



CHƯƠNG



# VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

## BÀI: VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN



### HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

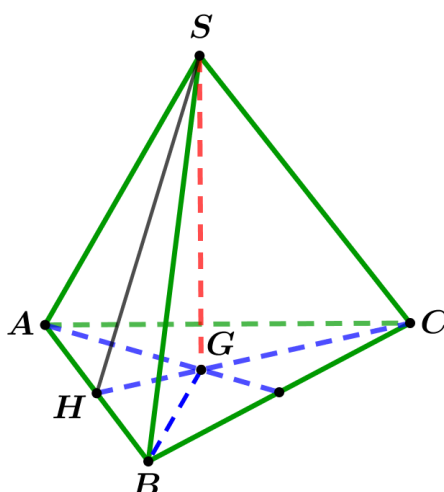
**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1:** Cho hình chóp đều  $S.ABC$  có cạnh đáy bằng  $a$  và cạnh bên bằng  $2a$ .

- Có 4 vectơ có điểm đầu là  $S$  và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của hình chóp đều  $S.ABC$ .
- Trong số các vectơ ở câu a, có 2 vectơ có giá nằm trong mặt phẳng  $(ABC)$ .
- Gọi  $H$  là trung điểm của  $AB$ . Độ dài của vectơ  $\overrightarrow{SH}$  bằng  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .
- Gọi  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABC$ . Độ dài của vectơ  $\overrightarrow{SG}$  bằng  $\frac{a\sqrt{33}}{3}$ .

Lời giải

|        |        |        |         |
|--------|--------|--------|---------|
| a) Sai | b) Sai | c) Sai | d) Đúng |
|--------|--------|--------|---------|



+) Có 3 vectơ có điểm đầu là  $S$  và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện là :  $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$ .

+) Trong các vectơ  $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$  thì không vectơ nào có giá nằm trong mặt phẳng  $(ABC)$ .



$$+) |\overline{SH}| = SH = \sqrt{SA^2 - HA^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

$$+) |\overline{SG}| = SG = \sqrt{SH^2 - HG^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{15}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}.$$

a) Sai: Có 3 vector có điểm đầu là  $S$  và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện.

b) Sai: Trong số các vector ở câu a, không vector nào có giá nằm trong mặt phẳng  $(ABC)$ .

c) Sai:  $|\overline{SH}| = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$

d) Đúng:  $|\overline{SG}| = \frac{a\sqrt{33}}{3}.$

**Câu 2:** Cho hình hộp thoi  $ABCD.A'B'C'D'$ .

a) Trong các vector  $\overline{CB}, \overline{C'B'}, \overline{B'C'}, \overline{AD}, \overline{DA}, \overline{A'D'}, \overline{D'A'}, \overline{AC}$  có 7 vector cùng phương với  $\overline{BC}$ .

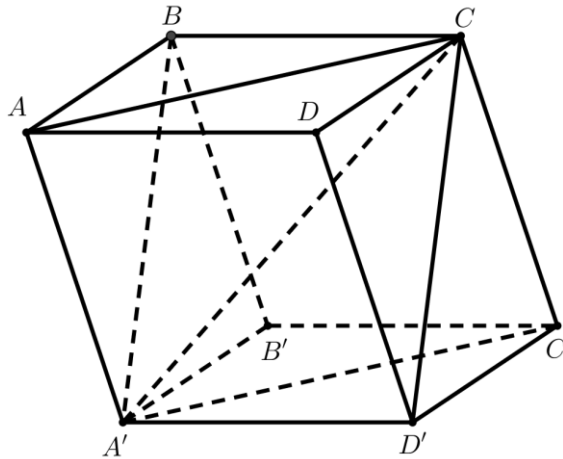
b) Hai vector  $\overline{AC}$  và  $\overline{A'C'}$  cùng hướng.

c) Trong các vector  $\overline{CB}, \overline{C'B'}, \overline{B'C'}, \overline{AD}, \overline{DA}, \overline{A'D'}, \overline{D'A'}, \overline{AC}$  có 6 vector bằng  $\overline{BC}$ .

d) Nếu  $A'B \perp (ADC'B')$  thì  $|\overline{A'C}| = |\overline{BD'}|$ .

**Lời giải**

|        |         |        |         |
|--------|---------|--------|---------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|--------|---------|--------|---------|



+) Trong các vector  $\overline{CB}, \overline{C'B'}, \overline{B'C'}, \overline{AD}, \overline{DA}, \overline{A'D'}, \overline{D'A'}, \overline{AC}$  có 6 vector cùng phương với  $\overline{BC}$  là  $\overline{CB}, \overline{C'B'}, \overline{B'C'}, \overline{AD}, \overline{DA}, \overline{A'D'}, \overline{D'A'}$ .

+)  $ACC'A'$  là hình bình hành nên hai vector  $\overline{AC}$  và  $\overline{A'C'}$  cùng hướng.

+) Trong các vector  $\overline{CB}, \overline{C'B'}, \overline{B'C'}, \overline{AD}, \overline{DA}, \overline{A'D'}, \overline{D'A'}, \overline{AC}$  có 3 vector bằng  $\overline{BC}$  là  $\overline{B'C'}, \overline{AD}, \overline{A'D'}$ .



+) Nếu  $A'B \perp (ADC'B')$  thì  $A'B \perp B'C' \Rightarrow A'B \perp BC$ . Khi đó  $A'BCD'$  là hình chữ nhật nên  $|\overrightarrow{A'C}| = |\overrightarrow{BD}|$ .

a) Sai: Trong các vector  $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{A'D'}, \overrightarrow{D'A'}, \overrightarrow{AC}$  có 6 vector cùng phương với  $\overrightarrow{BC}$ .

b) Đúng: Hai vector  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{A'C'}$  cùng hướng.

c) Sai: Trong các vector  $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{A'D'}, \overrightarrow{D'A'}, \overrightarrow{AC}$  có 3 vector bằng  $\overrightarrow{BC}$ .

d) Đúng: Nếu  $A'B \perp (ADC'B')$  thì  $|\overrightarrow{A'C}| = |\overrightarrow{BD}|$ .

**Câu 3:** Cho hình chóp đều  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh bằng 1 và  $O$  là tâm của đáy.

a) Trong các vector  $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}$  có 4 vector cùng hướng với  $\overrightarrow{SO}$ .

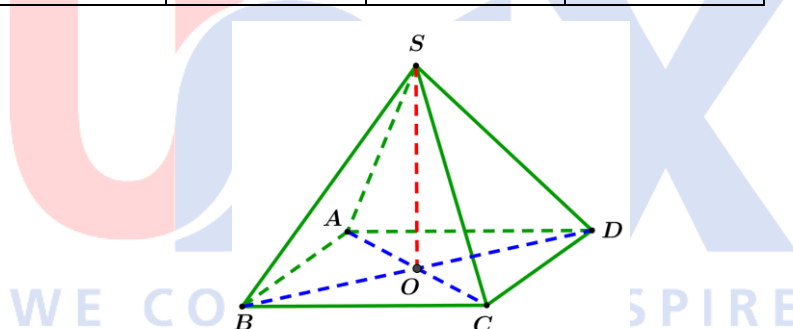
b) Số vector khác  $\vec{0}$  cùng phương với  $\overrightarrow{CD}$  và có điểm đầu, điểm cuối thuộc tập  $\{S, A, B, O\}$  là 2.

c) Độ dài của vector  $\overrightarrow{SO}$  bằng  $\frac{1}{4}$ .

d) Nếu  $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{CA}$  thì  $DSM = 120^\circ$ .

**Lời giải**

| a) Sai | b) Đúng | c) Sai | d) Sai |
|--------|---------|--------|--------|
|--------|---------|--------|--------|



+) Do mỗi đường thẳng  $SA, SB, SC, SD$  đều cắt đường thẳng  $SO$  nên trong các vector  $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}$  không có vector nào cùng hướng với  $\overrightarrow{SO}$ .

+) Các vector khác  $\vec{0}$  cùng phương với  $\overrightarrow{CD}$  và có điểm đầu, điểm cuối thuộc tập  $\{S, A, B, O\}$  là  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}$ . Do đó, số vector khác  $\vec{0}$  cùng phương với  $\overrightarrow{CD}$  và có điểm đầu, điểm cuối thuộc tập  $\{S, A, B, O\}$  là 2.

$$+) |\overrightarrow{SO}| = SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

+) Nếu  $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{CA}$  thì  $SM \parallel CA$ . Mà  $CA \perp SD$  nên  $SM \perp SD$ . Do đó  $DSM = 90^\circ$

a) Sai: Trong các vector  $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}$  không có vector nào cùng hướng với  $\overrightarrow{SO}$ .

b) Đúng: Số vector khác  $\vec{0}$  cùng phương với  $\overrightarrow{CD}$  và có điểm đầu, điểm cuối thuộc tập  $\{S, A, B, O\}$  là 2.



c) Sai: Độ dài của vectơ  $\overrightarrow{SO}$  bằng  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

d) Sai: Nếu  $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{CA}$  thì  $\angle DSM = 90^\circ$ .

**Câu 4:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ , có độ dài các cạnh bằng 1.

a)  $|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'}| = \sqrt{2}$ .

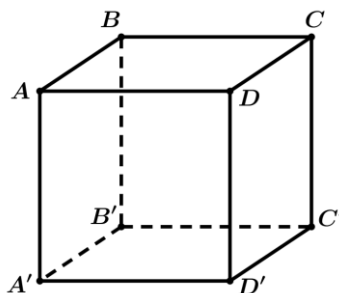
b)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}| = 3$ .

c)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'A}| = \sqrt{3}$ .

d)  $|\overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{C'C}| = \sqrt{3}$ .

**Lời giải**

|         |        |        |         |
|---------|--------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Đúng |
|---------|--------|--------|---------|



a) Đúng vì  $|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'}| = |\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}| = \sqrt{2}$ .

b) Sai vì  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}| = \sqrt{3}$ .

c) Sai vì  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'A}| = \sqrt{2}$ .

d) Đúng vì  $|\overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{C'C}| = |\overrightarrow{A'C}| = \sqrt{3}$ .

