bán được trong một năm là $600 + 200x$.

Lợi nhuận mà doanh nghiệp thu được trong một năm là

$$f(x) = (4 - x)(600 + 200x) = -200x^2 + 200x + 2400.$$

Xét hàm số $f(x) = -200x^2 + 200x + 2400$ trên đoạn $[0; 4]$

Ta có: $f'(x) = -400x + 200$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -400x + 200 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = 2400; f(4) = -1600; f\left(\frac{1}{2}\right) = 2450$$

$$\max_{[0;4]} f(x) = 2450 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy giá mới của chiếc xe là 30,5 triệu đồng thì lợi nhuận thu được là cao nhất.

Câu 25: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 000 000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 50 000 đồng một tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Công ty đã tìm ra phương án cho thuê đạt lợi nhuận lớn nhất. Hỏi công ty cho thuê với giá bao nhiêu (nghìn đồng) cho mỗi căn hộ để đạt lợi nhuận lớn nhất?

Lời giải

Trả lời: 2250

Gọi x (nghìn đồng/tháng) $x > 0$ là giá tăng thêm sau khi nghiên cứu thị trường.

Khi đó : Giá bán một căn hộ là $2000 + x$ (nghìn đồng)

$\Rightarrow$ Số căn hộ bị bỏ trống là $\frac{x}{50}$ căn hộ

$$\Rightarrow \text{Số tiền công ty thuê được } T(x) = 2000 + x \left(50 - \frac{x}{50}\right)$$

Khảo sát hàm số $T(x)$ trên $0; +\infty$

$$\Rightarrow T'(x) = 10 - \frac{x}{25} \Rightarrow T'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 250.$$

Bảng biến thiên

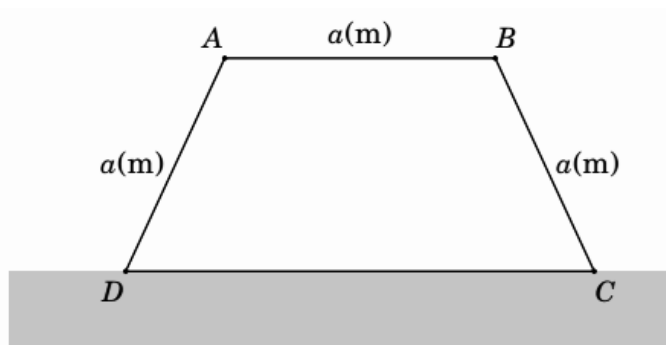


x	0	250	$+\infty$	
$T'(x)$		+	0	-
$T(x)$			101250	

Vậy thu nhập cao nhất công ty có thể đạt được trong 1 tháng là: $T = 101\,250\,000$.

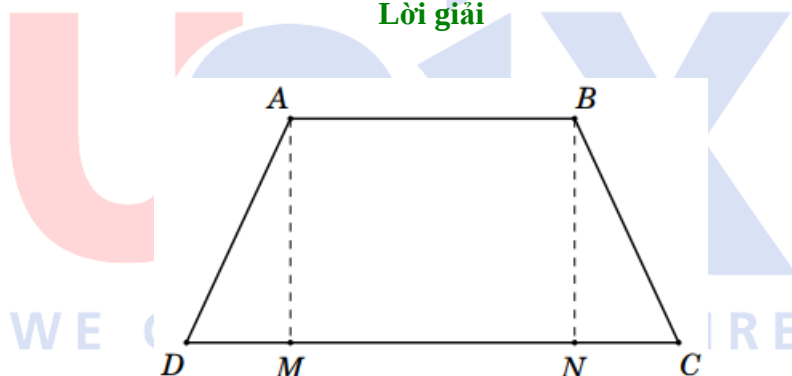
Câu 26: Một bác nông dân có ba tấm lưới B40, mỗi tấm dài a (m) và muốn rào một mảnh vườn dọc theo bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ dưới đây biết rằng bờ sông là đường thẳng CD không phải rào lưới.

Bác nông dân đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là $\frac{x\sqrt{3}a^2}{y} m^2$, với x, y là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tính $2x + y$.



Lời giải

Trả lời: 10



Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên CD

Đặt $x = MD$, ($0 < x < a$) suy ra $AM = \sqrt{AD^2 - MD^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$

Diện tích của mảnh vườn hình thang cân là $S(x) = \frac{(AB + CD)AM}{2} = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2}$.

Xét hàm số $f(x) = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2}$ trên khoảng ($0 < x < a$)

Đạo hàm $f'(x) = \frac{-2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \notin (0 < x < a) \\ x = \frac{a}{2} \in (0 < x < a) \end{cases}$

Bảng biến thiên hàm số $f(x)$ trên khoảng $(0; a)$



x	0	$\frac{a}{2}$	a
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	a^2	$\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$	0

Từ bảng biến thiên suy ra $\max_{(0;a)} f(x) = f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$

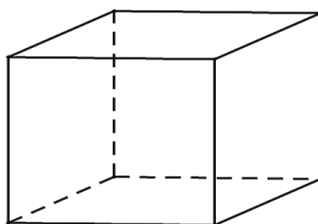
Bác nông dân có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4} \text{ m}^2$.

Suy ra $x = 3, y = 4$ nên $2x + y = 10$.

Câu 27: Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h = \frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m + n$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 11



Gọi chiều dài, chiều rộng của hộp là $2x$ và x ($x > 0$).

Khi đó, ta có thể tích của cái hộp là: $V = 2x^2 \cdot h \Rightarrow 2x^2 \cdot h = 48 \Leftrightarrow x^2 \cdot h = 24$

Do giá thành làm đáy và mặt bên hộp là 3, giá thành làm nắp hộp là 1 nên giá thành làm hộp là

$$L = 3(2x^2 + 2xh + 4xh) + 2x^2 = 8x^2 + 18xh$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm ta được:

$$L = 8x^2 + 18xh = 8x^2 + 9xh + 9xh \geq 3\sqrt{8x^2 \cdot 9xh \cdot 9xh} = 3\sqrt{648(x^2h)^2} = 216$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: } \begin{cases} 8x^2 = 9xh \\ x^2h = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9h}{8} \\ \frac{9^2}{8^2} \cdot h^3 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ h = \frac{8}{3} \end{cases}$$

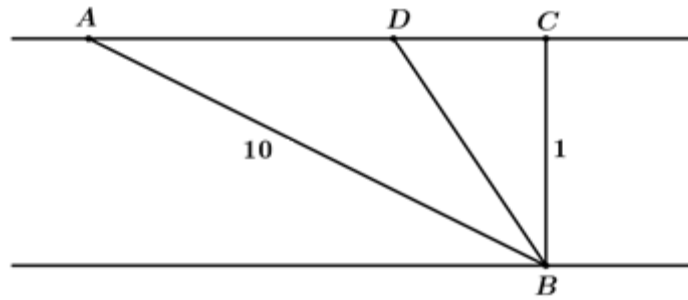
Vậy $m = 8, n = 3$ và $m + n = 11$.

Câu 28: Trong một bài thực hành huấn luyện quân sự có một tình huống chiến sĩ phải bơi qua sông để tấn công mục tiêu ở ngay phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 100m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một phần ba vận tốc chạy trên bộ. Biết dòng sông là thẳng, mục tiêu cách chiến sĩ 1km theo đường chim bay và chiến sĩ cách bờ bên kia 100m. Chiến sĩ phải bơi $a\sqrt{b}$ mét để đến được mục tiêu nhanh nhất. Tính tổng $a + b$.

Lời giải



Trả lời: 77



Gọi A là mục tiêu; B là vị trí chiến sỹ và BD là đường bơi của chiến sỹ.

Chọn một đơn vị độ dài là 100m suy ra $BC = 1$; $AB = 10$; $AC = \sqrt{100-1} = 3\sqrt{11}$.

Gọi vận tốc bơi của chiến sỹ là 1 đơn vị vận tốc thì vận tốc chạy của chiến sỹ là 3 đơn vị vận tốc. Gọi x là quãng đường chiến sỹ bơi suy ra $BD = x \Rightarrow CD = \sqrt{x^2-1}$.

Vậy quãng đường chiến sỹ chạy là $AD = AC - CD = 3\sqrt{11} - \sqrt{x^2-1}$.

