



CHƯƠNG



VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN



LÝ THUYẾT.

I. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Độ dài của vectơ trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

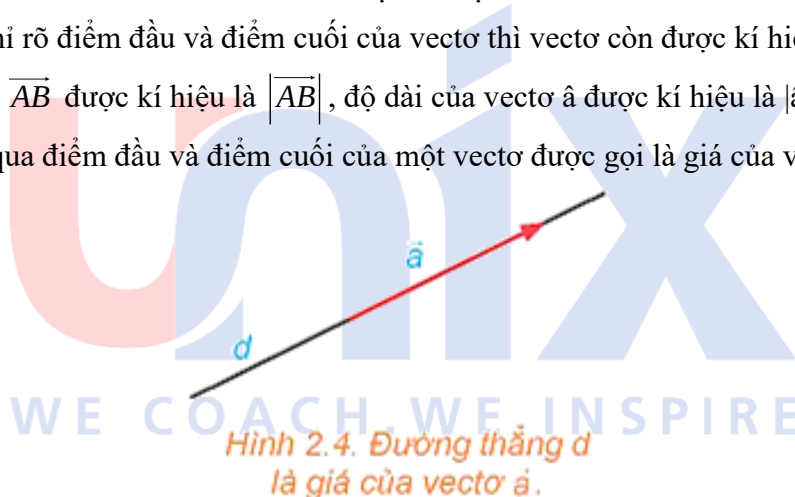
Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:

Vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.

Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$

Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.

Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ đó



Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.

Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, ta có tính chất và các quy ước sau đối với vectơ trong không gian:

Trong không gian, với mỗi điểm O và vectơ $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.

Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \dots$ gọi là các vectơ -không.

Ta quy ước vectơ-không có độ dài là 0, cùng hướng (và vì vậy cùng phương) với mọi vectơ. Do đó, các vectơ-không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.



II. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

a) Tổng của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A bất kì và các điểm B, C sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó, vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.

Trong không gian, phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là phép cộng vectơ.

Bốn điểm A, B, A', B' đồng phẳng và tứ giác $ABB'A'$ là hình bình hành.

Chú ý: Tương tự như phép cộng vectơ trong mặt phẳng, phép cộng vectơ trong không gian có các tính chất sau:

Tính chất giao hoán: Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ bất kì thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Tính chất kết hợp: Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ là ba vectơ bất kì thì $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Tính chất cộng với vectơ $\vec{0}$: Nếu $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Từ tính chất kết hợp của phép cộng vectơ trong không gian, ta có thể viết tổng của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ là $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ mà không cần sử dụng các dấu ngoặc. Tương tự đối với tổng của nhiều vectơ trong không gian.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

b) Hiệu của hai vectơ trong không gian

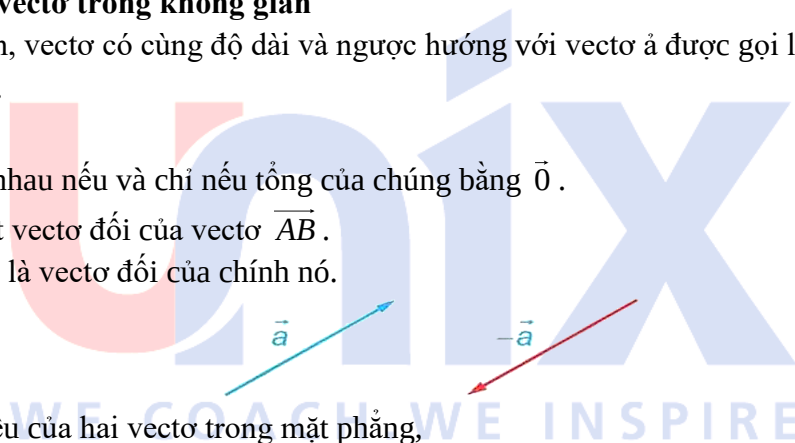
Trong không gian, vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$.

Chú ý:

Hai vectơ là đối nhau nếu và chỉ nếu tổng của chúng bằng $\vec{0}$.

Vectơ $\overrightarrow{BA}$ là một vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó.



Tương tự như hiệu của hai vectơ trong mặt phẳng, ta có định nghĩa về hiệu của hai vectơ trong không gian:

Vectơ $\vec{a} + (-\vec{b})$ được gọi là hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.

Trong không gian, phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là phép trừ vectơ.

III. TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Trong không gian, tích của một số thực $k \neq 0$ với một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$; ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$;

Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

Trong không gian, phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là phép nhân một số với một vectơ.

Chú ý:

Quy ước $k\vec{a} = \vec{0}$ nếu $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

Nếu $k\vec{a} = \vec{0}$ thì $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

Trong không gian, điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là có một số thực k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.



Chú ý: Tương tự như phép nhân một số với một vector trong mặt phẳng, phép nhân một số với một vector trong không gian có các tính chất sau:

Tính chất kết hợp: Nếu h, k là hai số thực và $\vec{a}$ là một vector bất kì thì $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$.