**Câu 5:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $\sqrt{2}$ .

a)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}| = 2\sqrt{2}$ .

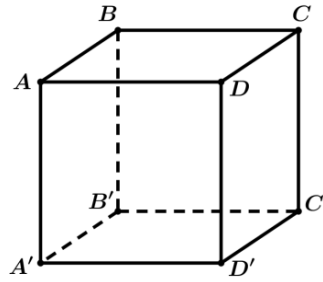
b)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{D'C'} - \overrightarrow{A'B'}| = \sqrt{2}$ .

c)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'}| = 4$ .

d)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'}| = 3\sqrt{2}$ .

**Lời giải**

|        |         |        |        |
|--------|---------|--------|--------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Sai | d) Sai |
|--------|---------|--------|--------|



- +)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}| = |\vec{0}| = 0$ .
- +)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{D'C'} - \overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{D'C'}| = \sqrt{2}$ .
- +)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ .
- +)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}| = |\overrightarrow{AC'}| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ .

a) Sai:  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}| = 0$ .

b) Đúng:  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{D'C'} - \overrightarrow{A'B'}| = \sqrt{2}$ .

c) Sai:  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'}| = 2$ .

d) Sai:  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'}| = \sqrt{6}$ .

**Câu 6:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ .

b)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{AD}|$ .

c)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ .

d)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$  với  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ .

**Lời giải**

| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Đúng |
|---------|--------|---------|---------|
|---------|--------|---------|---------|

a) Đúng vì  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ .

b) Sai vì  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{AD}|$ .

c) Đúng vì  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ .

d) Đúng vì  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{AG}$ .

**Câu 7:** Cho lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ ,  $O$  là giao điểm của  $BC'$  và  $B'C$ .

a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} - \overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{BC'}$ .

b)  $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{AB}$ .

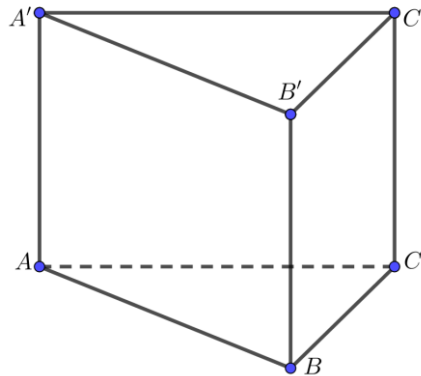
c)  $\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{B'C'}$ .



d) Nếu  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG}$  thì  $G \equiv O$ .

**Lời giải**

|         |         |         |        |
|---------|---------|---------|--------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|---------|---------|---------|--------|



+)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} - \overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{BC'}$ .

+)  $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{AB}$ .

+)  $\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{B'C'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'B} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$ .

+) Gọi  $D'$  là đỉnh của hình bình hành  $A'B'D'C'$ .

Theo quy tắc hình hộp,  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD'} = 2\overrightarrow{AG}$ .

a) Đúng:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} - \overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{BC'}$ .

b) Đúng:  $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{AB}$ .

c) Đúng:  $\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{B'C'}$ .

d) Sai:  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AG}$ .

**Câu 8:** Cho tứ diện  $AB = AC = AD = 1$  và  $BAC = BAD = 60^\circ$ ,  $CAD = 90^\circ$ . Lấy điểm  $E$  thuộc cạnh  $AB$  sao cho  $AE = 3EB$  và  $F$  là trung điểm cạnh  $CD$ .

a)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ .

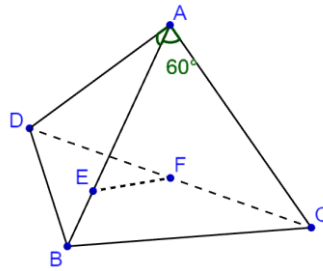
b)  $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = 1$ .

c)  $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ .

d)  $EF = \frac{\sqrt{5}}{4}$ .

**Lời giải**

|        |         |        |         |
|--------|---------|--------|---------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|--------|---------|--------|---------|



a) **SAI.**

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$$

b) **ĐÚNG.**

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ + AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ = 1.$$

c) **SAI.**

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} - \frac{3}{4} \overrightarrow{AB}.$$

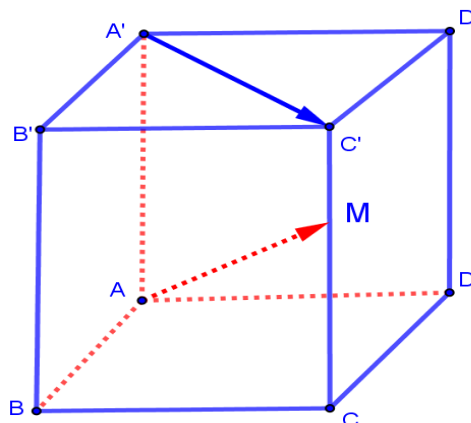
d) **ĐÚNG.**

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} - \frac{3}{4} \overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow EF^2 = \frac{1}{4} AC^2 + \frac{1}{4} AD^2 + \frac{9}{16} AB^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{3}{4} \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{16} - \frac{3}{4} = \frac{5}{16}$$

$$\text{Vậy } EF = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

**Câu 9:** Trong không gian Oxyz, hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh  $AB=1, AD=2, AA'=3$ . Gọi  $M$  là điểm trên cạnh  $CC'$  sao cho  $CM=2MC'$  như hình vẽ. Khi đó:



a)  $\overrightarrow{AA'} = \frac{3}{2} \overrightarrow{CM}.$

b)  $\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'C'}) = \frac{2}{3}.$

c)  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AA'}.$



d)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B'D} = 0$

**Lời giải**

| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Sai |
|---------|--------|--------|--------|
|---------|--------|--------|--------|

a) Ta có  $CM = 2MC' \Rightarrow CM = \frac{2}{3}CC' = \frac{2}{3}AA' \Rightarrow \overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CM}$ .

Vậy a đúng.

b) Ta có  $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5}$ ;  $CM = \frac{2}{3}AA' = 2$ . Suy ra  $AM = \sqrt{AC^2 + MC^2} = \sqrt{5+4} = 3$

Suy ra  $\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'C'}) = \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) = \cos MAC = \frac{AC}{AM} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Vậy b sai.

c) Ta có  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

Vậy c Sai.

d)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B'D} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}\right) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB'}) = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}\right) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'})$   
 $= -\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 - \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}^2 = -1 + 2^2 - \frac{2}{3} \cdot 3^2 = -3 \neq 0$ . Vậy d Sai.

**Câu 10:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Các điểm  $M, N$  lần lượt thuộc các đường thẳng  $CA$  và  $DC'$  sao cho  $\overrightarrow{MC} = m\overrightarrow{MA}$ ;  $\overrightarrow{ND} = m\overrightarrow{NC'}$ . Đặt  $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ;  $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$ ;  $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$ .

a)  $\overrightarrow{BD'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ .

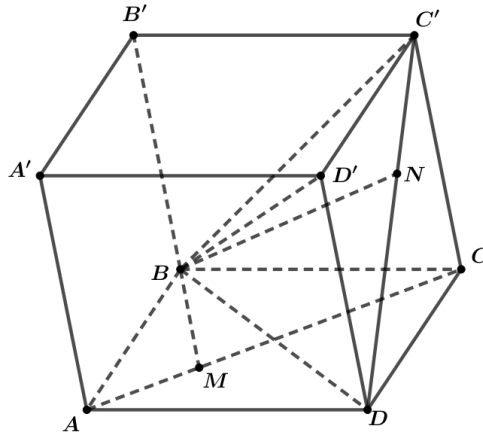
b)  $\overrightarrow{BM} = \frac{\vec{c} - m\vec{a}}{1-m}$ .

c)  $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{1-m}\vec{a} - \frac{m}{1-m}\vec{b} + \vec{c}$ .

d) Khi  $m = \frac{1}{2}$  thì  $MN \parallel BD'$ .

**Lời giải**

| a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|--------|---------|---------|--------|
|--------|---------|---------|--------|



a) Sai.

Ta có  $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ .

b) Đúng.

Ta có  $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC} - m\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BC} - m(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA})$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + m\overrightarrow{BM} - m\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} - m\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} - m\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow (1-m)\overrightarrow{BM} = \vec{c} - m\vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{\vec{c} - m\vec{a}}{1-m}$$

c) Đúng.

Ta có  $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{BD} - m\overrightarrow{NC'} = \overrightarrow{BD} - m(\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BC'})$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BD} + m\overrightarrow{BN} - m\overrightarrow{BC'} \Leftrightarrow (1-m)\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BD} - m\overrightarrow{BC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{BN} = \frac{\overrightarrow{BD} - m\overrightarrow{BC'}}{1-m}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BN} = \frac{(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) - m(\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BC})}{1-m} = \frac{\vec{a} + \vec{c} - m(\vec{b} + \vec{c})}{1-m} = \frac{1}{1-m}\vec{a} - \frac{m}{1-m}\vec{b} + \frac{1-m}{1-m}\vec{c}$$

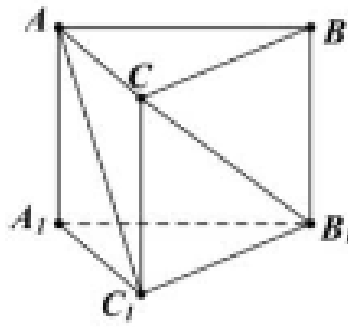
d) Sai.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \frac{1+m}{1-m}\vec{a} - \frac{m}{1-m}\vec{b} - \frac{m}{1-m}\vec{c}$$

Vì  $BD'$ ,  $MN$  chéo nhau nên  $MN \parallel BD' \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BD'} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = k\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1+m}{1-m} = k \\ \frac{-m}{1-m} = k \\ \frac{-m}{1-m} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+m = (1-m)k \\ -m = (1-m)k \end{cases} \Leftrightarrow -m = 1+m \Leftrightarrow m = \frac{-1}{2}$$

**Câu 11:** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A_1B_1C_1$  có cạnh đáy bằng  $x$  và chiều cao bằng  $y$ . (Tham khảo hình vẽ). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



- a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}x^2$ .
- b)  $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BB_1}$ .
- c)  $\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA_1}$ .
- d) Góc  $(AC_1, CB_1) > 60^\circ$  khi  $\frac{y}{x} < \sqrt{2}$ .