Thời gian chiến sỹ đến được mục tiêu là: $t = \frac{3\sqrt{11} - \sqrt{x^2-1}}{3} + \frac{x}{1} = \sqrt{11} - \frac{1}{3}\sqrt{x^2-1} + x$.

Xét hàm $f(x) = \sqrt{11} - \frac{1}{3}\sqrt{x^2-1} + x$ có $f'(x) = 1 - \frac{1}{3} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}}{4} (tm) \\ x = -\frac{3\sqrt{2}}{4} (loai) \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	1	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$	10
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘ ↗		

Vậy thời gian chiến sỹ đến mục tiêu ngắn nhất khi $f(x)_{\min} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Vậy chiến sỹ phải bơi $\frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot 100 = 75\sqrt{2} (m)$.

Nên $a = 75$; $b = 2 \Rightarrow a + b = 77$.

Câu 29: Một công ty sản xuất và bán sản phẩm với chi phí sản xuất được cho bởi hàm: $C(x) = 500 + 40x$ và doanh thu được cho bởi hàm: $R(x) = 100x - 0.5x^2$ trong đó x là số lượng sản phẩm. Số lượng sản phẩm tối ưu mà công ty nên sản xuất và bán là nhiều?

Lời giải

Trả lời: 60

Lợi nhuận $P(x)$ được tính bằng doanh thu trừ đi chi phí, tức là: $P(x) = R(x) - C(x)$.

Với $R(x) = 100x - 0.5x^2$ và $C(x) = 500 + 40x$

Hàm lợi nhuận: $P(x) = (100x - 0.5x^2) - (500 + 40x) = -0.5x^2 + 60x - 500$

Giải phương trình $P'(x) = 0 \Leftrightarrow -x + 60 = 0 \Leftrightarrow x = 60$.



Từ bảng biến thiên ta kết luận được số lượng sản phẩm tối ưu mà công ty nên sản xuất là 60.

Câu 30: Ông A có một khu đất hình elip với độ dài trục lớn $10m$ và độ dài trục bé $8m$. Ông A muốn chia khu đất thành hai phần, phần thứ nhất là một hình chữ nhật nội tiếp elip dùng để xây bể cá cảnh và phần còn lại dùng để trồng hoa. Biết chi phí xây bể cá là 800.000 đồng trên $1m^2$ và chi phí trồng hoa là 900.000 đồng trên $1m^2$. Hỏi ông A có thể thiết kế xây dựng như trên với tổng chi phí thấp nhất là bao nhiêu triệu đồng (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Trả lời: 53

Theo đề ra, ta có $\begin{cases} 2a = 10 \\ 2b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \end{cases}$.

Khi đó, elip có dạng $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Đặt chiều dài hình chữ nhật là $2x$ ($x > 0$), chiều rộng hình chữ nhật là $2y$ ($y > 0$).

Tổng chi phí ông A phải trả là

$$T = 0,8S_{HCN} + 0,9(S_{elip} - S_{HCN}) = 0,9S_{elip} - 0,1S_{HCN} = 0,9\pi \cdot 5 \cdot 4 - 0,1 \cdot 2x \cdot 2y = 18\pi - 0,4xy$$

$$\text{Mặt khác } y = \sqrt{16 - \frac{16x^2}{25}}.$$

$$\text{Do đó } T = 18\pi - 0,4x \cdot \sqrt{16 - \frac{16x^2}{25}}.$$

Khảo sát hàm số trên khoảng $(0; 5)$, ta được $\min_{(0;5)} T = 53$.

Câu 31: Một con cá hồi bơi ngược dòng nước để vượt một khoảng cách là $300km$. Vận tốc dòng nước là $5(km/h)$. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v(km/h)$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$ (trong đó c là hằng số dương, E được tính bằng đơn vị Jun). Cá bơi ngược dòng quãng đường $300km$ trong khoảng thời gian t với vận tốc bằng bao nhiêu để năng lượng tiêu hao là thấp nhất?

Lời giải

Trả lời: 7,5

Vận tốc khi cá bơi ngược dòng sẽ là $v - 5(km/h)$, (với $v > 5$).

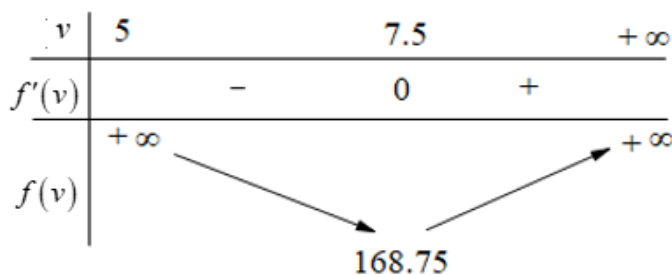
$$\text{Thời gian để cá bơi quãng đường } 300km \text{ là } t = \frac{300}{v-5}(h).$$

$$\text{Năng lượng tiêu hao là: } E(v) = 300c \frac{v^3}{v-5} (J).$$

Do $c > 0 \Rightarrow E(v)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $f(v) = \frac{v^3}{v-5}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$\text{Ta có: } f'(v) = \frac{3v^2(v-5) - v^3}{(v-5)^2} = \frac{2v^3 - 15v^2}{(v-5)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ v = 7.5 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:



Vậy để năng lượng tiêu hao là thấp nhất thì vận tốc là $7.5(km/h)$.

Câu 32: Anh Hà dự định làm một cái thùng đựng dầu hình trụ bằng sắt có nắp đáy thể tích $10 m^3$. Chi phí làm mỗi m^2 đáy là 400 ngàn đồng, mỗi m^2 nắp là 200 ngàn đồng, mỗi m^2 mặt xung quanh là 300 ngàn đồng. Để chi phí làm thùng là ít nhất thì anh Hà cần chọn chiều cao của thùng là (Xem độ dày của tấm sắt làm thùng là không đáng kể, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 2,34

Gọi bán kính đáy của hình trụ là $R, R > 0$. Ta có

$$V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{10}{\pi R^2}.$$

Suy ra chi phí (đơn vị ngàn đồng) làm thùng

$$C = \pi R^2 \cdot 400 + \pi R^2 \cdot 200 + 2\pi R h \cdot 300$$

$$= 600 \left(\pi R^2 + \frac{10}{R} \right).$$

$$C' = 600 \left(2\pi R - \frac{10}{R^2} \right); C' = 0 \Leftrightarrow 2\pi R - \frac{10}{R^2} = 0 \Leftrightarrow R^3 = \frac{5}{\pi} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$$

Bảng biến thiên

x	0	$\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$	$+\infty$
C'	—	0	+
C	$+\infty$	$1800\sqrt[3]{25\pi}$	$+\infty$

$$\text{Đến đến } \min_{(0;+\infty)} C = 1800\sqrt[3]{25\pi} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}.$$

$$\text{Vậy để chi phí nhỏ nhất thì chiều cao của hình trụ là } h = \frac{10}{\sqrt[3]{25\pi}} \approx 2,34 m.$$

Câu 33: Người ta muốn mạ vàng cho một cái hộp có đáy hình vuông không nắp có thể tích là 4 lít Giả sử độ dày của lớp mạ tại mọi nơi trên mặt ngoài hộp là như nhau. Tìm chiều cao của cái hộp đó để lượng vàng dùng mạ là ít nhất.

Lời giải

Trả lời: 1

Gọi x là cạnh của đáy hộp, h là chiều cao của hộp, S_x là diện tích phần hộp cần mạ. $x, h > 0$.

Khi đó, khối lượng vàng dùng mạ tỉ lệ thuận với S_x .



Ta có : $S(x) = x^2 + 4xh$

Thể tích cái hộp : $V = x^2h = 4 \Rightarrow h = \frac{4}{x^2}$.

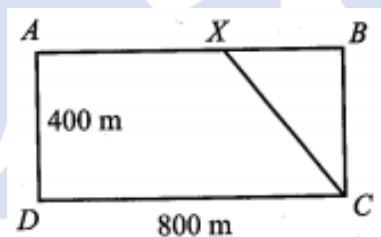
Ta suy ra : $S(x) = x^2 + \frac{16}{x}$.

