



CHƯƠNG

II

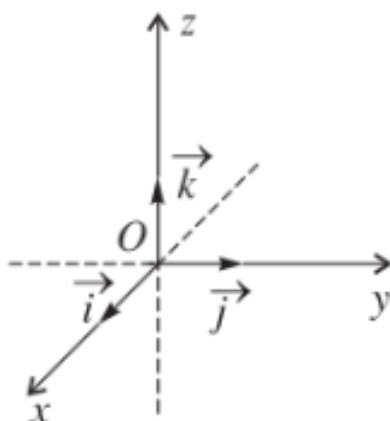
VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN



LÝ THUYẾT.

I. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN



Trong không gian, ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc với nhau tại gốc O của mỗi trục.

Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz .

Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$, hay đơn giản là hệ tọa độ $Oxyz$.

Điểm O được gọi là gốc tọa độ.

Các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng tọa độ.

Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.

II. TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM, TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Trong không gian $Oxyz$, cho một điểm M tùy ý. Bộ ba số $(x; y; z)$ duy nhất sao cho $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là tọa độ của điểm M đối với hệ tọa độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $M = (x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$, trong đó x là hoành độ, y là tung độ và z là cao độ của M .



Nhận xét. Nếu điểm M có tọa độ $(x; y; z)$ đối với hệ tọa độ $Oxyz$ thì:

- Hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox , Oy và Oz có tọa độ lần lượt là $(x; 0; 0)$, $(0; y; 0)$ và $(0; 0; z)$.
- Hình chiếu vuông góc của M trên các mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) và (Ozx) có tọa độ lần lượt là $(x; y; 0)$, $(0; y; z)$ và $(x; 0; z)$.

Trong không gian $Oxyz$, cho vector $\vec{a}$ tùy ý. Bộ ba số $(x; y; z)$ duy nhất sao cho $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là tọa độ của vector $\vec{a}$ đối với hệ tọa độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $\vec{a} = (x; y; z)$ hoặc $\vec{a}(x; y; z)$.

Nhận xét

- Tọa độ của vector $\vec{a}$ cũng là tọa độ của điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.
- Trong không gian, cho hai vector $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$. Khi đó, $\vec{a} = \vec{b}$ nếu và chỉ nếu
$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ và $N(x_N; y_N; z_N)$. Khi đó: $\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M; y_N - y_M; z_N - z_M)$.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ VECTOR, XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ ĐIỂM, XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ ĐỈNH CỦA HÌNH BÌNH HÀNH VÀ HÌNH HỘP

1 PHƯƠNG PHÁP.

- 1) $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Leftrightarrow M(x; y; z)$
- 2) $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Leftrightarrow \vec{a} = (x; y; z)$
- 3) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ và $N(x_N; y_N; z_N)$. Khi đó: $\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M; y_N - y_M; z_N - z_M)$.
- 4) Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$. Khi đó: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$.
- 5) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

2 BÀI TẬP.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$. Xác định tọa độ của



điểm M .

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \Leftrightarrow M(2; 3; -1)$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OM} = 2\vec{j} + \vec{k}$. Xác định tọa độ của điểm M .

Lời giải

Theo đề ta có: $\overrightarrow{OM} = 2\vec{j} + \vec{k} \Leftrightarrow M(0; 2; 1)$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho vector $\overrightarrow{OA} = (-2; 3; -5)$. Xác định tọa độ của điểm A .

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{OA} = (-2; 3; -5) \Rightarrow A = (-2; 3; -5)$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{k}$. Xác định tọa độ $\vec{a}$.

Lời giải

Ta có: $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{k} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{i} + 0\vec{j} - 2\vec{k} \Leftrightarrow \vec{a} = (1; 0; -2)$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$ cho vectơ $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vector đơn vị trên các trục. Xác định tọa độ của vectơ $\vec{a}$.

Lời giải

Ta có: $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \Leftrightarrow \vec{a} = (2; -3; 1)$.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{a}$ biểu diễn qua các vectơ đơn vị là $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$. Xác định tọa độ của vector $\vec{a}$.