Tính chất phân phối: Nếu h, k là hai số thực và $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vector bất kì thì $(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$ và $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

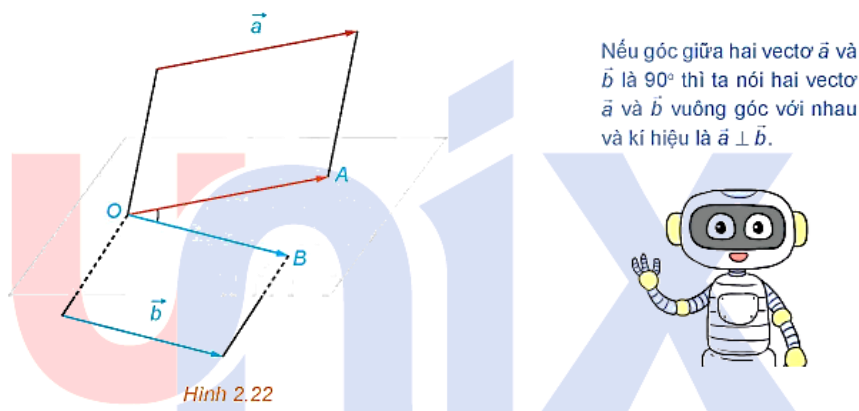
Tính chất nhân với 1 và -1: Nếu $\vec{a}$ là một vector bất kì thì $1\vec{a} = \vec{a}$ và $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Chú ý: Tương tự như trong mặt phẳng, nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với điểm O tùy ý, ta có $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$

IV. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTOR TRONG KHÔNG GIAN

a) Góc giữa hai vector trong không gian

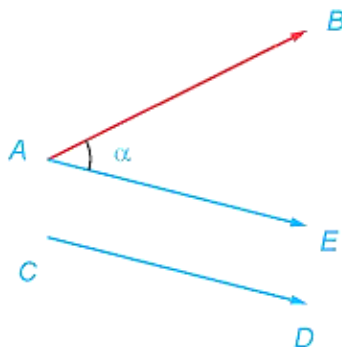
Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O bất kì và gọi A, B là hai điểm sao cho $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$. Khi đó, góc AOB ($0^\circ \leq AOB \leq 180^\circ$) được gọi là góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$.



Chú ý:

Để xác định góc giữa hai vector $\vec{AB}$ và $\vec{CD}$ trong không gian ta có thể lấy điểm E sao cho $\vec{AE} = \vec{CD}$, khi đó $(\vec{AB}, \vec{CD}) = \angle BAE$ (H.2.23).

Quy ước góc giữa một vector bất kì và $\vec{0}$ có thể nhận một giá trị tùy ý từ 0° đến 180° .



b) Tích vô hướng của hai vector trong không gian

Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$



Chú ý:

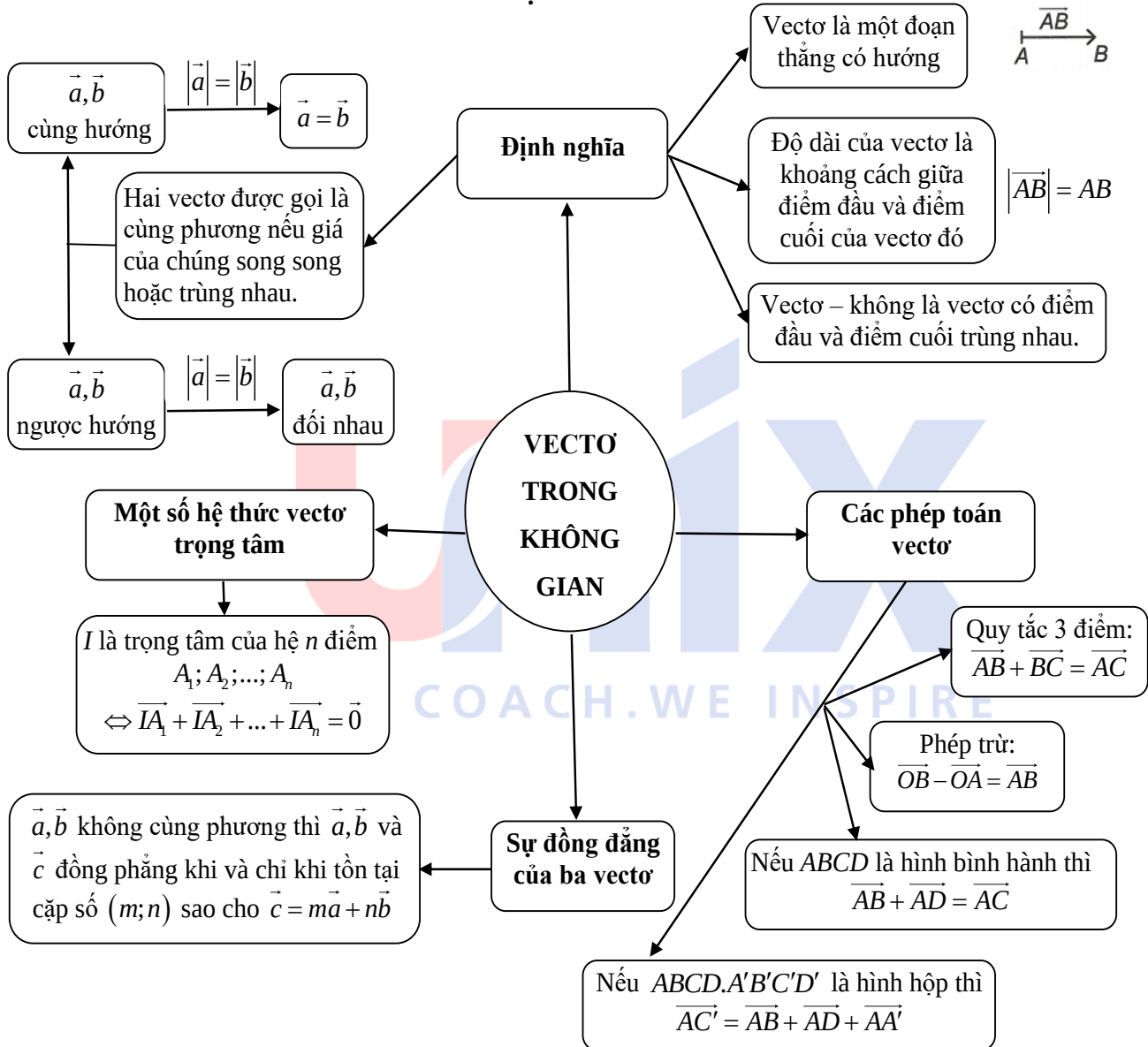
Quy ước nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Khi đó: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Với mọi vector $\vec{a}$, ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vector khác $\vec{0}$ thì $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA





HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1. XÁC ĐỊNH VECTOR VÀ CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VECTOR



PHƯƠNG PHÁP.