$S'(x) = 2x - \frac{16}{x^2}$, $S'(x) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 2$. Khi đó ta có BBT

$S(x)$ đạt GTNN khi chiều dài cạnh đáy $x = 2$.

Vậy chiều cao của cái hộp là : $h = \frac{4}{2^2} = 1$.

Câu 34: Một vận động viên thể thao hai môn phối hợp luyện tập với một bể bơi hình chữ nhật rộng 400 m , dài 800 m



Vận động viên chạy phối hợp với bơi như sau: Xuất phát từ điểm A , chạy đến điểm X và bơi từ điểm X đến điểm C (Hình vẽ). Hỏi nên chọn điểm X cách A gần bằng bao nhiêu mét để vận động viên đến C nhanh nhất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? Biết rằng vận tốc chạy là 30 km/h, vận tốc bơi là 6 km/h.

Lời giải

Trả lời: 718

Đặt $BX = x$ (km), ta có: $AX = 0,8 - x$ (km);

$$XC = \sqrt{(0,4)^2 + x^2} = \sqrt{0,16 + x^2} \text{ (km)}.$$

Xét hàm số: $T(x) = \frac{0,8 - x}{30} + \frac{\sqrt{0,16 + x^2}}{6} = \frac{1}{30} (0,8 - x + 5\sqrt{0,16 + x^2})$ ($0 \leq x < 0,8$).

Ta có: $T'(x) = \frac{1}{30} \left(-1 + \frac{5x}{\sqrt{0,16 + x^2}} \right)$, $T'(x) = 0 \Rightarrow 5x = \sqrt{0,16 + x^2}$.

Bình phương hai vế phương trình ta được $0,16 + x^2 = 25x^2 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{6}}{30}$. Vì $0 < x < 0,8$ nên $x = \frac{\sqrt{6}}{30}$.

Bảng biến thiên của hàm số $T(x)$ là:



x	0	$\frac{\sqrt{6}}{30}$	0,8
$T'(x)$	-	0	+
$T(x)$	$\frac{7}{75}$	$T\left(\frac{\sqrt{6}}{30}\right)$	$\frac{\sqrt{5}}{15}$

Vậy $T(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $T\left(\frac{\sqrt{6}}{30}\right)$ khi $AX = 0,8 - \frac{\sqrt{6}}{30} \approx 0,718(\text{ km}) = 718(\text{ m})$.

Câu 35: Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

$$C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500.$$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét.

Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa.

Hỏi lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm trong một ngày là bao nhiêu nghìn đồng?

Câu 1:

Lời giải

Trả lời: 1200

Số tiền thu về khi bán x mét vải lụa là: $220x$.

Lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa là:

$$L(x) = 220x - (x^3 - 3x^2 - 20x + 500) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$$

Xét hàm số $L(x) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$ với $x \in [1; 18]$

$$L'(x) = -3x^2 + 6x + 240; L'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \in [1; 18] \\ x = -8 \notin [1; 18] \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	1	10	18
y	-258	1200	-1040

Vậy hộ làm nghề dệt này thu được lợi nhuận tối đa trong một ngày là 1200 nghìn đồng khi sản xuất 10 mét vải lụa trong một ngày.

Câu 36: Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật Logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}, t \geq 0$, trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{-5000(1 + 5e^{-t})'}{(1 + 5e^{-t})^2} = \frac{25000e^{-t}}{(1 + 5e^{-t})^2}. \text{ Tốc độ bán hàng là lớn nhất khi } f'(t) \text{ lớn nhất.}$$



Đặt $h(t) = \frac{25000e^{-t}}{(1+5e^{-t})^2}$ có $h'(t) = \frac{-25000e^{-t}(1+5e^{-t})^2 - 2 \cdot (-5e^{-t}) \cdot (1+5e^{-t}) \cdot 25000e^{-t}}{(1+5e^{-t})^4}$

$$= \frac{-25000e^{-t}(1+5e^{-t})(1+5e^{-t}-10e^{-t})}{(1+5e^{-t})^4} = \frac{-25000e^{-t}(1-5e^{-t})}{(1+5e^{-t})^3}$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-25000e^{-t}(1-5e^{-t})}{(1+5e^{-t})^3} = 0 \Leftrightarrow 1-5e^{-t} = 0 \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow t = \ln 5 \text{ (thỏa mãn)}$$

Ta có bảng biến thiên với $t \in [0; +\infty)$:

t	0	$\ln 5$	$+\infty$
$h'(t)$		0	
		+	-
$h(t)$	$\frac{6250}{9}$	1250	0

Vậy sau khi phát hành khoảng $\ln 5 \approx 1,6$ năm thì thị tốc độ bán hàng là lớn nhất.

Câu 37: Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức: $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100+t^2}$ (con), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

Lời giải

Xét hàm số $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100+t^2}$ ($t > 0$).

Ta có: $N'(t) = \frac{100 \cdot (100+t^2) - 100t \cdot 2t}{(100+t^2)^2} = \frac{100 \cdot (100-t^2)}{(100+t^2)^2}$.

Khi đó, với $t > 0$, $N'(t) = 0 \Leftrightarrow 100-t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 100 \Leftrightarrow t = 10$.

Bảng biến thiên của hàm số $N(t)$ như sau:

t	0	10	$+\infty$
$N'(t)$		0	
		+	-
$N(t)$	1000	1005	1000

Căn cứ bảng biến thiên, ta thấy:

Trên khoảng $(0; +\infty)$ hàm số $N(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 1005 tại $t = 10$.

Vậy số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng là 1005 con.



Câu 38: Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng đến tốc độ của không khí đi vào khí quản. Tốc độ của không khí đi vào khí quản khi ho được cho bởi công thức $V = k(R - r)r^2$; $0 \leq r < R$, trong đó k là hằng số, R là bán kính bình thường của khí quản, r là bán kính khí quản khi ho. Hỏi bán kính của khí quản khi ho bằng bao nhiêu so với bán kính khí quản lúc bình thường thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất?

Lời giải

Ta có: $V' = 2kRr - 3kr^2$. Nhận xét $V' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = \frac{2R}{3} \end{cases}$.

Ta có $f(0) = 0$; $f\left(\frac{2R}{3}\right) = \frac{4kR^3}{27}$

Vậy bán kính của khí quản khi ho bằng $\frac{2}{3}$ bán kính khí quản lúc bình thường thì tốc độ không khí đi vào là lớn nhất.

Câu 39: Người quản lí của một khu chung cư có 100 căn hộ cho thuê nhận thấy rằng tất cả các căn hộ sẽ có người thuê nếu giá thuê một căn hộ là 8 triệu đồng một tháng. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê căn hộ thêm 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Người quản lí nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất?

Lời giải

Gọi x là số lần tăng giá 100 nghìn đồng ($x > 0$). Khi đó, số căn được cho thuê là: $100 - x$ (căn)

Tổng số tiền thu được trong một tháng là:

$$(100 - x)(8000000 + 100000x) = 100000(100 - x)(80 + x) = 100000(-x^2 + 20x + 8000) \\ = 100000[-(x - 10)^2 + 8100] \leq 810000000, \forall x > 0$$

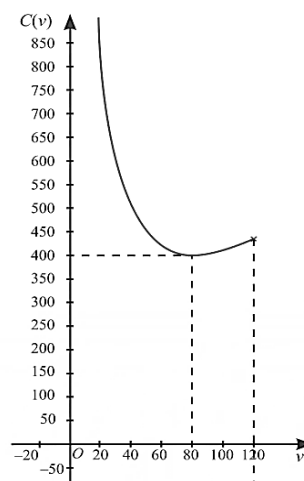
Dấu "=" xảy ra khi $x = 10$ (thỏa mãn)

Vậy để thu được doanh thu là lớn nhất thì người quản lí nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là: $8000000 + 100000 \cdot 10 = 9000000$ (đồng).

Câu 40: Giả sử chi phí tiền xăng C (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình v (km/h) theo công thức:

$$C(v) = \frac{16000}{v} + \frac{5}{2}v \quad (0 < v \leq 120)$$

Để biểu diễn trực quan sự thay đổi của $C(v)$ theo v , người ta đã vẽ đồ thị hàm số $C(v)$ như hình bên.



Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là bao nhiêu để tiết kiệm tiền xăng nhất?