Lời giải

Ta có: $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} = (2; 3; -1)$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết:

a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} - 2\vec{j}$. Tìm tọa độ các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

b) $\overrightarrow{OM} = 5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\overrightarrow{ON} = \vec{i} - 3\vec{k}$. Tìm tọa độ các điểm M, N .

Lời giải

a) $\vec{a} = (2; 3; -5)$, $\vec{b} = (0; -3; 4)$, $\vec{c} = (-1; -2; 0)$.

b) $M(5; -1; 2)$, $N(1; 0; -3)$

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết:

a) $\vec{a} = (-3; 2; -1)$, $\vec{b} = (3; 0; 12)$. Tính $\vec{a}, \vec{b}$ theo các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

b) $A(-5; -2; 1)$, $B(0; 4; -11)$. Tính $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ theo các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.



Lời giải

a) $\vec{a} = (-3; 2; -1) \Leftrightarrow \vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 1\vec{k}$

$\vec{b} = (3; 0; 12) \Leftrightarrow \vec{b} = 3\vec{i} + 12\vec{k}.$

b) $\vec{OA} = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 1\vec{k}$

$\vec{OB} = 4\vec{j} - 11\vec{k}.$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 2; -3), B(3; -5; 2)$. Xác định tọa độ vectơ $\vec{AB}$.

Lời giải

Ta có: $\vec{AB} = (3-1; (-5)-2; 2-(-3)) = (2; -7; 5).$

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm A, B với $\vec{OA} = (2; -1; 3), \vec{OB} = (5; 2; -1)$.
Tìm tọa độ của vectơ $\vec{AB}$

Lời giải

Từ giả thiết ta có $A(2; -1; 3), B(5; 2; -1)$ nên $\vec{AB} = (3; 3; -4).$

Câu 11: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $M(1; 2; 3), N(3; 4; 7)$. Xác định tọa độ của vectơ $\vec{MN}$.

Lời giải

Ta có: $M(1; 2; 3), N(3; 4; 7) \Rightarrow \vec{MN} = (2; 2; 4).$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(1; -3; 2)$ và $B(4; 2; -1)$. Xác định tọa độ của vectơ $\vec{AB}$.

Lời giải

Ta có $\vec{AB} = (3; 5; -3).$

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -1)$ và $B(2; 3; 2)$. Vectơ $\vec{BA}$ có tọa độ là

Lời giải

Ta có: $\vec{BA} = (1-2; 1-3; -1-2) = (-1; -2; -3)$

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2; 3; 5), B(1; 1; -2)$. Tọa độ của vectơ $\vec{BA}$ là

Lời giải

Ta có $A(-2; 3; 5), B(1; 1; -2)$ nên tọa độ của vectơ là $\vec{BA} = (-3; 2; 7).$

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 1; 2), B(2; -1; 1)$ và $C(3; 2; -3)$. Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

Giả sử $D(x; y; z)$ ta có $\vec{AD} = (x-1; y-1; z-2), \vec{BC} = (1; 3; -4).$



$$\text{Tứ giác } ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ y-1=3 \\ z-2=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \\ z=-2 \end{cases}.$$

Vậy $D(2;4;-2)$.

Câu 16: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1), B(2;-1;3), C(-3;5;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

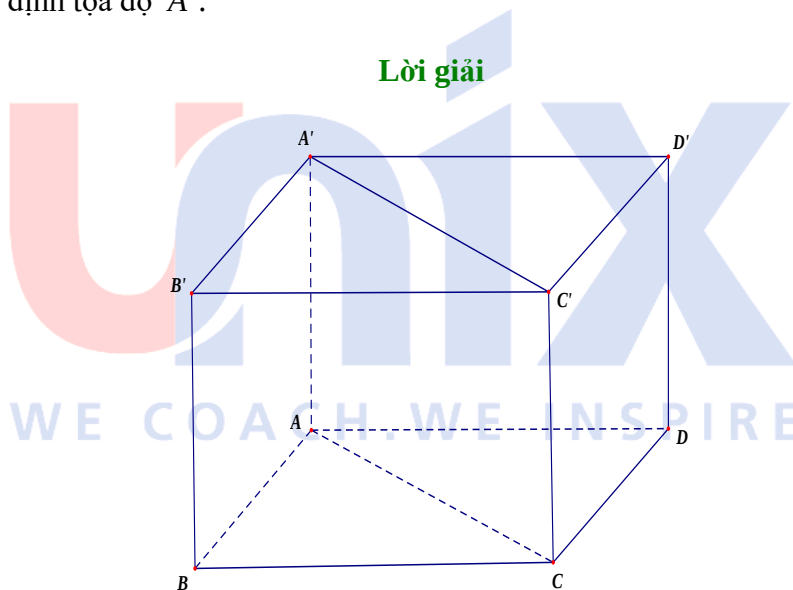
Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{BA} = (-1;3;-4)$ và 3 điểm A, B, C không thẳng hàng.