**Lời giải**

| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|---------|---------|--------|---------|
|---------|---------|--------|---------|

a) Đúng

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}x^2.$$

b) Đúng

Ta có:  $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1}$  mà  $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{BB_1}$  (vì lăng trụ đứng có các cạnh bên song song và bằng nhau), nên đẳng thức này đúng.

c) Sai

$$\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC} \text{ sai vì } \overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AC}.$$

d) Đúng

$$\cos(AC_1, CB_1) = \left| \cos(\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{CB_1}) \right| = \frac{|\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{CB_1}|}{AC_1 \cdot CB_1}$$

$$\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{CB_1} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1})(\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CC_1}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{CB_1} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CC_1} = -\frac{x^2}{2} + y^2; \quad AC_1 = CB_1 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

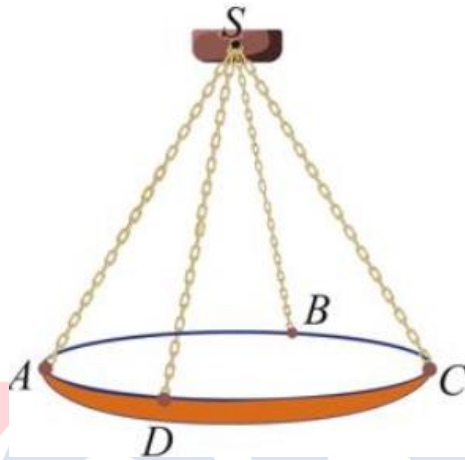
$$\text{Do đó } \cos(AC_1, CB_1) = \frac{\left| -\frac{x^2}{2} + y^2 \right|}{x^2 + y^2}.$$



$$\text{Do } (AC_1, CB_1) > 60^\circ \text{ nên } \cos(AC_1, CB_1) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\left| -\frac{x^2}{2} + y^2 \right|}{x^2 + y^2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \left| -\frac{x^2}{2} + y^2 \right| < x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - y^2 < -x^2 + 2y^2 < x^2 + y^2 \Leftrightarrow \frac{y}{x} < \sqrt{2}.$$

**Câu 12:** Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng  $m = 5\text{kg}$  được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích  $SA, SB, SC, SD$  sao cho  $SABCD$  là hình chóp tứ giác đều có  $ASC = 60^\circ$  (Hình vẽ). Biết  $\vec{P} = m\vec{g}$  trong đó  $\vec{g}$  là gia tốc rơi tự do có độ lớn  $10\text{ m/s}^2$ ,  $\vec{P}$  là trọng lực tác động vật có đơn vị là  $N$ ,  $m$  là khối lượng của vật có đơn vị  $kg$ .



- a)  $\vec{SA}, \vec{SB}, \vec{SC}, \vec{SD}$  là bốn vector đồng phẳng  
 b)  $|\vec{SA}| = |\vec{SB}| = |\vec{SC}| = |\vec{SD}|$   
 c) Độ lớn của trọng lực tác động lên đèn chùm bằng  $50N$   
 d) Độ lớn của lực căng cho mỗi sợi dây xích bằng  $\frac{25\sqrt{3}}{2}N$ .

**Lời giải**

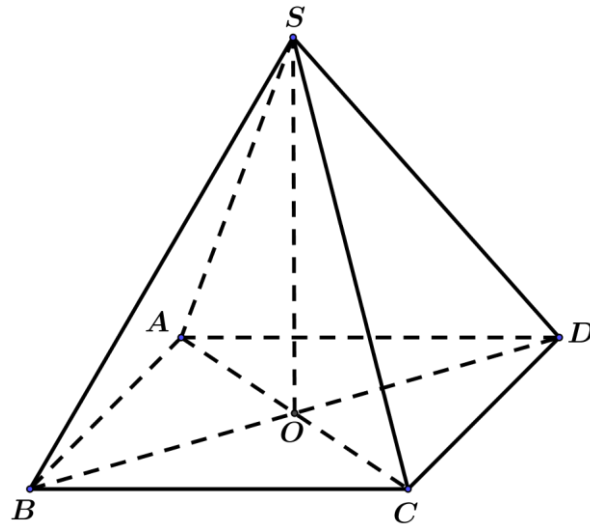
|        |         |         |        |
|--------|---------|---------|--------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|--------|---------|---------|--------|

a) **Sai.**  $\vec{SA}, \vec{SB}, \vec{SC}, \vec{SD}$  là bốn vector không đồng phẳng.

Giả sử  $\vec{SA}, \vec{SB}, \vec{SC}, \vec{SD}$  đồng phẳng, khi đó 3 vector  $\vec{SA}, \vec{SB}, \vec{SC}$  đồng phẳng  $\Leftrightarrow$  4 điểm  $S, A, B, C$  đồng phẳng (vô lí). Vậy  $\vec{SA}, \vec{SB}, \vec{SC}, \vec{SD}$  là bốn vector không đồng phẳng.

b) **Đúng.**  $|\vec{SA}| = |\vec{SB}| = |\vec{SC}| = |\vec{SD}|$  vì  $SABCD$  là hình chóp tứ giác đều nên  $SA = SB = SC = SD$ .

c) **Đúng.** Độ lớn của trọng lực tác động lên đèn chùm bằng  $50N$   
 $P = mg = 5.10 = 50(N)$ .



d) Sai.

$S.ABCD$  là hình chóp tứ giác đều nên  $SA = SB = SC = SD$ , mà  $ASC = 60^\circ$  nên  $\triangle SAC$  đều. Gọi  $O$  giao điểm của  $AC$  và  $BD$ .

Hợp lực của bốn sợi dây xích là  $\vec{F} = \vec{SA} + \vec{SC} + \vec{SB} + \vec{SD} = 2\vec{SO} + 2\vec{SO} = 4\vec{SO}$

$$\Rightarrow |\vec{F}| = |4\vec{SO}| = 4.SO.$$

Để đèn chùm đứng yên thì hợp lực phải cân bằng với trọng lực nên

$$4.SO = P \Rightarrow SO = \frac{P}{4} = \frac{50}{4} = 12,5(N).$$

$$\text{Tam giác } SAC \text{ có } SO = \frac{SA\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = \frac{2SO}{\sqrt{3}} = \frac{25\sqrt{3}}{3}$$

Vậy độ lớn của lực căng cho mỗi sợi dây xích bằng  $\frac{25\sqrt{3}}{3} N$ .

**Câu 13:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng 6.

a)  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = -36$ .

b)  $|\vec{AB} + \vec{AD}| = 6\sqrt{2}$ .

c)  $\vec{AB} \cdot \vec{CC'} = 0$ .

d)  $|\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'}| = 6\sqrt{3}$ .

**Lời giải**

|         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Đúng | d) Đúng |
|---------|---------|---------|---------|



a) Đúng.

Ta có  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}^2 = -6^2 = -36$

b) Đúng.

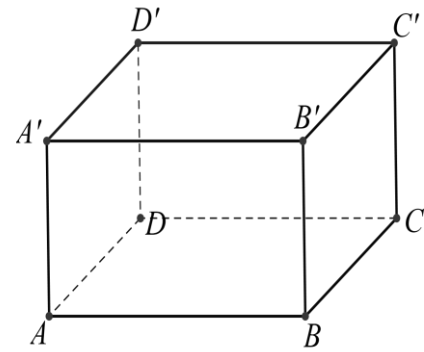
$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = 6\sqrt{2}.$

c) Đúng.

Ta có  $CC' \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} = 0.$

d) Đúng.

$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}| = |\overrightarrow{AC'}| = AC' = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2} = 6\sqrt{3}.$



**Câu 14:** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có độ dài cạnh là 3,  $M$  là trung điểm  $BC$ . Khi đó:

a)  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

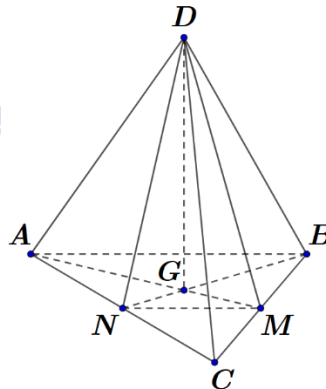
b)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ.$

c)  $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$

d)  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MD}) = \frac{\sqrt{3}}{6}$

**Lời giải**

|        |         |         |        |
|--------|---------|---------|--------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|--------|---------|---------|--------|



a) Sai.

b) Đúng.

Ta có:  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$  (Do tam giác  $ABC$  đều).

c) Đúng.

$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}).$

d) Sai.

Gọi  $N$  là trung điểm  $AC$ , khi đó:



$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MD}) = \cos(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{MD}) = -\cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MD}) = -\cos DMN = -\frac{MD^2 + MN^2 - DN^2}{2MD \cdot MN}.$$

Ta có:  $DN = DM = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$  và  $MN = \frac{AB}{2} = \frac{3}{2}$ .

Khi đó,  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MD}) = -\cos DMN = -\frac{MD^2 + MN^2 - DN^2}{2MD \cdot MN} = \frac{-\sqrt{3}}{6}$ .

**Câu 15:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật với  $AB = 2$ ,  $BC = \sqrt{5}$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy mặt  $(ABCD)$  và  $SA = 3$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $SCD$ .

a)  $|\overrightarrow{AG}| = AG$ .