Lời giải



Tập xác định: $D = (0; 120]$.

$$\text{Đạo hàm } C'(v) = -\frac{16000}{v^2} + \frac{5}{2} = \frac{5(v-80)(v+80)}{2v^2} = 0 \Leftrightarrow v = -80 \text{ (loại) hoặc } v = 80.$$

Trên khoảng $(0; 80)$, $C'(v) < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

Trên khoảng $(80; 120)$, $C'(v) > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng này.

Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $v = 80$, $C_{CT} = C(80) = 400$.

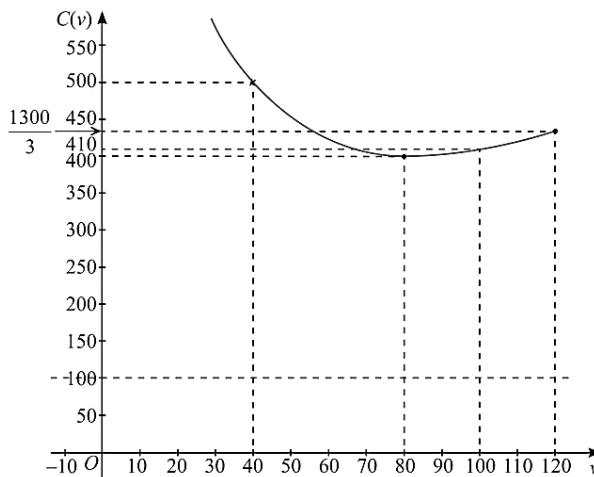
Giới hạn vô cực và tiệm cận: $\lim_{v \rightarrow 0^+} C(v) = \lim_{v \rightarrow 0^+} \left(\frac{16000}{v} + \frac{5}{2}v \right) = +\infty$ nên đường thẳng $v = 0$ là tiệm cận

đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

v	0	80	120
$C'(v)$		0	
$C(v)$	$+\infty$	400	$+\infty$

Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $(80; 400)$ và đi qua các điểm $(40; 500)$, $(100; 410)$, $\left(120; \frac{1300}{3}\right)$ như hình.



Quan sát đồ thị hàm số, ta nhận thấy hàm số đạt GTNN khi $v = 80$ và GTNN là 400.

Như vậy, để tiết kiệm tiền xăng nhất, tài xế nên chạy xe với tốc độ trung bình là 80 km/h.

Câu 41: Một công ty kinh doanh bất động sản có 20 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng/1 tháng thì tất cả các căn hộ đều có người thuê. Nhưng cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 200 nghìn đồng/1 tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi công ty nên cho thuê mỗi căn hộ bao nhiêu tiền một tháng để tổng số tiền thu được là lớn nhất?

Lời giải

Giả sử giá thuê mỗi căn hộ là x triệu đồng/1 tháng và số căn hộ cho thuê là y .

Khi đó tổng số tiền thu được sẽ là $x.y$.



Theo đề bài, ta có: $y = 20 - 5(x - 2)$ (vì cứ mỗi lần tăng giá thuê mỗi căn hộ thêm 200 nghìn đồng/1 tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống).

Do đó ta cần tìm giá trị của x sao cho hàm số $f(x) = x[20 - 5(x - 2)]$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có: $f'(x) = 30 - 10x = 0 \Rightarrow 30 - 10x = 0 \Rightarrow x = 3$

Cuối cùng ta kiểm tra xem điểm cực này có phải là điểm cực đại hay không:

Xác định khoảng: $[-\infty; 3], [3; +\infty]$

Chọn $x_1 = 2 \Rightarrow f(x) = 10$, chọn $x_2 = 4 \Rightarrow f(x) = -10$

Vì đạo hàm dương với mọi $x < 3$ là âm với mọi $x > 3 \Rightarrow$ hàm số cực đại tại $x = 3$

Vì vậy, công ty nên cho thuê mỗi căn hộ với giá 3 triệu đồng/1 tháng để tổng số tiền thu được là lớn nhất.

Câu 42: Một con cá hồi bơi ngược dòng nước để vượt một khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là 6 (km/h). Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$ (trong đó c là hằng số dương, E được tính bằng đơn vị Jun). Cá bơi ngược dòng quãng đường 300 km trên trong khoảng thời gian t với vận tốc bằng bao nhiêu để năng lượng tiêu hao là thấp nhất?

Lời giải

Vận tốc khi cá bơi ngược dòng sẽ là $v - 6$ (km/h).

Thời gian để bơi quãng đường 300 km là $t = \frac{300}{v-6}$ (h).

Năng lượng tiêu hao là $E(v) = 300c \frac{v^3}{v-6}$ (J).

Do $c > 0 \Rightarrow E(v)_{\min} \Leftrightarrow \frac{v^3}{v-6} = (f(v))_{\min}$.

Với $v > 6$ ta có $f'(v) = \frac{3v^2(v-6) - v^3}{(v-6)^2} = \frac{2v^3 - 18v}{(v-6)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ v = 9. \end{cases}$

Lập bảng biến thiên ta nhận $v = 9$ (do $v > 6$).

Vậy để năng lượng tiêu hao là thấp nhất thì vận tốc là 9 (km/h).

Câu 43: Thể tích V của 1 (kg) nước ở nhiệt độ t (t nằm giữa 0°C đến 30°C) được cho bởi công thức

$$V = 999,87 - 0,06426t + 0,0085043t^2 - 0,0000679t^3 \text{ (m}^3\text{)}.$$

Ở nhiệt độ bao nhiêu độ C thì nước có khối lượng riêng lớn nhất?

Lời giải

Ta có đạo hàm của thể tích:

$$V'(t) = -0,06424 + 2 \cdot 0,0085043t - 3 \cdot 0,0000679t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 79,53138 \notin (0^\circ; 30^\circ) \\ t \approx 3,9665. \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên



t	0	3,9665	30
$V'(t)$	—	0	+
$V(t)$	$+\infty$	V_{min}	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, khối lượng riêng lớn nhất của vật khi thể tích nhỏ nhất lúc vật có nhiệt độ xấp xỉ gần bằng 4°C .

Câu 44: Một công ty đánh giá rằng sẽ bán được N lô hàng nếu chi hết số tiền là x (triệu đồng) vào việc quảng cáo. Biết rằng N và x liên hệ với nhau bằng biểu thức $N(x) = -x^2 + 30x + 6, 0 \leq x \leq 30$. Hãy tìm số lô hàng lớn nhất mà công ti có thể bán sau đợt quảng cáo?

Lời giải

Ta có $N(x) = -x^2 + 30x + 6 \Rightarrow N'(x) = -2x + 30 \Rightarrow N'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 15$.

$$\text{Đồng thời, ta cũng có } \begin{cases} N(0) = 6 \\ N(15) = 231 \Rightarrow \max_{x \in [0; 30]} N(x) = 231 \Leftrightarrow x = 15. \\ N(30) = 6 \end{cases}$$

Vậy nếu công ti dành 15 triệu cho việc quảng cáo thì công ti sẽ bán được nhiều nhất là 231 lô hàng.

Câu 45: Công ti truyền hình cáp Vista hiện có 100000 thuê bao. Mỗi thuê bao đang trả cước thuê bao 40\$/ tháng. Một cuộc khảo sát cho thấy cứ mỗi lần giảm 0,25\$ cước thuê bao, công ti có thể có thêm 1000 thuê bao. Để doanh thu thu được là tối đa, công ti cần xác định mức cước thuê bao mỗi tháng là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi x là số lần giảm 0,25\$. Cước thuê bao hàng tháng lúc này là $40 - 0,25x$ với $0 \leq x \leq 160$ (do mức cước không thể âm), và số thuê bao mới là $1000x$.

Do đó, tổng số thuê bao là $100000 + 1000x$.

Hàm doanh thu được cho bởi $R = (\text{số thuê bao}) \times (\text{cước mỗi thuê bao trả})$

$$R = (100000 + 1000x)(40 - 0,25x) = 1000(100 + x)(40 - 0,25x) = 1000(4000 + 15x - 0,25x^2)$$

Đạo hàm $R' = 0$, ta được $R' = 1000(15 - 0,5x) = 0 \Leftrightarrow x = 30$.