Vận dụng các kiến thức sau.

- ☐ Định nghĩa các khái niệm liên quan đến vector;
- ☐ Tính chất hình học của các đa giác đã học;
- ☐ Các quy tắc tính toán với vector;
- ☐ Một số hệ thức vector hay dùng;
- ☐ Các tính chất của các hình hình học cụ thể.



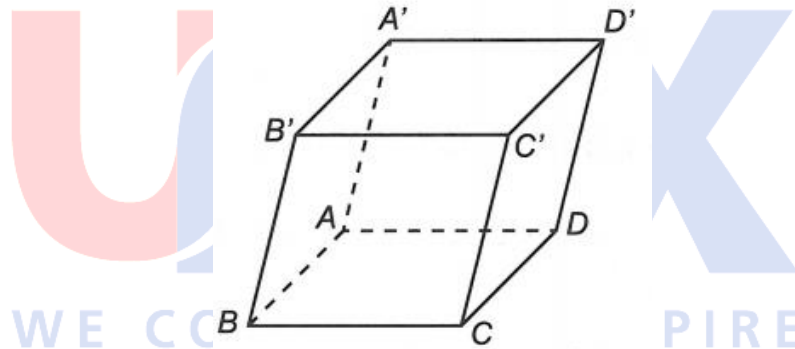
BÀI TẬP.

Câu 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Sử dụng các đỉnh của hình hộp làm điểm đầu và điểm cuối của vector.

a) Hãy kể tên các vector bằng nhau lần lượt bằng các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$.

b) Hãy kể tên các vector luôn có độ dài bằng nhau và bằng độ dài của vector $\overrightarrow{BC}$.

Lời giải



a) Ta có

$$+) \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$$

$$+) \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$$

$$+) \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{B'C'}$$

$$+) \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$$

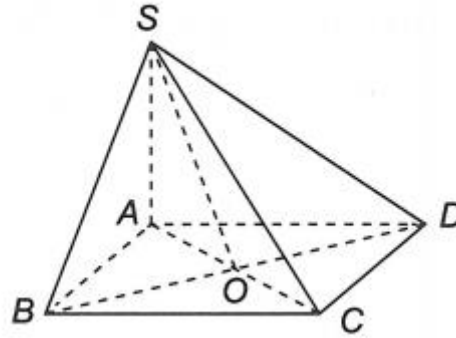
b) Từ tính chất của hình bình hành, ta suy ra các vector luôn có độ dài bằng độ dài của vector $\overrightarrow{BC}$ là $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{A'D'}, \overrightarrow{D'A'}, \overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{C'B'}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

a) Chứng minh $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$

b) Nếu $ABCD$ là hình chữ nhật thì $\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2$

Lời giải



a) Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$ thì O là trung điểm của mỗi đường chéo AC và BD .

Do đó $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO}$ và $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$

Vậy $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$

b) Ta có $\overrightarrow{SA}^2 = (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA})^2 = \overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{OA}$,

$\overrightarrow{SC}^2 = (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC})^2 = \overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{OC}$.

Suy ra $\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = 2\overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{SO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$

$= 2(\overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OA}^2)$

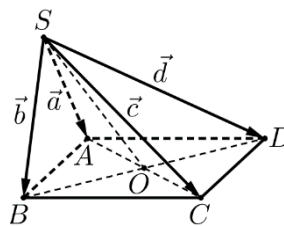
$= 2(SO^2 + OA^2)$

Tương tự, $\overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2 = 2(SO^2 + OB^2)$

Mà $ABCD$ là hình chữ nhật nên $OA = OB$

Suy ra $\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Chứng minh: $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$.

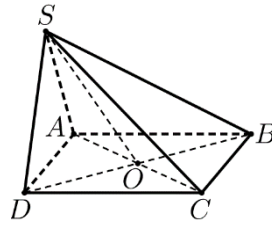


Lời giải

Vì O là trung điểm của AC và BD nên $\begin{cases} \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO} \\ \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO} \end{cases}$.

Suy ra $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$ hay $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Chứng minh: $\overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}$.



Lời giải

Ta có $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS} + 4\overrightarrow{GO} + \underbrace{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})}_{=\vec{0}} = \vec{0} \text{ (do } O \text{ là tâm hình bình hành)}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS} + 4\overrightarrow{GO} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}.$$

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tứ diện, M là một điểm trong không gian. Chứng minh:

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})$$

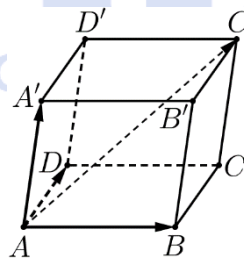
Lời giải

Do G là trọng tâm tứ diện nên ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}, \forall M$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MG} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}).$$

Câu 6: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$.



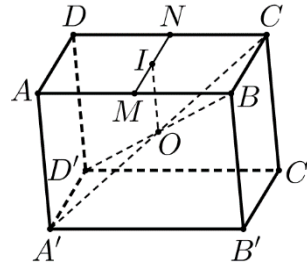
Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$: luôn đúng

Câu 7: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O . Gọi I là tâm của hình bình hành $ABCD$. Chứng minh:

$$\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{8} (\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{DB'}).$$

Lời giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD .

Suy ra I là trung điểm của MN nên $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OI}$.

Ta có
$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON} \end{cases}$$

Từ đó suy ra
$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

$$= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} \overrightarrow{AC'} - \frac{1}{2} \overrightarrow{CA'} - \frac{1}{2} \overrightarrow{BD'} - \frac{1}{2} \overrightarrow{DB'} \right) = -\frac{1}{8} (\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{DB'})$$

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm của tam giác BCD chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$

Lời giải

a) Ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2} ((\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD})) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$$

b) Ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD}$

Cộng các đẳng thức theo vế ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = 3\overrightarrow{AG}$

Vì G là trọng tâm tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

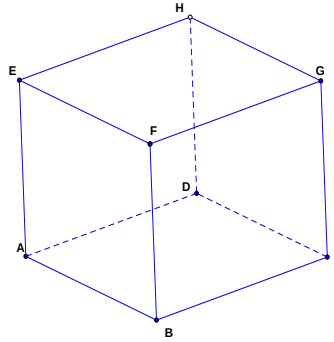
suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

Câu 9: Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Lời giải



a) Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{FE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}) + (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0} + (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}) = \overrightarrow{AD}$

b) Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GB} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GB}) = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

DẠNG 2. CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG, PHÂN TÍCH VECTOR



PHƯƠNG PHÁP.

- Chứng minh ba vector đồng phẳng, sử dụng một trong các cách sau.
- + Chứng minh ba vector có giá cùng song song với một mặt phẳng.
- + Chứng minh hai vector có giá cùng song song với mặt phẳng chứa giá của vector còn lại.
- + Biến đổi vector để được đẳng thức dạng $\vec{c} = m.\vec{a} + n.\vec{b}$
- Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$$

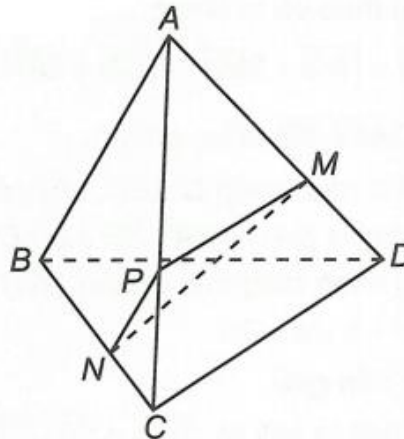
$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : k.\overrightarrow{MA} + (1-k).\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$$



BÀI TẬP.

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là các điểm trên các cạnh AD và BC sao cho $AM = 2MD, BC = 3NC$. Chứng minh: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$.

Lời giải



$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \\ 2\overrightarrow{MN} = 2(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}) \end{cases}$$

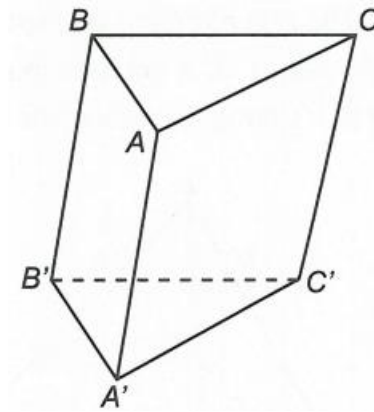
$$\text{Cộng vế theo vế của hai đẳng thức này ta được } 3\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MD}) + (\overrightarrow{BN} + 2\overrightarrow{CN}) + (\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DC})$$



Do $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MD} = \vec{0}$, $\overrightarrow{BN} + 2\overrightarrow{CN} = \vec{0}$ nên $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

Câu 11: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{B'C}$, $\overrightarrow{BC'}$ qua các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

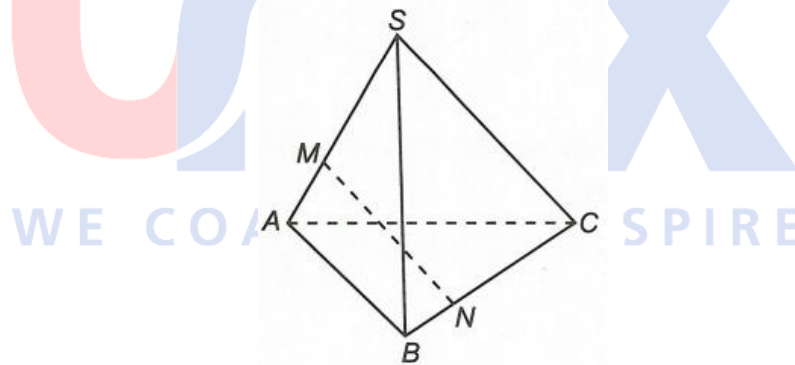
Lời giải



Ta có $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$
 $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy điểm M và N sao cho $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{NC} = -2\overrightarrow{NB}$. Chứng minh $3\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{AB}$.

Lời giải



Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{MS} + 2\overrightarrow{MA} = \vec{0}$; $\overrightarrow{CN} + 2\overrightarrow{NB} = \vec{0}$

Lại có
$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CN} \\ 2\overrightarrow{MN} = 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) \end{cases}$$

Cộng vế theo vế ta được

$$3\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MS} + 2\overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{CN} + 2\overrightarrow{NB}) + \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{AB}$$

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J là trung điểm của AB và CD .

a) Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{IJ}$ theo 3 vectơ $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AG}$ theo 3 vectơ $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$.