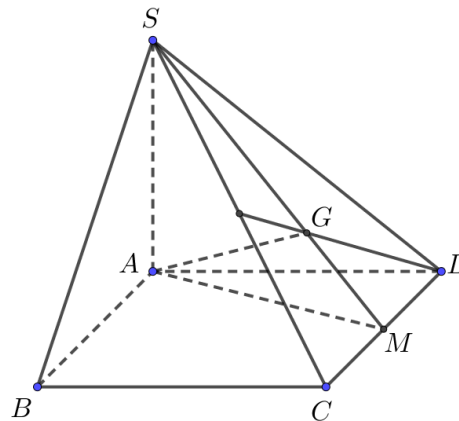
b)  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ .

c)  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ .

d) cosin của góc giữa hai véc tơ  $\overrightarrow{AG}$  và  $\overrightarrow{BD}$  bằng  $\frac{2}{\sqrt{33}}$ .

**Lời giải**

|         |         |         |        |
|---------|---------|---------|--------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|---------|---------|---------|--------|



(a) Ta có:  $|\overrightarrow{AG}| = AG$ .

(b) Ta có:  $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$ .

(c) Gọi  $M$  là trung điểm của  $CD$ .

Ta có:  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MG}$

$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} - \frac{1}{3}\overrightarrow{SM}$$

$$= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AS})$$

$$= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AS}$$



$$= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \frac{1}{3}\overrightarrow{AS}$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}.$$

(d) Ta có:  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right)(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}AB^2 + \frac{2}{3}AD^2 - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot 2^2 + \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{5})^2 = 2. \text{ (Do } AB, AC, AS \text{ đôi một vuông góc)}$$

Ta có:  $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 3.$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

$$\Rightarrow AG^2 = \frac{1}{9}AS^2 + \frac{1}{9}AB^2 + \frac{4}{9}AD^2 + \frac{2}{9}\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow AG^2 = \frac{1}{9} \cdot 3^2 + \frac{1}{9} \cdot 2^2 + \frac{4}{9} \cdot (\sqrt{5})^2 \text{ (Do } AB, AC, AS \text{ đôi một vuông góc)}$$

$$\Rightarrow AG = \frac{\sqrt{33}}{3}.$$

Do đó:  $\cos(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD}}{AG \cdot BD} = \frac{2}{\frac{\sqrt{33}}{3} \cdot 3} = \frac{6}{\sqrt{33}}.$

**Câu 16:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ .

a)  $\overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'}.$

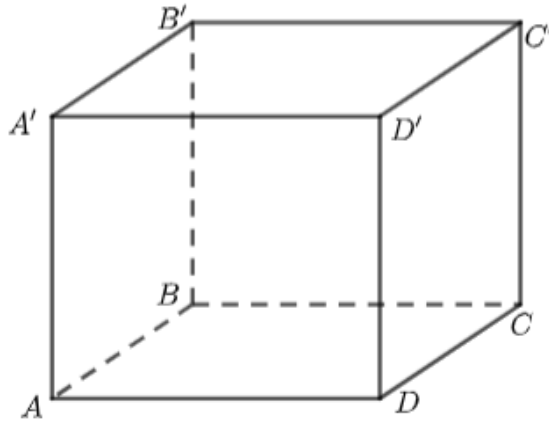
b)  $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A'}.$

c)  $(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{CD'}) = 45^\circ.$

d)  $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2\sqrt{2}.$

**Lời giải**

|         |        |         |        |
|---------|--------|---------|--------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|---------|--------|---------|--------|



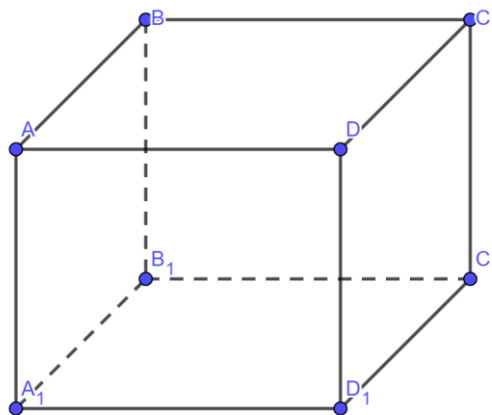
- a) Đúng do quy tắc hình hộp.
- b) Sai do  $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A'} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$ : Vô lý.
- c) Đúng do  $(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{CD'}) = (\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BA'}) = 45^\circ$ .
- d) Sai do  $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{BC} = DB \cdot BC \cdot \cos 135^\circ = -a^2 \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -a^2$ .

**Câu 17:** Cho hình lập phương  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  cạnh bằng  $a$ .

- a)  $|\overrightarrow{D_1A_1} + \overrightarrow{B_1B}| = a\sqrt{3}$ .
- b)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AC_1}$ .
- c)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC_1} = a^2$ .
- d) Số vector bằng  $\overrightarrow{AB}$  có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của hình lập phương đã cho là 5.

**Lời giải**

|        |         |         |        |
|--------|---------|---------|--------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|--------|---------|---------|--------|



a) Sai.

Ta có  $\overrightarrow{D_1A_1} + \overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{C_1B} \Rightarrow |\overrightarrow{D_1A_1} + \overrightarrow{B_1B}| = |\overrightarrow{C_1B}| = a\sqrt{2}$ .

b) Đúng.



Ta có  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC_1}$ .

c) Đúng.

Ta có tứ giác  $ABB_1A_1$  là hình vuông nên  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AA_1} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0$ .

Ta có  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC_1} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1}) = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} = AB^2 = a^2$ .

d) Sai.

Ta có  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D_1C_1}$ .

Do đó, có 3 vector bằng  $\overrightarrow{AB}$  có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của hình lập phương.

**Câu 18:** Trong không gian cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $I$  là tâm của hình vuông  $ABCD$ ,  $G$  là trọng tâm của tam giác  $AB'C$ .

a)  $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ .

b)  $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{BI} = 0$ .

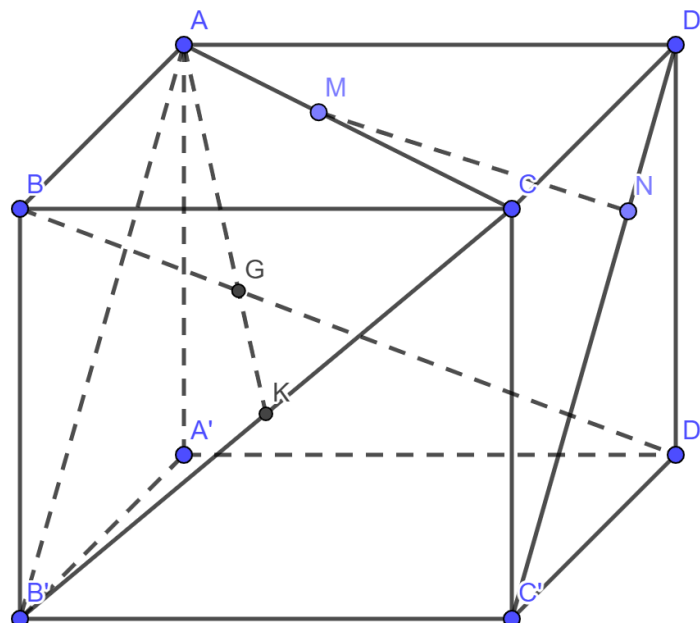
c)  $\overrightarrow{BD'} = 2\overrightarrow{BG}$ .

d) Gọi  $M$  và  $N$  là hai điểm lần lượt nằm trên  $AC$  và  $DC'$  sao cho  $MN \parallel BD'$ . Khi đó  $\frac{MN}{BD'} = \frac{m}{n}$  (

$m, n \in \mathbb{Z}; n \neq 0; \frac{m}{n}$  tối giản) thỏa mãn  $2m + 3n = 13$ .

Lời giải

|         |         |        |        |
|---------|---------|--------|--------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Sai |
|---------|---------|--------|--------|



a) Đúng (Tính chất hình hộp)

b) Đúng.

Ta có



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{BI} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) \cdot \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AD})\end{aligned}$$

Vì hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  nên  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ .

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2) = \frac{1}{2}(AB^2 - AD^2) = 0.$$

c) Sai.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'D'} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}.$$

Gọi  $K$  là trung điểm của  $B'C$ . Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BG} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} \\ &= -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC}) = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{BD'} = 3\overrightarrow{BG}$$

d) Sai.

$$\text{Đặt } \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{C'N} = y\overrightarrow{C'D}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{C'N} = -x\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{C'D} \\ &= -x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + y(\overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{C'D}) \\ &= -x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + y(-\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB}) \\ &= (1-x-y)\overrightarrow{AB} + (1-y)\overrightarrow{AA'} + (1-x)\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

$$\text{Đề } MN \parallel BD' \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BD'}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x-y}{-1} = \frac{1-y}{1} = \frac{1-x}{1} \Leftrightarrow x = y = \frac{2}{3} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD'}$$

$$\Rightarrow m = 1, n = 3 \Rightarrow 2m + 3n = 11.$$

**Câu 19:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Các điểm  $M, N, I$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD, MN$  và  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a)  $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MN}$ .

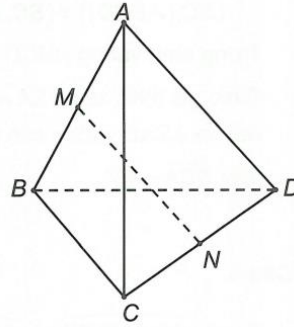
b)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$ .

c)  $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 3\overrightarrow{IG}$ .

d)  $2\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$ .

**Lời giải**

|        |         |         |        |
|--------|---------|---------|--------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|--------|---------|---------|--------|



+) Vì  $N$  là trung điểm của  $CD$  nên  $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN}$ .

+) Ta có :  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) = 2\overrightarrow{MN} + \vec{0} = 2\overrightarrow{MN}$ .

+) Vì  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$  nên  $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 3\overrightarrow{IG}$ .

+) Vì  $I$  là trung điểm của  $MN$  nên

$$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{IG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{IG} \Rightarrow 2\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IG} \neq \vec{0}.$$

a) Sai:  $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN}$ .

b) Đúng:  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$ .

c) Đúng:  $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 3\overrightarrow{IG}$ .

d) Sai:  $2\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IG} \neq \vec{0}$ .