Vì tập xác định của R là khoảng đóng $[0; 160]$ nên R đạt cực đại tại $x = 30$ hoặc tại các điểm đầu mút của đoạn $[0; 160]$.

Ta có: $R(0) = 4000000$; $R(30) = 4225000$; $R(160) = 0$

Vậy doanh thu tối đa khi $x = 30$. Điều này tương ứng với 30 lần giảm 0,25\$, tức là cước thuê bao hàng tháng là $40\$ - 7,5\$ = 32,5\$$.

Số thuê bao tại mức cước này là $100000 + 30 \cdot (1000) = 130000$.

Câu 46: Hằng ngày mực nước của hồ thủy điện ở miền Trung lên và xuống theo lượng nước mưa, và các suối nước đổ về hồ. Từ lúc 8h sáng, độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống theo thời gian t (giờ) trong

ngày cho bởi công thức $h(t) = 24t + 5t^2 - \frac{t^3}{3}$. Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi

xả nước theo quy định trước 5 giờ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước mấy giờ. Biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước.

Lời giải



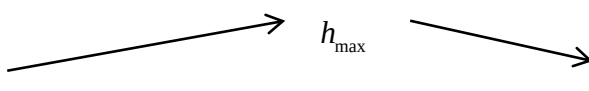
Trả lời: 15

Ta có:

$$h'(t) = 24 + 10t - t^2$$

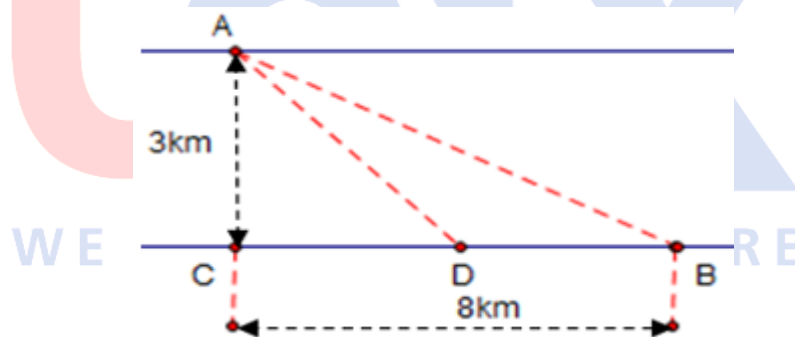
$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow 24 + 10t - t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \text{ (loại)} \\ t = 12 \text{ (t/m)} \end{cases}$$

BBT:

t	8	12	24	$+\infty$
$h'(t)$		+	0	-
$h(t)$				

Vậy để mực nước lên cao nhất thì phải mất 12 giờ. Vậy phải thông báo cho dân di dời vào 15 giờ chiều cùng ngày.

Câu 47: Anh An muốn di chuyển từ vị trí A đến điểm B càng nhanh càng tốt (như hình vẽ). Để di chuyển từ vị trí A đến điểm B anh An có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo thuyền trực tiếp đến B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D nằm giữa B và C sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền với vận tốc 6km/h , chạy với vận tốc 8km/h , $AC = 3\text{km}$, $BC = 8\text{km}$ và vận tốc dòng nước là không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền của anh An. Tìm khoảng thời gian nhanh nhất (đơn vị: giờ) để anh An đến B (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

Trả lời: 1,33

Đặt $CD = x$ (km) ($0 \leq x \leq 8$), $AD = \sqrt{9 + x^2}$

Giả sử để đi từ A đến B anh An bơi thuyền từ A tới D sau đó chạy đến B .

Thời gian bơi thuyền từ A tới D là: $\frac{\sqrt{9+x^2}}{6}$, thời gian đi từ D tới B là: $\frac{8-x}{8}$.

Tổng thời gian là: $f(x) = \frac{\sqrt{9+x^2}}{6} + \frac{8-x}{8}$;

$$f'(x) = \frac{x}{6\sqrt{9+x^2}} - \frac{1}{8}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}} \in [0; 8].$$



x	0	$\frac{9}{\sqrt{7}}$	8	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$\frac{3}{2}$		$\frac{\sqrt{73}}{6}$	
		$1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$		

Từ bảng biến thiên, ta có $\min_{[0;8]} f(x) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$.

Vậy thời gian nhanh nhất để anh An đi từ A đến B là $1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1,33$.

Câu 48: Một hãng điện thoại đưa ra quy luật bán buôn cho từng đại lí, đó là đại lí càng nhập nhiều chiếc điện thoại của hãng thì giá bán buôn một chiếc điện thoại càng giảm. Cụ thể, nếu đại lí mua x điện thoại thì giá tiền của mỗi điện thoại là $6000 - 3x$ (nghìn đồng), $x \in \mathbb{N}^*$, $x < 2000$. Đại lí nhập cùng một lúc bao nhiêu chiếc điện thoại thì hãng có thể thu về nhiều tiền nhất từ đại lí đó?

Lời giải

Trả lời: 1000

Số tiền hãng thu được khi đại lí nhập x chiếc điện thoại là $f(x) = x(6000 - 3x)$.

Ta có: $f'(x) = -6x + 6000$. Khi đó, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1000$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ là:

x	0	1000	2000
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	3000000	0

Vậy đại lí nhập cùng một lúc 1000 chiếc điện thoại thì hãng có thể thu nhiều tiền nhất từ đại lí đó với 3 000 000 000 (đồng).

Câu 49: Sau khi phát hiện một dịch bệnh, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày phát hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = -t^3 + 45t^2 + 600t$, $t \in \mathbb{N}$, $t \leq 30$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0; 30]$ thì $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Trong 30 ngày đầu tiên, có bao nhiêu ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn hơn 1200?

Lời giải

Trả lời: 1200

Ta có $f(t) = -t^3 + 45t^2 + 600t \Rightarrow f'(t) = -3t^2 + 90t + 600$.

Tốc độ truyền bệnh lớn hơn 1200 nên

$$f'(t) > 1200 \Leftrightarrow -3t^2 + 90t + 600 > 1200 \Leftrightarrow -3t^2 + 90t - 600 > 0 \Leftrightarrow 10 < t < 20.$$

Vậy có 9 ngày tốc độ truyền bệnh lớn hơn 1200.

Câu 50: Một bài báo trong tạp chí xã hội học phát biểu rằng nếu một chương trình chăm sóc sức khỏe đặc biệt cho người già được khởi xướng, thì t năm sau khi nó được khởi động, n ngàn người già có thể trực tiếp nhận được các phúc lợi, trong đó $n = \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 32t$ ($0 \leq t \leq 12$). Với giá trị nào của t thì số người nhận phúc lợi tối đa là bao nhiêu?

Lời giải



Đạo hàm $n'(t) = 0$ ta có $n'(t) = t^2 - 12t + 32 = 0 \Leftrightarrow (t-4)(t-8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 8. \end{cases}$

Vì tập xác định của n là một khoảng đóng $[0;12]$ nên n đạt cực đại tuyệt đối tại $t = 0, t = 4, t = 8$ hoặc $t = 12$:

$$n(0) = \frac{0^3}{3} - 6(0^2) + 32 \cdot 0 = 0; n(4) = \frac{4^3}{3} - 6(4^2) + 32 \cdot 4 = \frac{160}{3}$$

$$n(8) = \frac{8^3}{3} - 6(8^2) + 32 \cdot 8 = \frac{128}{3}; n(12) = \frac{12^3}{3} - 6(12^2) + 32 \cdot 12 = \frac{288}{3} = 96$$

Do đó n đạt cực đại khi $t = 12$ (năm).

Câu 51: Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s = -t^3 + 6t^2 + 17t$, với $t(s)$ là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $s(m)$ là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng thời gian 8 giây đầu tiên, vận tốc $v(m/s)$ của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng?

Lời giải

Ta có : $v = s' = -3t^2 + 12t + 17$

Ta đi tìm giá trị lớn nhất của $v = -3t^2 + 12t + 17$ trên khoảng $(0;8)$

Mặt khác: $v' = -6t + 12 = 0 \Rightarrow t = 2$

Bảng biến thiên:

t	0	2	8
$V'(t)$	+	0	-
$V(t)$		↗ 29 ↘	

Vậy vận tốc lớn nhất trong khoảng 8 giây đầu tiên là: 29 (m/s).