Lời giải



a) Ta có: $\overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ})$, mặt khác $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

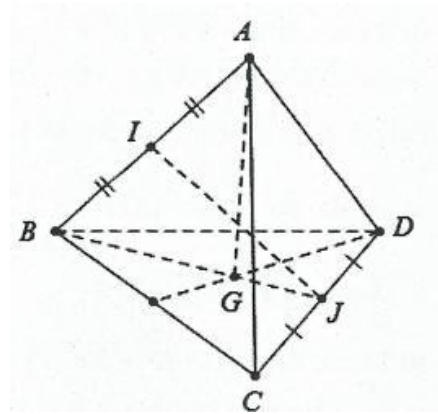
$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \text{ (tính chất trung điểm)}$$

$$\text{Do đó: } \overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

b) Ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD} \end{cases}$$
 cộng theo vế ta được:

$$3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \text{ (do } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC\text{)}. \text{ Do vậy } \overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{3}.$$



Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M và N lần lượt thuộc AD và BC sao cho $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MD}$; $\overrightarrow{NB} = -3\overrightarrow{NC}$. Biết $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$.

a) Hãy biểu diễn vecto $\overrightarrow{MN}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

b) Gọi G là trung điểm của PQ , chứng minh rằng G là trọng tâm tứ diện $ABCD$.

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \quad (1).$

Lại có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \quad (2).$

Mặt khác: $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MD} = \vec{0}; \overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}.$

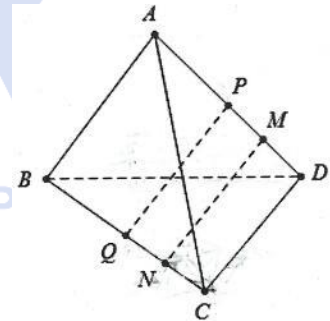
Lấy $(2) + 3.(1)$ ta được $4.\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + 3.\overrightarrow{DC}.$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}.$$

b) Theo tính chất trung điểm ta có:

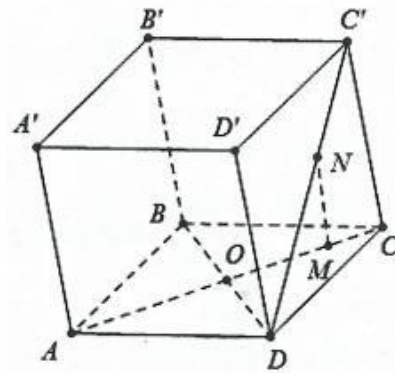
$$\begin{cases} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GP} \\ \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GQ} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2(\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ})$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Rightarrow G \text{ là trọng tâm tứ diện } ABCD.$$



Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}; \overrightarrow{BB'} = \vec{b}; \overrightarrow{BC} = \vec{c}$. Gọi M và N lần lượt là hai điểm nằm trên AC và DC' sao cho $MB // BD'$. Tính tỷ số $\frac{MN}{BD'}$.

Lời giải



Giả sử: $\overrightarrow{MC} = n\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{C'N} = m\overrightarrow{C'D}$.

Ta có: $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Lại có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'N} = n\overrightarrow{AC} + \vec{b} + m\overrightarrow{C'D}$

$$= n(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) + \vec{b} + m(\overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{CD}) = n(\vec{c} - \vec{a}) + \vec{b} + m(-\vec{b} + \vec{a}) = (m-n)\vec{a} + (1-m)\vec{b} + n\vec{c}.$$

Khi đó $MN \parallel BD' \Rightarrow \overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BD'}$

$$\frac{m-n}{1} = \frac{1-m}{1} = \frac{n}{1} = k \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{MN}{BD'} = k = \frac{1}{3}.$$

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho $SA = a.SA', SB = b.SB', SC = c.SC'$, trong đó a, b, c là các số thay đổi. Chứng minh rằng mặt phẳng $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $a + b + c = 3$.

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra $\overrightarrow{SA} = a.\overrightarrow{SA'}, \overrightarrow{SB} = b.\overrightarrow{SB'}, \overrightarrow{SC} = c.\overrightarrow{SC'}$

Gọi G là trọng tâm của tam giác ΔABC . Ta có $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SG}$

$G \in (A'B'C') \Leftrightarrow \overrightarrow{SG} = x.\overrightarrow{SA'} + y.\overrightarrow{SB'} + z.\overrightarrow{SC'}$ với $x + y + z = 1$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{SG} = 3x.\overrightarrow{SA'} + 3y.\overrightarrow{SB'} + 3z.\overrightarrow{SC'} \text{ với } x + y + z = 1$$

$$\Leftrightarrow a.\overrightarrow{SA'} + b.\overrightarrow{SB'} + c.\overrightarrow{SC'} = 3x.\overrightarrow{SA'} + 3y.\overrightarrow{SB'} + 3z.\overrightarrow{SC'}$$

$$\Leftrightarrow (a-3x).\overrightarrow{SA'} + (b-3y).\overrightarrow{SB'} + (c-3z).\overrightarrow{SC'} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow a-3x = b-3y = c-3z = 0$$

+) Nếu $G \in (A'B'C')$ ta có $a-3x = b-3y = c-3z = 0$.

Do đó $a + b + c = 3$

+) Nếu $a + b + c = 3$, ta đặt $x = \frac{a}{3}, y = \frac{b}{3}, z = \frac{c}{3}$ thì

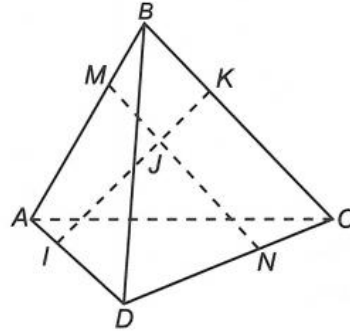
$$x + y + z = \frac{a+b+c}{3} = 1 \text{ và } a-3x = b-3y = c-3z = 0$$

Do đó $G \in (A'B'C')$.



Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$, M và N là các điểm lần lượt thuộc AB và CD sao cho $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{ND} = -2\overrightarrow{NC}$; các điểm I, J, K lần lượt thuộc AD, MN, BC sao cho $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{ID}$, $\overrightarrow{JM} = k\overrightarrow{JN}$, $\overrightarrow{KB} = k\overrightarrow{KC}$. Chứng minh rằng các điểm I, J, K thẳng hàng.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$ nên với điểm O bất kỳ thì $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{3}$

Tương tự, ta chỉ ra được

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{OC}}{3}, \overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OD}}{1-k}, \overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OC}}{1-k}, \overrightarrow{OJ} = \frac{\overrightarrow{OM} - k\overrightarrow{ON}}{1-k}$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OD} - 2k\overrightarrow{OC})$$

$$= \frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{3} [(1-k)\overrightarrow{OI} + 2(1-k)\overrightarrow{OK}]$$

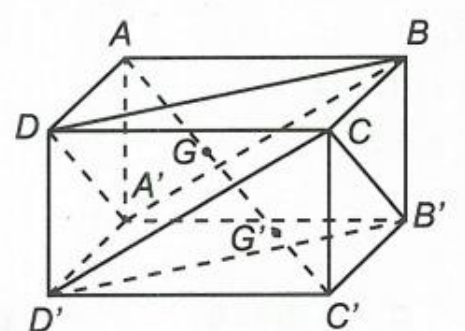
$$= \frac{1}{3} (\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OK}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OK}$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{3}(\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ}) + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OJ}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{JI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{JK} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{JK}$$

Suy ra I, J, K thẳng hàng.

Câu 18: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của các tam giác $BDA', CB'D'$. Chứng minh các điểm A, G, G', C' thẳng hàng.

Lời giải



$$\text{Đặt } \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

$$\text{Theo quy tắc trọng tâm, ta có } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{a} + \vec{c} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$



Vậy $\overrightarrow{AC'} = 3\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG'}$ nên các điểm A, G, G', C' thẳng hàng.

Câu 19: Cho tứ diện $ABCD$, các điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Gọi P, Q lần lượt là các điểm trên các đường thẳng AD, BC sao cho $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{QB} = 2\overrightarrow{QC}$. Chứng minh rằng 4 điểm M, N, P, Q đồng phẳng.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MP} = 2(\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MP}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MA}$.

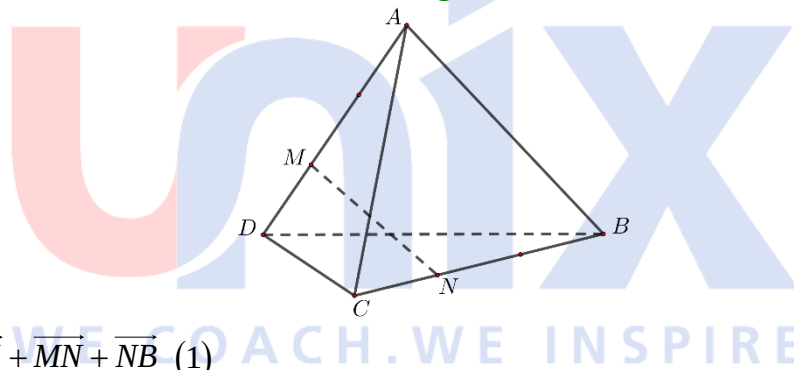
Tương tự $\overrightarrow{QB} = 2\overrightarrow{QC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}$.

Suy ra $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = 2(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$
 $= 2.2\overrightarrow{MN} - \vec{0}$ (vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD)
 $= 4\overrightarrow{MN}$.

Vậy ba vector $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng hay bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng (đpcm).

Câu 20: Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MD}$; trên cạnh BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NB} = -2\overrightarrow{NC}$. Chứng minh rằng ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}$ (1)

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC} \Rightarrow 2\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DM} + 2\overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{NC}$ (2)

Cộng theo vế (1) và (2) ta được: $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{MN} + (\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{DM}) + (\overrightarrow{NB} + 2\overrightarrow{NC})$ (3)

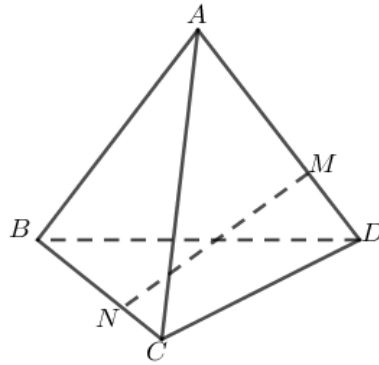
Do $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MD}$ nên $\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{DM} = \vec{0}$; do $\overrightarrow{NB} = -2\overrightarrow{NC}$ nên $\overrightarrow{NB} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

Từ (3) $\Rightarrow \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{MN} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$.

Suy ra ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng (đpcm).

Câu 21: Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MD}$ và trên cạnh BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NB} = -2\overrightarrow{NC}$. Chứng minh $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$.

Lời giải



Ta có
$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} & (1) \\ 2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{CN} & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$3\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BN} + 2\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$$

Câu 22: Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc AB, BC, CD, DA sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DP} = k\overrightarrow{DC}$. Hãy xác định k để M, N, P, Q đồng phẳng.