**Câu 20:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ .

a)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{D'C'}) = 0^\circ$ .

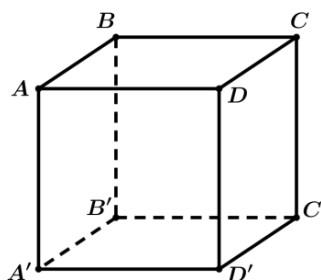
b)  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{D'A'}) = 0^\circ$ .

c)  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{C'B'}) = 45^\circ$ .

d)  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'B}) = 120^\circ$ .

**Lời giải**

|         |        |        |        |
|---------|--------|--------|--------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Sai |
|---------|--------|--------|--------|





- +) Hai vector  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{D'C'}$  cùng hướng nên  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{D'C'}) = 0^\circ$ .
- +) Hai vector  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{D'A'}$  ngược hướng nên  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{D'A'}) = 180^\circ$ .
- +)  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{C'B'}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ .
- +)  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'B}) = (\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B}) = \angle BA'C' = 60^\circ$ .
- a) Đúng:  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{D'C'}) = 0^\circ$ .
- b) Sai:  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{D'A'}) = 180^\circ$ .
- c) Sai:  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{C'B'}) = 135^\circ$ .
- d) Sai:  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'B}) = 60^\circ$ .

**Câu 21:** Trong không gian, cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng có độ dài bằng 1 và  $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$ .

- a)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$ .
- b)  $(\vec{a} + 2\vec{b})(\vec{a} - 3\vec{b}) = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ .
- c)  $(\vec{a} - \vec{b})^2 = 0$ .
- d) Hai vector  $\vec{a} + \sqrt{3}\vec{b}$  và  $\sqrt{3}\vec{a} - \vec{b}$  không vuông góc với nhau.

**Lời giải**

|        |        |        |         |
|--------|--------|--------|---------|
| a) Sai | b) Sai | c) Sai | d) Đúng |
|--------|--------|--------|---------|

- +)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- +)  $(\vec{a} + 2\vec{b})(\vec{a} - 3\vec{b}) = \vec{a}^2 - 6\vec{b}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 - 6 - \frac{\sqrt{3}}{2} = -5 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- +)  $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 1 - \sqrt{3} + 1 = 2 - \sqrt{3}$ .
- +)  $(\vec{a} + \sqrt{3}\vec{b})(\sqrt{3}\vec{a} - \vec{b}) = \sqrt{3}\vec{a}^2 - \sqrt{3}\vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3} \neq 0$ .

Suy ra hai vector  $\vec{a} + \sqrt{3}\vec{b}$  và  $\sqrt{3}\vec{a} - \vec{b}$  không vuông góc với nhau.

- a) Sai:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- b) Sai:  $(\vec{a} + 2\vec{b})(\vec{a} - 3\vec{b}) = -5 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- c) Sai:  $(\vec{a} - \vec{b})^2 = 2 - \sqrt{3}$ .



d) Đúng: Hai vector  $\vec{a} + \sqrt{3}\vec{b}$  và  $\sqrt{3}\vec{a} - \vec{b}$  không vuông góc với nhau.

**Câu 22:** Cho tứ diện đều  $ABCD$  cạnh bằng 1. Các điểm  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ .

a)  $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 1$ .

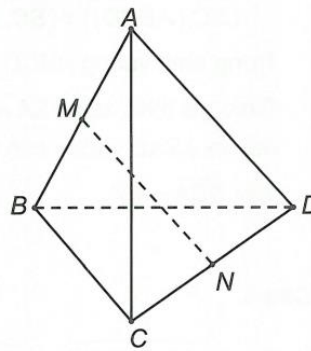
b)  $\vec{AB}(\vec{AB} + \vec{CA}) = \frac{1}{2}$ .

c)  $AB \perp CD$ .

d) Góc giữa đường thẳng  $MN$  với đường thẳng  $BC$  bằng  $30^\circ$ .

**Lời giải**

|        |         |         |        |
|--------|---------|---------|--------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|--------|---------|---------|--------|



+)  $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ .

+)  $\vec{AB}(\vec{AB} + \vec{CA}) = AB^2 - \vec{AB} \cdot \vec{AC} = a^2 - AB \cdot AC \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = 1^2 - 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ .

+) Vì  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot (\vec{AD} - \vec{AC}) = \vec{AB} \cdot \vec{AD} - \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 1^2 \cdot \cos 60^\circ - 1^2 \cdot \cos 60^\circ = 0$

suy ra  $AB \perp CD$ .

+) Đặt  $\vec{AD} = \vec{a}, \vec{AB} = \vec{b}, \vec{AC} = \vec{c}$ .

Khi đó, ta có  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}) = 60^\circ$ .

Ta có  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}$ .

Vì  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$  nên  $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b})$ .

$MN^2 = \frac{1}{4}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c}) = \frac{1}{2} \Rightarrow MN = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$\vec{MN} \cdot \vec{BC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b})(-\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(MN, BC) = \frac{\vec{MN} \cdot \vec{BC}}{|\vec{MN}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{\frac{1}{2}}{1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .



Vậy góc giữa hai đường thẳng  $MN$  và  $BC$  bằng  $45^\circ$ .

a) Sai:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}$ .

b) Đúng:  $\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}$ .

c) Đúng:  $AB \perp CD$ .

d) Sai: Góc giữa đường thẳng  $MN$  với đường thẳng  $BC$  bằng  $45^\circ$ .

**Câu 23:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a)  $\overrightarrow{AC'}^2 = 3a^2$ .

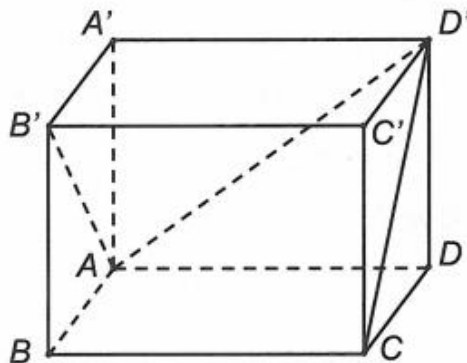
b)  $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{AB'} = a^2$ .

c)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'A'} = a^2$ .

d) Biểu thức  $P = MA^2 + MB^2 + MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi  $M$  là tâm hình vuông  $ABCD$ .

Lời giải

| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Sai |
|---------|---------|--------|--------|
|---------|---------|--------|--------|



+)  $\overrightarrow{AC'}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})^2$

$= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AA'}^2 \left( \text{do } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \right)$

$= 3a^2$ .

+)  $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{AB'} = (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'D'}) \cdot (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'}) = \overrightarrow{AA'}^2 = a^2 \left( \text{do } \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'D'} = 0 \right)$ .

+) Ta có:  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'A'} = -\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = -\left( a^2 \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} \right) = -a^2$ .

+) Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC \Rightarrow G$  cố định và  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .



$$\begin{aligned} P &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2 \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow M \equiv G$ .

Vậy  $P_{\min} = GA^2 + GB^2 + GC^2$  với  $M \equiv G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

a) Đúng:  $\overrightarrow{AC'}^2 = 3a^2$ .

b) Đúng:  $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{AB'} = a^2$ .

c) Sai:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'A'} = -a^2$ .

d) Sai: Biểu thức  $P = MA^2 + MB^2 + MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi  $M$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

**Câu 24:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh bên và đáy đều bằng  $a$  và  $ABCD$  là hình vuông. Gọi  $M$  là trung điểm của  $CD$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a)  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ .

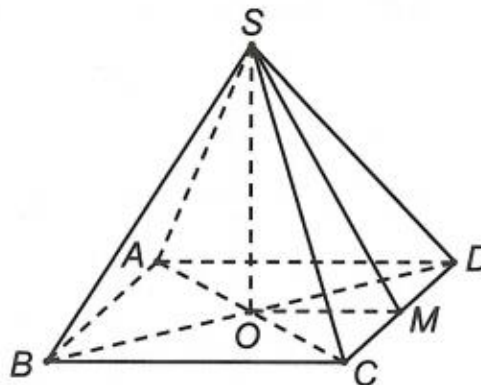
b)  $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{CD}$ .

c)  $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{2}$ .

d)  $\cos(CN, SB) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Lời giải

|        |         |         |        |
|--------|---------|---------|--------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|--------|---------|---------|--------|



+) Ta có:  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{BC^2}{2} = -\frac{a^2}{2}$ .

+) Ta có:  $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{a^2}{2}$ ;  $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CD} = -\frac{a^2}{2}$ .

+) Do tất cả các cạnh của hình chóp bằng nhau nên hình chóp  $S.ABCD$  là hình chóp đều.



Suy ra  $\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OS}; \overrightarrow{OD}$  đôi một vuông góc.

Do  $M$  là trung điểm của  $CD$  nên ta có:

$$\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OS} \text{ và } \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}.$$

Do  $\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OS}; \overrightarrow{OD}$  đôi một vuông góc với nhau nên

$$\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}OC^2 + \frac{1}{2}OD^2 = OC^2 = \frac{a^2}{2}.$$

+) Ta có :  $\cos(\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{BS}) = \frac{\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{BS}}{CN \cdot BS}.$

Mà  $\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{BS} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{CD}) \cdot \overrightarrow{BS} = \frac{1}{2} \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BS} = \frac{a^2}{2}.$

nên  $\cos(\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{BS}) = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$  Suy ra  $\cos(CN, SB) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

a) Sai:  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{a^2}{2}.$

b) Đúng:  $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{CD}.$

c) Đúng:  $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{2}.$

d) Sai:  $\cos(CN, SB) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

**Câu 25:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ .

a) “  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{BB'}$  ”.

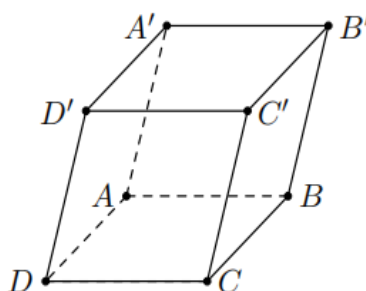
b) “  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  ”.

c) “  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BD'}$  ”.

d) “  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$  ”.