Câu 52: Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng tennis. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ. Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí hoạt động là thấp nhất?

Lời giải

Gọi số máy móc công ty sử dụng để sản xuất là $x (x \in \mathbb{N}, x > 0)$.

Thời gian cần để sản xuất hết 8000 quả bóng là: $\frac{8000}{30x}$.

Tổng chi phí để sản xuất là: $P(x) = 200x + \frac{8000}{30x} \cdot 192 = 200x + \frac{51200}{x}$

Ta có: $P'(x) = 200 - \frac{51200}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 256 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ x = -16(\text{loại}) \end{cases}$

Bảng biến thiên:



x	0	16	$+\infty$
$P'(x)$		0	
	–		+
$P(x)$	$+\infty$	6400	$+\infty$

Vậy công ty nên sử dụng 16 máy để chi phí hoạt động là thấp nhất.

Câu 53: Một nhóm các nhà nghiên cứu vi sinh vật học đã tiến hành khảo nghiệm tại một làng quê địa phương với đối tượng là vi khuẩn Ecoli gây dịch tả ở người. Các nhà nghiên cứu đã tính toán được mô hình lây lan của chúng được biểu diễn theo hàm số $P(t) = -2t^3 + 24t^2 + 5$, $0 \leq t \leq 14$, trong đó P là số người bị nhiễm bệnh (đơn vị: chục người) và t là thời gian (tuần). Biết đạo hàm $P'(t)$ biểu thị tốc độ lây lan của vi khuẩn (còn được gọi là tốc độ truyền bệnh). Kể từ tuần thứ bao nhiêu thì tốc độ lây lan của vi khuẩn bắt đầu giảm.

Lời giải

$$P'(t) = -6t^2 + 48t$$

$$P''(t) = -12t + 48 = 0 \Leftrightarrow t = 4.$$

$$P'(0) = 0; P'(4) = 96; P'(14) = -504.$$

t	0	4	14
$P''(t)$	+	0	–
$P'(t)$	0	96	–504

Vậy kể từ tuần thứ 5 trở đi, tốc độ lây lan của vi khuẩn bắt đầu giảm.

Câu 54: Biết khối lượng q (kg) của quả vải thiều Lục Ngạn mà cửa tiệm hoa quả bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán p (nghìn đồng/kg) theo công thức $p = 56 - \frac{1}{3}q$. Doanh thu từ việc bán mặt hàng này ở cửa tiệm được tính theo công thức $D = p.q$. Chủ cửa hàng thấy rằng, ở giai đoạn đầu nếu giảm giá thì doanh thu sẽ tăng, nhưng đến mức giá lớn hơn p_0 thì doanh thu bắt đầu giảm. Tìm giá trị p_0 .

Lời giải

$$p = 56 - \frac{1}{3}q \Leftrightarrow q = 168 - 3p.$$

$$D = p.q = p.(168 - 3p) = -3p^2 + 168p.$$

$$D = -3p^2 + 168p$$

$$D' = -6p + 168 = 0 \Leftrightarrow p = 28.$$

$$D(28) = 2352$$



p	0	28	56
$D'(p)$	+	0	-
$D(p)$	0	2352	0

Vậy $p_0 = 28$.

Câu 55: Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Cứ sau mỗi vụ, người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá cân nặng $P(n) = 540 - 18n$ (gam). Vậy thả cá từ bao nhiêu con trở đi trên một đơn vị diện tích của mặt hồ thì sản lượng cá giảm?

Lời giải

Sau mỗi vụ, trung bình sản lượng cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ là $f(n) = nP(n) = 540n - 18n^2$ (gam)

Ta có $f'(n) = 540 - 36n = 0 \Leftrightarrow n = 15$

BBT

n	0	15	$+\infty$	
$f'(n)$		+	0	-
$f(n)$			$f(15)$	

Thả cá từ 16 con trở đi trên một đơn vị diện tích của mặt hồ thì sản lượng cá giảm.

Câu 56: Một công ty bất động sản có 150 căn hộ cho thuê, biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng mỗi tháng thì mỗi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 5 căn hộ bị bỏ trống. Thu nhập của công ty bắt đầu giảm từ lần tăng giá thứ mấy?

Lời giải

Gọi số lần tăng giá tiền cho thuê mỗi căn hộ một tháng để công ty thu được thu nhập cao nhất là x (lần) ($0 \leq x \leq 30$; x là số nguyên).

Số tiền cho thuê mỗi căn hộ là $2 + 0,1x$ (triệu đồng)

Số căn hộ mỗi tháng được thuê là $150 - 5x$ (căn hộ)

Thu nhập của công ty đạt được là $(2 + 0,1x)(150 - 5x)$

Đặt $f(x) = (2 + 0,1x)(150 - 5x)$ là thu nhập của công ty.

$$f'(x) = 0,1 \cdot (150 - 5x) - 5(2 + 0,1x) = 15 - 0,5x - 10 - 0,5x = 5 - x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$$



x	0	5	30	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			$f(5)$	
	$f(0)$			$f(30)$

Do hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;5)$, nên thu nhập của công ty sẽ bắt đầu giảm từ lần tăng giá thứ 6.

Câu 57: Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải từ một nhà máy. Người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là $C(x) = \frac{x^2 - mx + 9}{9x - 9m}$ (tỉ đồng). Tính tổng các giá trị nguyên của tham số m để chi phí cần bỏ ra giảm liên tục mà vẫn loại bỏ được chất gây ô nhiễm lớn 50% và nhỏ hơn 53%.

Lời giải

Xét hàm số $y = C(x) = \frac{x^2 - mx + 9}{9x - 9m}$; $50 < x < 53$.

$$\Rightarrow y' = \frac{9x^2 - 18mx + 9m^2 - 81}{(9x - 9m)^2}.$$

Để chi phí cần bỏ ra giảm liên tục mà vẫn loại bỏ được chất gây ô nhiễm lớn 50% và nhỏ hơn 53%,

thì $y' \leq 0, \forall x \in (50;53)$. Suy ra $\begin{cases} 9x^2 - 18mx + 9m^2 - 81 \leq 0, \forall x \in (50;53) & (1) \\ 9x - 9m \neq 0, \forall x \in (50;53) & (2) \end{cases}$

Từ (1): gọi $g(x) = 9x^2 - 18mx + 9m^2 - 81 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 3 \\ x = m + 3 \end{cases}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$m-3$			$m+3$			$+\infty$
$g(x)$		+	0	-	0	+		

Từ bảng xét dấu $9x^2 - 18mx + 9m^2 - 81 \leq 0, \forall x \in (50;53) \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 \leq 50 \\ m+3 \geq 53 \end{cases} \Leftrightarrow 50 \leq m \leq 53 \quad (3).$

Từ (2): $9x - 9m \neq 0, \forall x \in (50;53) \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 50 \\ m \geq 53 \end{cases} \quad (4).$

Từ (3) và (4) ta có được $m = 50; m = 53$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Tổng các giá trị của m là 103.

Câu 58: Giả sử doanh số bán hàng (đơn vị triệu đồng) của một sản phẩm mới trong vòng một số năm nhất định tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t) = 500(t^2 + me^{-t})$, với $t \geq 0$ là thời gian tính bằng năm kể từ khi phát hành sản phẩm mới, $m \leq 0$ là tham số. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Biết rằng tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm, khi đó giá trị nhỏ nhất của m bằng bao nhiêu?