Lời giải

Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}, \overrightarrow{DB} = \vec{b}, \overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Khi đó ta có :

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}, \overrightarrow{MP} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + k\vec{c}, \overrightarrow{MQ} = -\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$$

Các điểm M, N, P, Q đồng phẳng khi và chỉ khi các vec tơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}$ đồng phẳng

$$\Leftrightarrow \exists x, y : \overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MQ}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + k\vec{c} = x\left(-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) + y\left(-\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}\right)$$

Do các vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng nên điều này tương đương với

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}y = -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}y = -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}x = k \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}, y = 1, k = \frac{1}{2}.$$

Câu 23: Cho tứ diện $ABCD$, các điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Gọi P, Q lần lượt là các điểm trên các đường thẳng AD, BC sao cho $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{QB} = 2\overrightarrow{QC}$. Chứng minh rằng 4 điểm M, N, P, Q đồng phẳng.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MP} = 2(\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MP}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MA}.$$

$$\text{Tương tự } \overrightarrow{QB} = 2\overrightarrow{QC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = 2(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$$



$$= 2.2\overrightarrow{MN} - \vec{0} \text{ (vì } M, N \text{ lần lượt là trung điểm của } AB, CD)$$

$$= 4\overrightarrow{MN}.$$

Vậy ba vector $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng hay bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng

Câu 24: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BD, MN và P là một điểm bất kì trong không gian thoả $4\overrightarrow{PA} = -(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$. Chứng minh: $\overrightarrow{PA} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{PI}$

Lời giải

Ta có M là trung điểm của AC nên $2\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}$.

N là trung điểm của BD nên $2\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$.

I là trung điểm của MN nên $2\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}$.

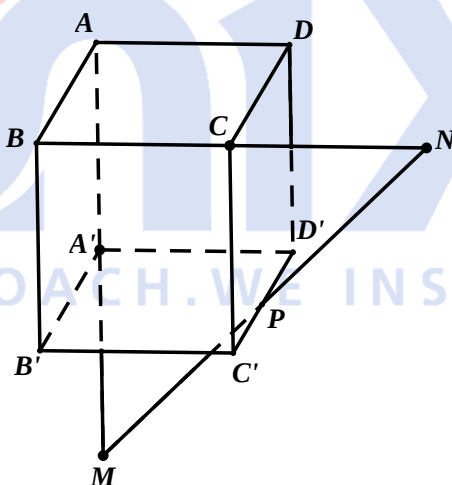
Khi đó

$$4\overrightarrow{PA} = -(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{PA} = -(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) = -(2\overrightarrow{PM} + 2\overrightarrow{PN}) = -2.2\overrightarrow{PI} = -4\overrightarrow{PI}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PA} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{PI}.$$

Câu 25: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một đường thẳng Δ cắt các đường thẳng $AA', BC, C'D'$ lần lượt tại M, N, P sao cho $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$. Tính $\frac{MA}{MA'}$.

Lời giải



Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$.

Vì $M \in AA'$ nên $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AA'} = k\vec{c}$

$N \in BC \Rightarrow \overrightarrow{BN} = l\overrightarrow{BC} = l\vec{a}, P \in C'D' \Rightarrow \overrightarrow{C'P} = m\vec{b}$

Ta có $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -l\vec{a} - \vec{b} + k\vec{c}$

$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'P} = (1-l)\vec{a} + m\vec{b} + \vec{c}$

Do $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP} \Rightarrow -l\vec{a} - \vec{b} + k\vec{c} = 2[(1-l)\vec{a} + m\vec{b} + \vec{c}]$

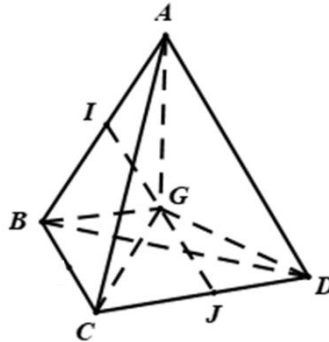
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -l = 2(1-l) \\ -1 = 2m \\ k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = 2, m = -\frac{1}{2}, l = 2. \text{ Vậy } \frac{MA}{MA'} = 2.$$

Câu 26: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD , Xác định vị trí của M để



$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ nhỏ nhất.

Lời giải



Gọi G trung điểm IJ

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } |\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}| &= |(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})| \\ &= |2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GJ}| = |2(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ})| = |\vec{0}| = 0. \end{aligned}$$

Nên $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = 0$ là nhỏ nhất khi $M \equiv G$

Vậy M trung điểm IJ .

Câu 27: Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G và I là trung điểm của BC . Tìm điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

Lời giải

Ta có G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$.

I là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

$$\text{Khi đó: } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| \Leftrightarrow |4\overrightarrow{MG}| = |2\overrightarrow{AI}| \Leftrightarrow MG = \frac{1}{2} AI.$$

Vậy điểm M nằm trên mặt cầu tâm G với bán kính $\frac{1}{2} AI$.

DẠNG 3: GÓC GIỮA HAI VECTƠ. TÍCH VÔ HƯỚNG GIỮA HAI VECTƠ



1. PHƯƠNG PHÁP.

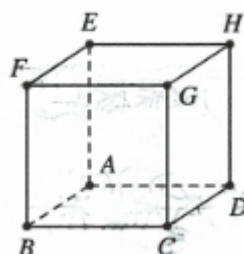
Nắm được định nghĩa góc giữa hai vectơ, công thức tích vô hướng của hai vectơ trong không gian



2. BÀI TẬP.

Câu 28: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$?

Lời giải



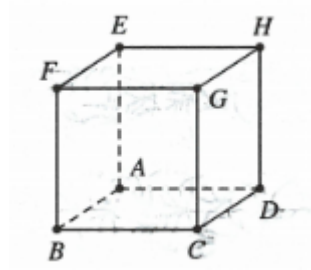


Vì $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$ ($ADHE$ là hình vuông)

Nên $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{DH}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AE}) = BAE = 90^\circ$ ($ABFE$ là hình vuông).