**Lời giải**

|         |        |        |         |
|---------|--------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Đúng |
|---------|--------|--------|---------|





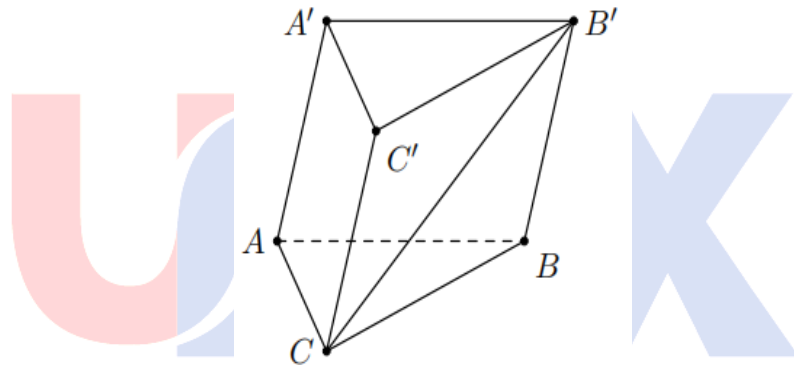
- + a) đúng: Vì  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$  và  $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'}$ .
- + b) sai: Vì  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .
- + c) sai: Vì  $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AD'} \rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{D'B}$ .
- + d) đúng: Vì
- $$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} \text{ (Quy tắc hình hộp).}$$

**Câu 26:** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ .

- a) “  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{BC}$  ”.
- b) “ Góc giữa  $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AA'}) = (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CC'}) = (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BB'})$  ”.
- c) “  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AC'}$  ”.
- d) “Góc giữa  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AA'}) = (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AA'})$  ”.

**Lời giải**

| a) Đúng | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|---------|---------|---------|--------|
|---------|---------|---------|--------|



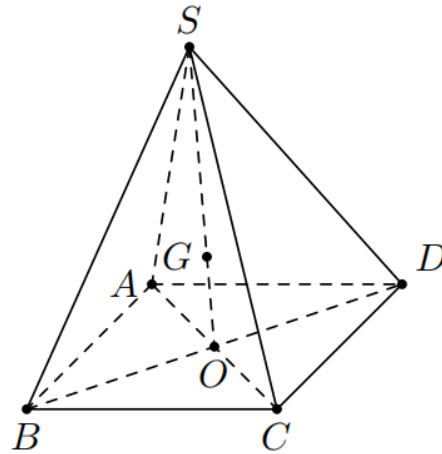
- + a) đúng: Vì  $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC} \rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ .
- + b) đúng: Vì  $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$ .
- + c) đúng: Vì  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AC'}$ .
- + d) sai: Vì nếu  $\alpha = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AA'})$  thì  $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AA'}) = 180^\circ - \alpha$ .

**Câu 27:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $G$  là điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ .

- a) “  $\overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}$  ”.
- b) “ Ba điểm  $G, S, O$  thẳng hàng ”.
- c) “  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$  ”.
- d) “  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 8\overrightarrow{GO}$  ”.

**Lời giải**

| a) Đúng | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|---------|---------|---------|--------|
|---------|---------|---------|--------|



+  $O$  là tâm hình bình hành  $ABCD \rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

+ Mà  $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS} + 4\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS} + 4\overrightarrow{GO} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG} \text{ (Ba điểm } G, S, O \text{ thẳng hàng).}$$

+ Lại có  $\overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OS} = 4\overrightarrow{OG}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GO} - 4\overrightarrow{OG} = -\overrightarrow{OS} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{GO} = \overrightarrow{SO}$$

+ Mà  $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO} = 10\overrightarrow{GO}$ .

**Câu 28:** Cho tứ diện  $ABCD$  cạnh  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $CD$ .

a) “  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$  ”.

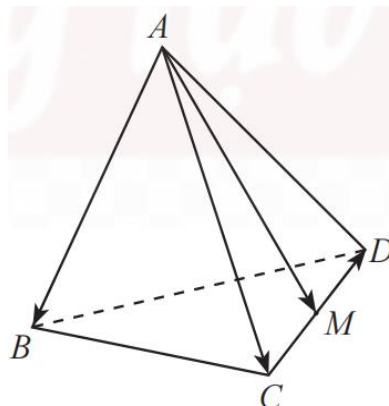
b) “  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{-a^2}{2}$  ”.

c) “Góc giữa  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = 90^\circ$  ”.

d) “  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CD}$  ”.

**Lời giải**

|         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Đúng | d) Đúng |
|---------|---------|---------|---------|





+ a) đúng: Vì  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

$$= AB \cdot AC \cdot \cos(\angle BAC) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

→ chứng minh tương tự ta được  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}.$

+ b) sai. Vì  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\right) = \frac{a^2}{2}.$$

+ c) d) đều đúng:

$$\text{Vì } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CD}.$$

$$\text{Mà } AM \perp CD, MB \perp CD \rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \rightarrow AB \perp CD.$$

$$\rightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = 90^\circ.$$

**Câu 29:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $M, N$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AC$  và  $BD$ . Gọi  $G$  là trung điểm của đoạn thẳng  $MN$ .

a)  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$

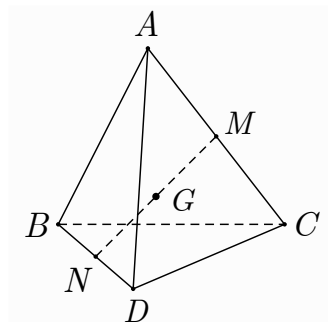
b)  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{MN}$

c)  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

d)  $2\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

**Lời giải**

|         |         |         |        |
|---------|---------|---------|--------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|---------|---------|---------|--------|



$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$  đúng theo tính chất trung điểm đoạn thẳng

$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{MN}$  đúng vì  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{MN}$

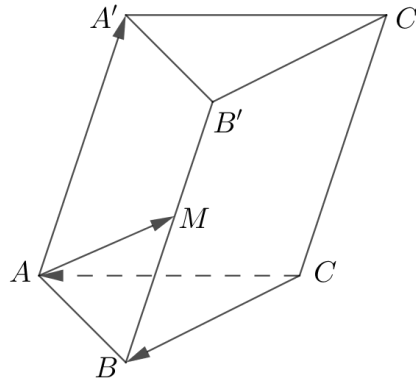
$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$  đúng vì  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}) = \vec{0}.$



$2\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$  sai vì:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}) + (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND}) \\ &= 2\overrightarrow{MN} + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM}) + (\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{ND}) = 2\overrightarrow{MN} + \vec{0} + \vec{0} = 2\overrightarrow{MN}.\end{aligned}$$

**Câu 30:** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ ,  $M$  là trung điểm của  $BB'$ . Đặt  $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$  (Tham khảo hình vẽ).



a)  $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$

b)  $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$

c)  $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$

d)  $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$

WE COACH WE INSPIRE **Lời giải**

|        |        |        |         |
|--------|--------|--------|---------|
| a) Sai | b) Sai | c) Sai | d) Đúng |
|--------|--------|--------|---------|

a) Chọn sai

b) Chọn sai

c) Chọn sai

d) Ta có  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$ . Chọn đúng

**Câu 31:** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BB'$ . Đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{CB} = \vec{c}$ .

a)  $\overrightarrow{AM} = -\vec{b} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}$

b)  $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$

c)  $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$

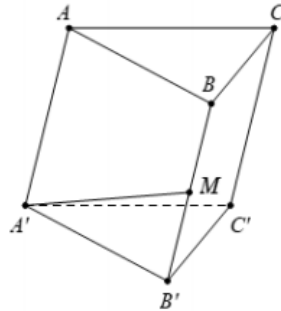


d)  $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$

Lời giải

|         |        |        |        |
|---------|--------|--------|--------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Sai |
|---------|--------|--------|--------|

a)



Vì  $M$  là trung điểm của  $BB' \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$ .

Ta có  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} = -\vec{b} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}$ . Chọn

đúng

b) Chọn sai

c) Chọn sai

d) Chọn sai

**Câu 32:** Trong không gian, cho tứ diện  $ABCD$  có trọng tâm  $G$ .

a)  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

b)  $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$

c)  $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$

d)  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

Lời giải

|         |         |         |        |
|---------|---------|---------|--------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|---------|---------|---------|--------|

a) Đúng: Theo công thức vì  $G$  là trọng tâm tứ diện  $ABCD \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

b) Đúng: Ta có:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OG}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DG})$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

c) Đúng:  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = -\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{BG}$



d) Sai:  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{AO} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{AO} + \frac{1}{4}(4\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$   
 $= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

**Câu 33:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$  và  $G$  là trung điểm  $MN$

a)  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

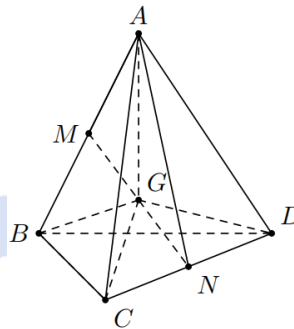
b)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

c)  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$

d)  $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

**Lời giải**

|         |         |        |         |
|---------|---------|--------|---------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|---------|---------|--------|---------|



a) Đúng: Vì  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AB, CD \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM} \\ \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN} \end{cases}$

Mặt khác  $G$  là trung điểm  $MN \rightarrow \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0} \leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ .

b) Đúng: Khi đó  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = 4\overrightarrow{MG}$

c) Sai: Dễ chứng minh được  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

Ta có:  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$ ;  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}$ . Do đó:  $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

d) Đúng

**Câu 34:** Trong không gian, cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AD$  và  $BC, I$  là trung điểm  $MN$ .

a)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$

b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

c)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$

d)  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$

**Lời giải**

|        |         |         |         |
|--------|---------|---------|---------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Đúng |
|--------|---------|---------|---------|



a) Sai: Sử dụng quy tắc ba điểm và quy tắc hiệu, ta có

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}.$$

b) Đúng: Theo quy tắc ba điểm, ta có  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$ .