Lời giải

Ta có $f'(t) = 500(2t - me^{-t})$.

$$f''(t) = 500(2 + me^{-t})$$

Tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm. $\Leftrightarrow f'(t)$ là hàm số đồng biến trên $[0;10] \Leftrightarrow f''(t) \geq 0, \forall t \in [0;10]$

$$\Leftrightarrow 500(2 + me^{-t}) \geq 0, \forall t \in [0;10]$$

$$\Leftrightarrow 2 + me^{-t} \geq 0, \forall t \in [0;10]$$

$$\Leftrightarrow me^{-t} \geq -2, \forall t \in [0;10]$$

$$\Leftrightarrow m \geq -2e^t, \forall t \in [0;10]$$

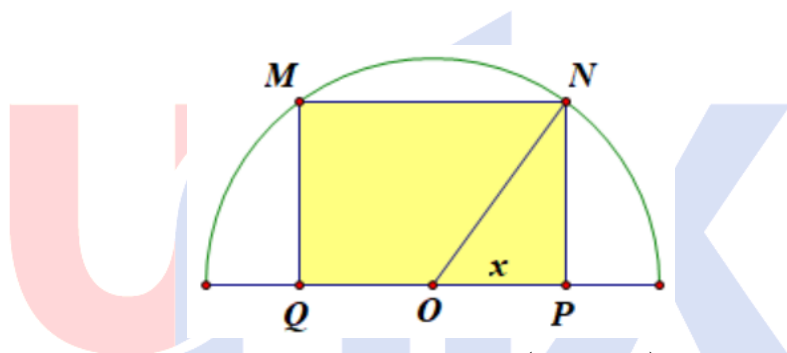
$$\Leftrightarrow m \geq -2e^0 = -2 \text{ (do hàm số } y = -2e^t \text{ nghịch biến trên } [0;10]).$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của m là -2 .

Câu 59: Từ một miếng tôn dạng nửa hình tròn có bán kính $R = 4$ dm, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật. Hỏi diện tích lớn nhất của hình chữ nhật có thể cắt được là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 16



Gọi hình chữ nhật cần tính diện tích là $MNPQ$ có $OP = x$ ($0 < x < 4$), $ON = 4$.

Khi đó diện tích của hình chữ nhật $MNPQ$ là: $S = MN \cdot NP = 2x\sqrt{16 - x^2}$.

Xét hàm số: $f(x) = 2x\sqrt{16 - x^2}$ trên $(0;4)$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 2\sqrt{16 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{-4x^2 + 32}{\sqrt{16 - x^2}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \in (0;4) \\ x = -2\sqrt{2} \notin (0;4) \end{cases}$$

BBT:

x	0		$2\sqrt{2}$		4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0		16		0

$$\text{Ta có: } \max_{(0;4)} f(x) = f(2\sqrt{2}) = 16.$$

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật có thể cắt được là $16(\text{dm}^2)$.

Câu 60: Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:



$$C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500.$$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa. Hỏi lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm trong một ngày? (đơn vị triệu đồng)

Câu 2:

Lời giải

Trả lời: 1,2

Số tiền thu về khi bán x mét vải lụa là: $220x$.

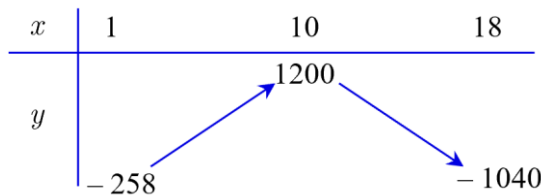
Lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa là:

$$L(x) = 220x - (x^3 - 3x^2 - 20x + 500) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$$

Xét hàm số $L(x) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$ với $x \in [1; 18]$

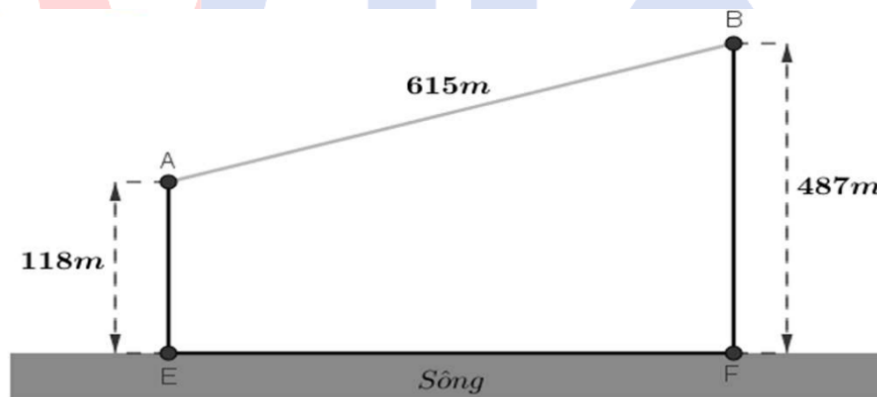
$$L'(x) = -3x^2 + 6x + 240; L'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \in [1; 18] \\ x = -8 \notin [1; 18] \end{cases}$$

Bảng biến thiên



Vậy hộ làm nghề dệt này thu được lợi nhuận tối đa trong một ngày là 1,2 triệu đồng khi sản xuất 10 mét vải lụa trong một ngày.

Câu 61: Cho hai vị trí A, B cách nhau 615 m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ.

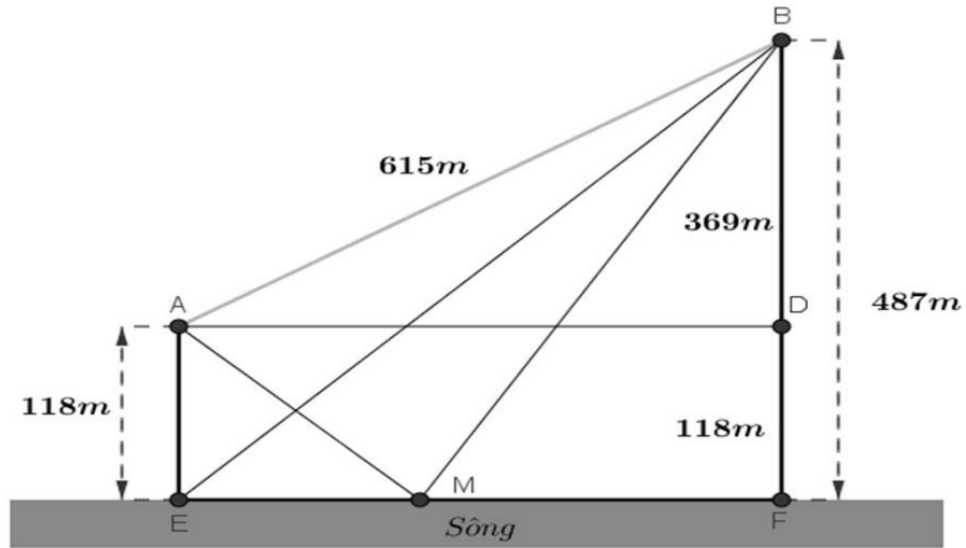


Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118 m và 487 m. Một người đi từ A đến bờ sông lấy nước mang về B . Đoạn đường ngắn nhất là số nguyên dương mà người đó có thể đi là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 780

Giả sử người đó đi từ A đến M để lấy nước và đi từ M về B dễ dàng tính được $BD = 369, EF = 492$.



Ta đặt $EM = x$, khi đó ta được:

$$MF = 492 - x, AM = \sqrt{x^2 + 118^2}, BM = \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}.$$

Như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định bằng tổng quãng đường AM và MB :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} \text{ với } x \in [0; 492]$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được quãng đường ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm M .

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} = \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}} \Leftrightarrow x\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} = (492 - x)\sqrt{x^2 + 118^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2[(492 - x)^2 + 487^2] = (492 - x)^2(x^2 + 118^2) \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (487x)^2 = (58056 - 118x)^2 \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases}$$

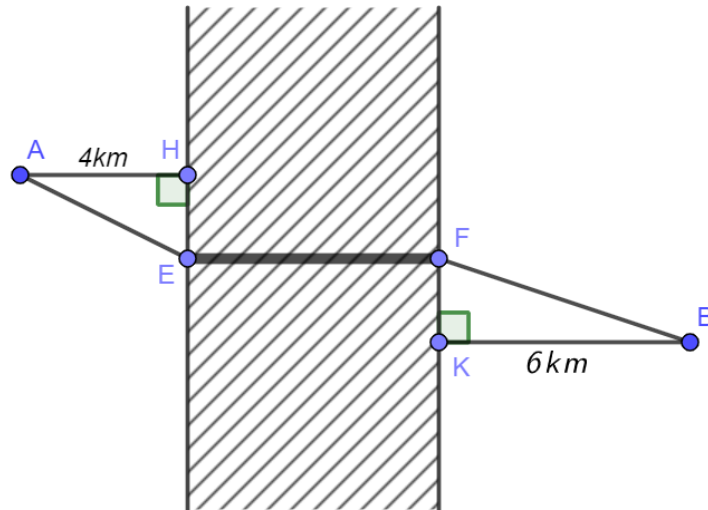
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{58056}{605} \text{ hay } x = -\frac{58056}{369} \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{58056}{605}$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 492]$. So sánh các giá trị của $f(0)$, $f\left(\frac{58056}{605}\right)$, $f(492)$ ta có giá

trị nhỏ nhất là $f\left(\frac{58056}{605}\right) \approx 780$ m

Khi đó quãng đường đi ngắn nhất là xấp xỉ 780 m.