Câu 29: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

Lời giải

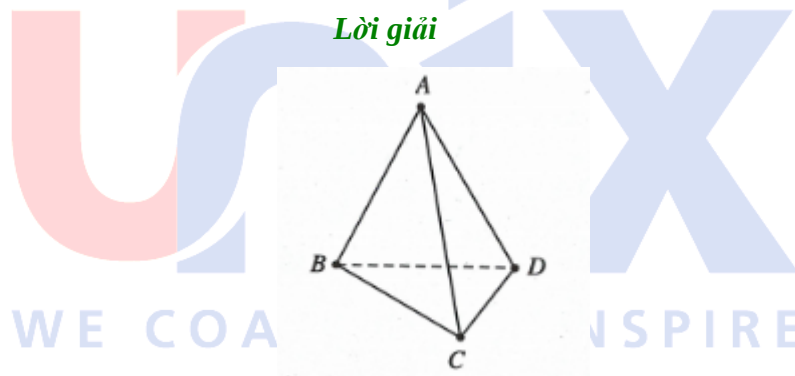


Vì $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ ($AEGC$ là hình vuông)

Nên $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{EG}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = BAC = 45^\circ$ ($ABCD$ là hình vuông).

Câu 30: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $BAC = BAD = 60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

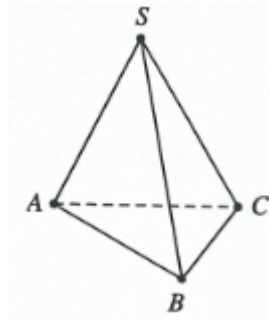
$= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) - |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

$= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cos 60^\circ - |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ.$

Mà $AC = AD \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = 90^\circ.$

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $ASB = BSC = CSA$, $BAC = BAD = 60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{SC}$?

Lời giải



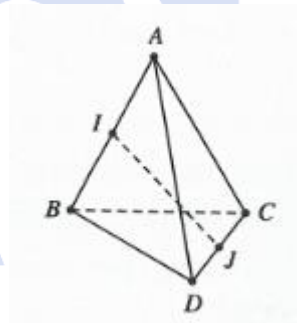
$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{SC} (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SA} \\ &= |\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{SB}| \cos(\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{SB}) - |\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{SA}| \cos(\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{SA}) \\ &= SC \cdot SB \cdot \cos BSC - SC \cdot SA \cdot \cos ASC. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } SA = SB = SC \text{ và } BSC = ASC \longrightarrow \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\text{Do đó } (\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{AB}) = 90^\circ.$$

Câu 32: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $BAC = BAD = 60^\circ$, $CAD = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

Lời giải



Xét tam giác ICD có J là trung điểm

$$CD \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID})$$

$$\text{Tam giác } ABC \text{ có } \begin{cases} AB = AC \\ BAC = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \text{ đều} \Rightarrow CI \perp AB$$

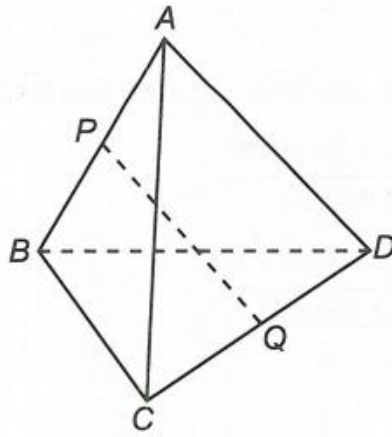
Tương tự ta có ΔABD đều nên $DI \perp AB$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{IJ}) = 90^\circ$$

Câu 33: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp AC$ và $AB \perp BD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng $AB \perp PQ$.

Lời giải



Vì $AB \perp AC$ và $AB \perp BD$ nên $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$; $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Ta có $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ}$ và $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DQ}$

Do đó $2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \Rightarrow 2\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

Hay $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Vậy $AB \perp PQ$.

Câu 34: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng của hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'C'}$.

Lời giải

Ta có: $(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \angle BAC = 45^\circ$

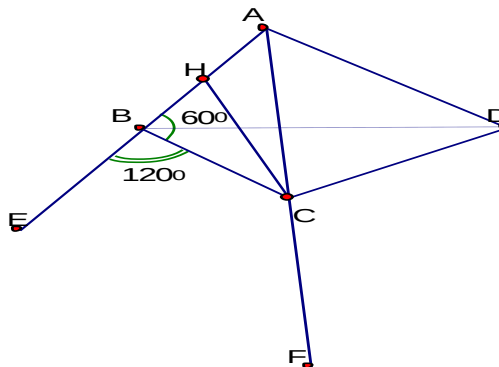
$\Rightarrow \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{A'C'}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{AB}) = a \cdot a \cdot 1 = a^2$

Câu 35: Cho tứ diện đều $ABCD$ có H là trung điểm của cạnh AB . Hãy tính góc giữa các cặp vec tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{CH}$ và $\overrightarrow{AC}$

Lời giải



a) Đặt $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$. Khi đó:

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}) = \angle EBC = 120^\circ$

b) Đặt $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AC}$. Khi đó:

$(\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{CF}) = \angle HCF = 150^\circ$



Câu 36: Cho tứ diện ABCD có OA, OB, OC lần lượt vuông góc với nhau từng đôi một, OA = OB = OC = 1. Gọi M là trung điểm của AB. Tính $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{BC})$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{OM}| |\overrightarrow{BC}|}$$

$$+) |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2}; |\overrightarrow{OM}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} +) \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\ &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB}) \\ &= -\frac{1}{2} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{OM}| |\overrightarrow{BC}|} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$$