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

c) Đúng:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$

d) Đúng:  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$

**Câu 35:** Trong không gian, cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai véc-tơ đó là  $45^\circ$ .

a)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

b)  $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = -5 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

c)  $|\vec{a} + \vec{b}| = 2 + \sqrt{2}$ .

d)  $|\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b}| = 0$ .

**Lời giải**

|         |         |        |        |
|---------|---------|--------|--------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Sai |
|---------|---------|--------|--------|

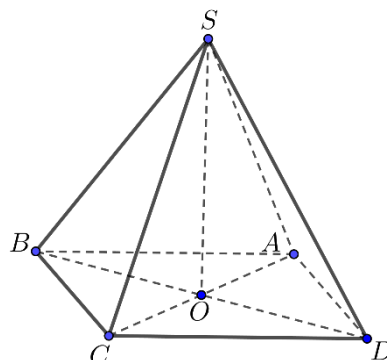
a) Đúng:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

b) Đúng:  $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 6|\vec{b}|^2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 6 = -5 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

c) Sai:  $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2 + \sqrt{2}$  suy ra  $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ .

d) Sai:  $(\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\sqrt{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b}^2 = 1 + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 2$  suy ra  $|\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b}| = \sqrt{2}$ .

**Câu 36:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có  $O$  là tâm của đáy  $ABCD$ , cạnh đáy bằng  $a$ , cạnh bên bằng  $2a$  (tham khảo hình bên).





- a) Góc giữa hai vector  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{CB}$  là  $0^\circ$ .
- b) Góc giữa hai vector  $\overrightarrow{BD}$  và  $\overrightarrow{BO}$  là  $180^\circ$ .
- c) Cosin của góc giữa hai vector  $\overrightarrow{BA}$  và  $\overrightarrow{CS}$  bằng  $\frac{1}{4}$ .
- d) Góc giữa hai vector  $\overrightarrow{AO}$  và  $\overrightarrow{SD}$  bằng  $60^\circ$ .

**Lời giải**

|        |        |         |        |
|--------|--------|---------|--------|
| a) Sai | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|--------|--------|---------|--------|

**a) Sai**

Góc giữa hai vector  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{CB}$  là  $0^\circ$ .

Hai vector  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{CB}$  là hai vector ngược hướng nên góc giữa chúng bằng  $180^\circ$ .

**b) Sai**

Góc giữa hai vector  $\overrightarrow{BD}$  và  $\overrightarrow{BO}$  là  $180^\circ$ .

Hai vector  $\overrightarrow{BD}$  và  $\overrightarrow{BO}$  là hai vector cùng hướng nên góc giữa chúng là  $0^\circ$ .

**c) Đúng**

Cosin của góc giữa hai vector  $\overrightarrow{BA}$  và  $\overrightarrow{CS}$  bằng  $\frac{1}{4}$ .

$$\bullet (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CS}) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CS}) = \angle SCD.$$

- Áp dụng định lý cosin cho tam giác  $SCD$  có

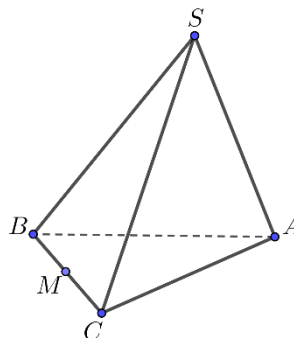
$$\cos \angle SCD = \frac{SC^2 + CD^2 - SD^2}{2SC \cdot CD} = \frac{(2a)^2 + a^2 - (2a)^2}{2 \cdot 2a \cdot a} = \frac{1}{4}$$

**d) Sai**

Góc giữa hai vector  $\overrightarrow{AO}$  và  $\overrightarrow{SD}$  bằng  $60^\circ$ .

Ta có  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{SD} = -\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OS}) = -\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OS} = 0$  nên góc giữa hai vector  $\overrightarrow{AO}$  và  $\overrightarrow{SD}$  bằng  $90^\circ$ .

**Câu 37:** Cho tứ diện đều  $S.ABC$  có tất cả các cạnh bằng  $a$ ,  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ .





- a)  $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC}$
- b)  $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$
- c) Góc giữa  $\overrightarrow{SA}$  và  $\overrightarrow{BC}$  bằng  $90^\circ$
- d)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{SC} = 0$

**Lời giải**

|         |         |         |        |
|---------|---------|---------|--------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|---------|---------|---------|--------|

**a) Đúng**

$$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC}.$$

Ta có  $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \cdot SB \cdot \cos ASB = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}.$

Tương tự,  $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = \frac{a^2}{2}; \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = \frac{a^2}{2}$  nên  $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC}.$

**b) Đúng**

$$\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}.$$

Ta có:  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SA} = -\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}.$

**c) Đúng**

Góc giữa  $\overrightarrow{SA}$  và  $\overrightarrow{BC}$  bằng  $90^\circ.$

Góc giữa  $\overrightarrow{SA}$  và  $\overrightarrow{BC}$  bằng  $90^\circ.$

Ta có  $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SA} = a^2 \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}.$

Suy ra  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{SA} = (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}) \cdot \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SA} = 0$  nên góc giữa  $\overrightarrow{SA}$  và  $\overrightarrow{BC}$  bằng  $90^\circ.$

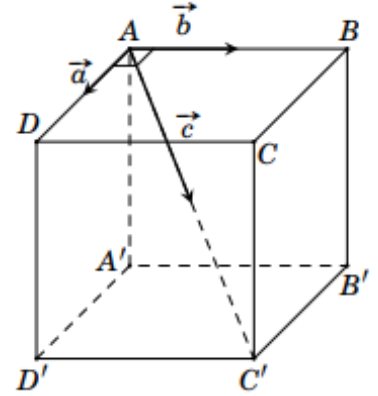
**d) Sai**  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{SC} = 0.$

Ta có  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{SC} = \left( -\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} \right) \cdot \overrightarrow{SC} = -\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SC}$

$$= -\frac{a^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2}a^2 = \frac{a^2}{4}.$$



**Câu 38:** Một chất điểm ở vị trí đỉnh  $A$  của hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Chất điểm chịu tác động bởi ba lực  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  lần lượt cùng hướng với  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC'}$  như hình vẽ. Độ lớn của các lực  $\vec{a}, \vec{b}$  và  $\vec{c}$  tương ứng là 10 N, 10 N và 20 N.



- a)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ .
- b)  $|\vec{a} + \vec{b}| = 20$  N.
- c)  $|\vec{a} + \vec{c}| = |\vec{b} + \vec{c}|$ .
- d)  $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 32,59$  N (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

**Lời giải**

|        |        |         |         |
|--------|--------|---------|---------|
| a) Sai | b) Sai | c) Đúng | d) Đúng |
|--------|--------|---------|---------|

Từ giả thiết ta có  $\vec{a} \perp \vec{b}$ ;  $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \cos DAC' = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;  $\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \cos BAC' = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

a) Sai: Giả sử  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{d}$ . Theo quy tắc hình bình hành thì  $\vec{d}$  cùng hướng với  $\overrightarrow{AC}$  suy ra  $\vec{a} + \vec{b} \neq \vec{c}$

b) Sai:  $|\vec{a} + \vec{b}| = 10\sqrt{2}$  (đường chéo hình vuông cạnh bằng 10).

c) Đúng: Ta có  $\vec{a} + \vec{c}^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 20^2 = 500 + \frac{400\sqrt{3}}{3}$ .

Suy ra  $|\vec{a} + \vec{c}| = \sqrt{500 + \frac{400\sqrt{3}}{3}}$ .

Mặt khác  $(\vec{b} + \vec{c})^2 = |\vec{b}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 20^2 = 500 + \frac{400\sqrt{3}}{3}$ .

Suy ra  $|\vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{500 + \frac{400\sqrt{3}}{3}}$ . Vậy  $|\vec{a} + \vec{c}| = |\vec{b} + \vec{c}|$ .

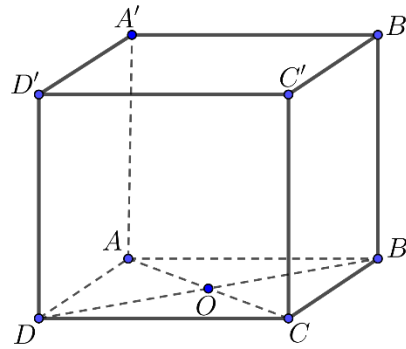
d) Đúng: Giả sử lực tổng hợp là  $\vec{m}$ , tức là  $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ .

Do đó:  $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \Leftrightarrow |\vec{m}|^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 \Leftrightarrow |\vec{m}|^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a}$

$\Leftrightarrow |\vec{m}|^2 = 10^2 + 10^2 + 20^2 + 0 + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow |\vec{m}|^2 = 10^2 + 10^2 + 20^2 + 0 + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow |\vec{m}| \approx 32,59$ .

**Câu 39:** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$  và  $AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ .



a)  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{C'A'}) = (AC, C'A')$

b) Gọi  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{B'C'}$ . Ta có  $(\vec{u}; \vec{v}) = 60^\circ$ .

c) Gọi  $\vec{x} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ ,  $\vec{y} = \overrightarrow{A'C'}$ . Ta có  $(\vec{x}; \vec{y}) = 90^\circ$ .

d)  $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OC'}) = 90^\circ$

*Lời giải*

|        |        |         |        |
|--------|--------|---------|--------|
| a) Sai | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|--------|--------|---------|--------|

**a) Sai**

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{C'A'}) = (AC, C'A').$$

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{C'A'}) = (AC, C'A').$$

Ta có  $AC \parallel C'A' \Rightarrow (AC, C'A') = 0^\circ$ .

$\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{C'A'}$  là hai vectơ ngược hướng nên  $\Rightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{C'A'}) = 180^\circ$ .