Câu 62: Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là 4km và thành phố B cách con sông một khoảng là 6km (hình vẽ), biết $HE + KF = 20$ km và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu cách thành phố A là bao nhiêu km để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường AEFB)? (kết quả làm tròn đến phần chục)



Lời giải

Trả lời: 8,94

Đặt $HE = x$, $FK = y$, với $x, y > 0$

Ta có: $HE + KF = 20 \Rightarrow x + y = 20$,
$$\begin{cases} AE = \sqrt{16 + x^2} \\ BF = \sqrt{36 + y^2} = \sqrt{36 + (20 - x)^2} \end{cases}$$

Nhận xét: Vì EF không đổi nên AB ngắn nhất khi $AE + BF$ nhỏ nhất.

Ta có $AE + BF = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{(20 - x)^2 + 36} = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 40x + 436} = f(x)$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} + \frac{x - 20}{\sqrt{x^2 - 40x + 436}}, \forall x \in (0; 20).$$

Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 8$

Bảng biến thiên

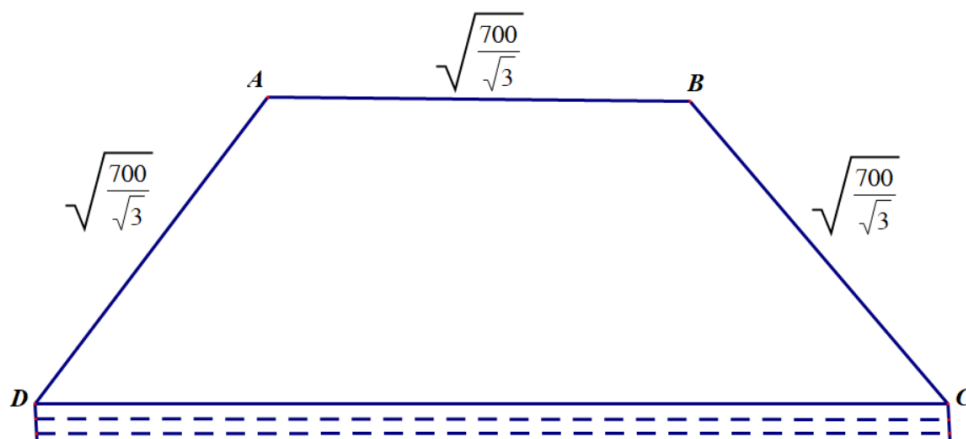
x	0	8	20	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$			$10\sqrt{5}$	

Vậy $AE = \sqrt{8^2 + 16} \approx 8,94km$

Câu 63: Bác nông dân có ba tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $\sqrt{\frac{700}{3}}$ (m) và muốn rào một khu vườn có dạng hình thang cân $ABCD$ như trong hình vẽ. Khu vườn có 3 mặt rào, mặt còn lại tiếp giáp với bờ sông nên không cần rào.

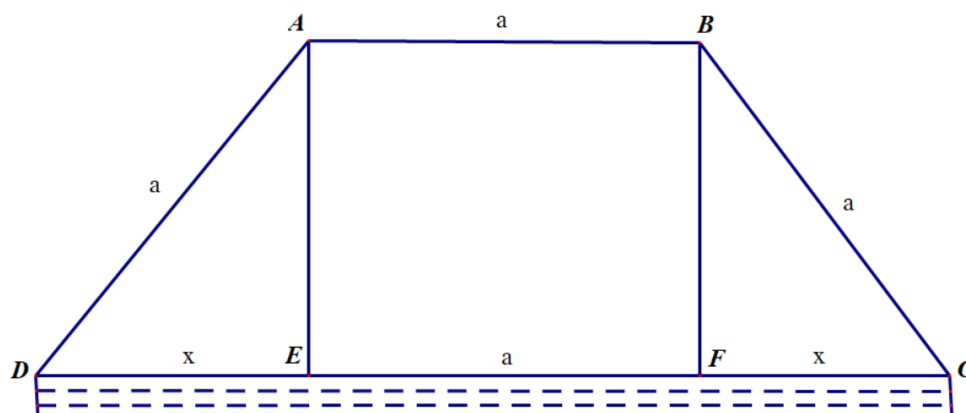
Hỏi diện tích lớn nhất mà bác nông dân có thể rào được là bao nhiêu mét vuông?





Lời giải

Trả lời: 525



Gọi $a = \sqrt{\frac{700}{\sqrt{3}}}$ (m). Dựng các đường cao AE và BF của hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ trên.

Vì $ABCD$ là hình thang cân nên $DE = FC$ và $EF = AB = a$.

Đặt $DE = FC = x$ ($x > 0$). Ta có $DC = DE + EF + FC = x + a + x = 2x + a$

Ta có $AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$

Ta thấy, x phải thỏa mãn điều kiện $0 < x < a$.

Diện tích của hình thang cân $ABCD$ là

$$S = \frac{1}{2}(AB + CD)AE = \frac{1}{2}(a + 2x + a)\sqrt{a^2 - x^2} = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2}$$

Xét hàm số $S(x) = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2}$ với $x \in (0; a)$. $\Rightarrow S'(x) = \frac{-2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$$\Rightarrow S'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - ax + a^2 = 0 \Leftrightarrow (x + a)(a - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \text{ (l)} \\ x = \frac{a}{2} \text{ (n)} \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $S(x)$ như sau:



x	$-\infty$	0	$\frac{a}{2}$	a	$+\infty$
$S'(x)$			+	0	-
$S(x)$					

Diagram showing the function $S(x)$ with a peak at $x = \frac{a}{2}$. The peak value is $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. The function is zero at $x = 0$ and $x = a$. The regions where $S(x) < 0$ are shaded.

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ tại $x = \frac{a}{2}$.

Thay $a = \sqrt{\frac{700}{\sqrt{3}}}$ vào biểu thức $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3 \cdot \left(\sqrt{\frac{700}{\sqrt{3}}}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 525$

Vậy bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là $525m^2$.

Câu 64: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có lợi nhuận cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu (đơn vị tính bằng triệu đồng và làm tròn kết quả tới hàng phần trăm)?

Lời giải

Trả lời: 2,25

Gọi x là giá thuê thực tế của mỗi căn hộ, (x : đồng; $x \geq 2\,000\,000$ đồng)

+) Khi tăng giá 100.000 đồng thì có 2 căn hộ bị bỏ trống.

Tăng giá $x - 2.000.000$ đồng, ta có số căn hộ bị bỏ trống là $\frac{2(x - 2.000.000)}{100.000} = \frac{x - 2.000.000}{50.000}$

Khi cho thuê với giá x đồng thì số căn hộ cho thuê là: $50 - \frac{x - 2.000.000}{50.000} = -\frac{x}{50.000} + 90$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ, ($F(x)$: đồng).

Ta có: $F(x) = \left(-\frac{x}{50.000} + 90\right)x = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$

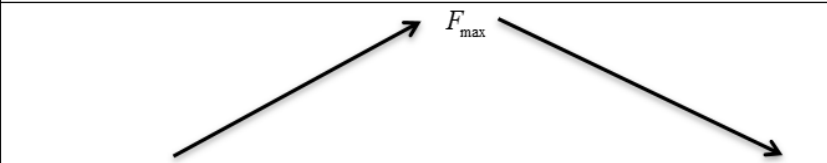
Ta tìm GTLN của $F(x) = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$, $x \geq 2.000.000$

$F'(x) = -\frac{1}{25.000}x + 90$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{25.000}x + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 2.250.000$

Bảng biến thiên:



X	2.000.000	2.250.000	$+\infty$
$F'(x)$	+	0	-
$F(x)$			

Suy ra $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2.250.000$

Vậy công ty phải cho thuê với giá 2,25 triệu đồng mỗi căn hộ thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