**b) Sai**

Gọi  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{B'C'}$ . Ta có  $(\vec{u}; \vec{v}) = 60^\circ$ .

Ta có  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{B'C'} \Rightarrow (\vec{u}; \vec{v}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{B'C'}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \angle CAD = 45^\circ$ .

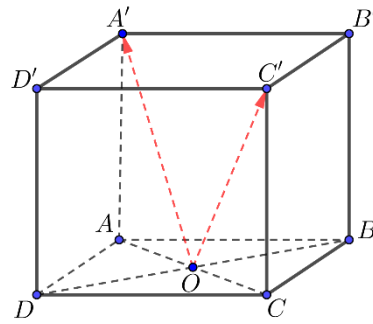
**c) Đúng**

Gọi  $\vec{x} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ ,  $\vec{y} = \overrightarrow{A'C'}$ . Ta có  $(\vec{x}; \vec{y}) = 90^\circ$ .

Ta có  $\vec{x} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$ ,  $\vec{y} = \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$  suy ra  $(\vec{x}; \vec{y}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = 90^\circ$ .

**d) Sai**

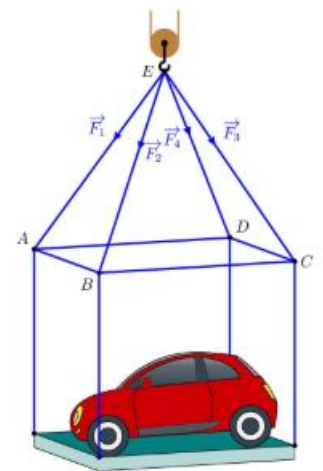
$$(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OC'}) = 90^\circ.$$



Ta có  $(OA')^2 = (OC')^2 = AO^2 + (AA')^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4} \neq (A'C')^2 = 2a^2$ .

Suy ra tam giác  $OA'C'$  không thể vuông tại  $O$ .

**Câu 40:** Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật  $ABCD$ , mặt phẳng  $(ABCD)$  song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc  $E$  của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp  $EA, EB, EC, ED$  có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng  $(ABCD)$  một góc bằng  $60^\circ$ . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  đều có cường độ là 4700 N và trọng lượng của khung sắt là 3000 N



a)  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_3 + \vec{F}_4$

b)  $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_2 + \vec{F}_4$

c)  $|\vec{F}_1 + \vec{F}_3| = 8141 \text{ N}$  (làm tròn đến hàng đơn vị)

d) Trọng lượng của chiếc xe ô tô là 16282 N (làm tròn đến hàng đơn vị).

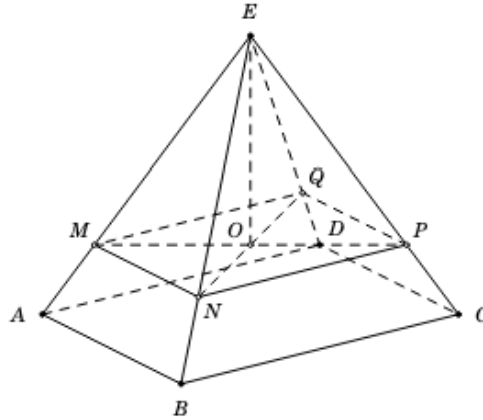
**Lời giải**

|        |         |         |         |
|--------|---------|---------|---------|
| a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Đúng |
|--------|---------|---------|---------|

Lấy các điểm  $M, N, P, Q$  lần lượt trên các tia  $EA, EB, EC, ED$  sao cho

$$\vec{EM} = \vec{F}_1, \vec{EN} = \vec{F}_2, \vec{EP} = \vec{F}_3, \vec{EQ} = \vec{F}_4.$$

Do các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  đều có cường độ là 4700 N nên  $EM = EN = EP = EQ = 4700$ .



a) Sai: Ta có:  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{EM} + \vec{EN} = 2\vec{EH}$ , với  $H$  là trung điểm của  $MN$

$\vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{EP} + \vec{EQ} = 2\vec{EK}$ , với  $K$  là trung điểm của  $PQ$  suy ra  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \neq \vec{F}_3 + \vec{F}_4$

b) Đúng: Ta có  $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = \vec{EM} + \vec{EP} = 2\vec{EO}$ , với  $O$  là trung điểm của  $MP$

$\vec{F}_2 + \vec{F}_4 = \vec{EN} + \vec{EQ} = 2\vec{EO}$ , với  $O$  là trung điểm của  $MP$  suy ra  $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_2 + \vec{F}_4$ .

c) Đúng:  $|\vec{F}_1 + \vec{F}_3| = |2\vec{EO}| = 2EO$ . Theo giả thiết, góc giữa  $EA$  với  $(ABCD)$  bằng  $60^\circ$  nên góc giữa  $EM$  với  $(MNPQ)$  cũng bằng  $60^\circ$  hay  $\angle SMO = 60^\circ$ .

Xét  $\triangle EMO$  có  $EM = 4700$ ,  $\angle SMO = 60^\circ$  suy ra  $EO = EM \sin 60^\circ = 2350\sqrt{3}$ .

d) Đúng: Từ đây ta tính được  $|\vec{F}_1 + \vec{F}_3| = 2EO = 8141N$ .

**Câu 41:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB, AC, AD$  đôi một vuông góc. Cạnh  $AB = AC = a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ ,  $H$  là trung điểm của  $MD$ .

a)  $\vec{DM} = \frac{\vec{DB} + \vec{DC}}{2}$

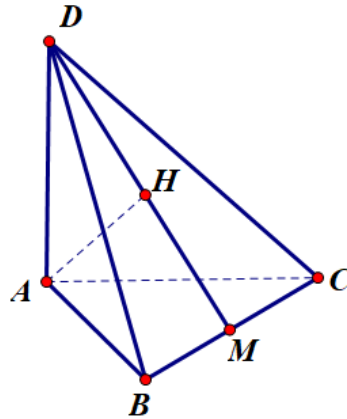
b) Góc giữa hai vectơ  $\vec{AH}$  và  $\vec{BC}$  bằng  $60^\circ$

c)  $\vec{AB} \cdot \vec{AH} = \frac{a^2}{4}$

d)  $\vec{AH} = \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{\vec{AB} + \vec{AD}}{4}$

**Lời giải**

|         |        |         |        |
|---------|--------|---------|--------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|---------|--------|---------|--------|



a)  $\overrightarrow{DM} = \frac{\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}}{2}$

Vì  $M$  là trung điểm của  $BC$  nên  $\overrightarrow{DM} = \frac{\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}}{2}$ . Câu a đúng

b) Góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{AH}$  và  $\overrightarrow{BC}$  bằng  $60^\circ$

Tam giác  $ABC$  cân tại  $A \Rightarrow AM \perp BC$

Tam giác  $DBC$  cân tại  $D \Rightarrow DM \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (ADM) \Rightarrow AH \perp BC$

$\Rightarrow (\overrightarrow{AH}; \overrightarrow{BC}) = 90^\circ$

Câu b sai

c)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \frac{a^2}{4}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} \cdot \left( \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM}}{2} \right) = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{\overrightarrow{AD}}{2} + \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}}{2}$$

Ta có  $AB, AC, AD$  đôi một vuông góc  $\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

$$\text{Nên } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}}{2} = \frac{1}{2} \left( \overrightarrow{AB} \cdot \left( \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} \right) \right) = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) = \frac{a^2}{4}$$

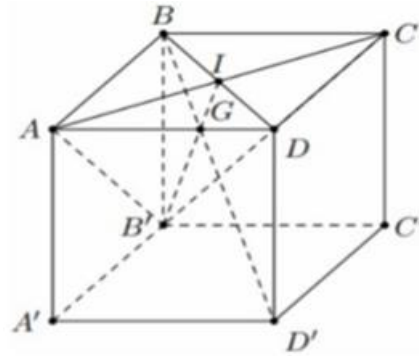
Câu c đúng

d)  $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} + \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}{4}$

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD}}{2} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \left( \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} \right) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} + \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{4}$$

Câu d sai

**Câu 42:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $I$  là tâm hình vuông  $ABCD$ , gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $AB'C$ .



- a)  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$ .
- b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$ .
- c)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DD'} = 0$ .
- d)  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC'}) = 30^\circ$ .

**Lời giải**

| a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Sai |
|--------|---------|---------|--------|
|--------|---------|---------|--------|

a) Ta có:  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} = (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{GB'} = 2\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GB'} = \vec{0}$ .

Do đó ý a) **Sai**.

b) Ta có:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$ .

Do đó ý b) **Đúng**.

c) Ta có:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DD'} = 0$ .

Do đó ý c) **Đúng**.

d) Ta có:  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC'}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB'}) = \angle CAB' = 60^\circ$ .

Do đó ý d) **Sai**.

**Câu 43:** Trong không gian, cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ .

a)  $|\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{DC'}| = a$ .

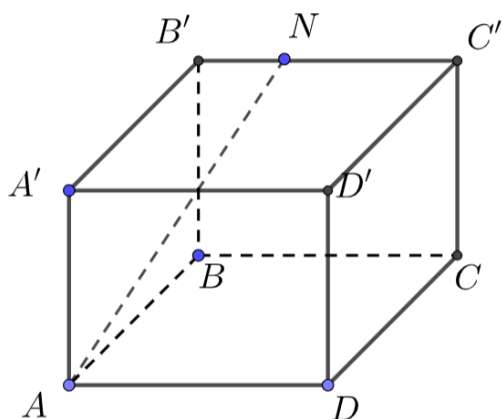
b)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

c)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B'C'} = a^2$ .

d) Gọi  $N$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{C'N} = 2\overrightarrow{NB'}$ . Khi đó  $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ .

**Lời giải**

| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Đúng |
|---------|--------|--------|---------|
|---------|--------|--------|---------|



a) Đúng

$$\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{C'C}.$$

$$\text{Suy ra } |\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{DC'}| = |\overrightarrow{C'C}| = a.$$

b) Sai

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}.$$

c) Sai

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

d) Đúng

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'N} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3} \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}.$$