$$\text{Tứ giác } ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 3 = -1 \\ y_D - 5 = 3 \\ z_D - 1 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -4 \\ y_D = 8 \\ z_D = -3 \end{cases} \Rightarrow D(-4;8;-3).$$

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(1,0,1), B(2,1,2), D(1,-1,1), C'(4,5,-5)$. Xác định tọa độ A' .

Lời giải



Gọi $C(x, y, z)$. $\overrightarrow{AD} = (0, -1, 0)$; $\overrightarrow{BC} = (x-2, y-1, z-2)$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ y-1=-1 \\ z-2=0 \end{cases} \Rightarrow C(2, 0, 2). \text{ Do đó } \overrightarrow{AC} = (1, 0, 1).$$

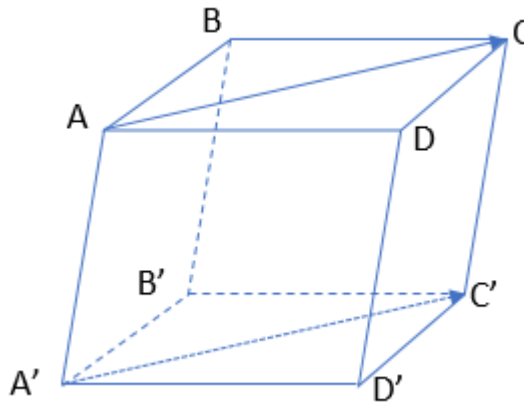
$$\text{Gọi } A'(a, b, c); \overrightarrow{A'C'} = (4-a, 5-b, -5-c); \text{ mà } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-a=1 \\ 5-b=0 \\ -5-c=1 \end{cases} \Rightarrow A'(3, 5, -6).$$

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với các đỉnh $A(-1;1;2), B(-3;2;1), D(0;-1;2)$ và $A'(2;1;2)$. Xác định tọa độ đỉnh C' .

Lời giải



Ta có

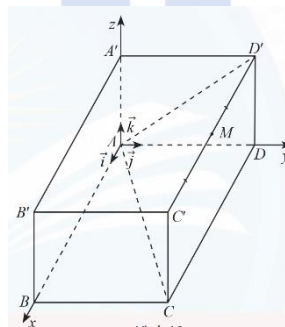


$$\overrightarrow{AB} = (-2; 1; -1), \overrightarrow{AD} = (1; -2; 0).$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'C'} \Rightarrow \overrightarrow{A'C'} = (-1; -1; -1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{C'} - 2 = -1 \\ y_{C'} - 1 = -1 \\ z_{C'} - 2 = -1 \end{cases} \Rightarrow C'(1; 0; 1).$$

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O , các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và có $AB = 5, AD = 6, AA' = 9$. Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của cạnh $C'D'$.

Lời giải



Để tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$, ta cần biểu diễn $\overrightarrow{AB}$ theo ba vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Do $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{i}$ và $|\overrightarrow{AB}| = AB = 5 = 5|\vec{i}|$ nên $\overrightarrow{AB} = 5\vec{i}$ hay $\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$.

Tương tự, ta cũng có: $\overrightarrow{AD} = 0\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}, \overrightarrow{AA'} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 9\vec{k}$.

Trong hình bình hành $ABCD$, ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 5\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$.

Trong hình bình hành $AA'C'C$, ta có: $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = 5\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (5; 0; 0); \overrightarrow{AC} = (5; 6; 0); \overrightarrow{AC'} = (5; 6; 9)$.

$$\text{Vì } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$$



$$= \frac{1}{2}(5\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k} + 6\vec{j} + 9\vec{k}) = \frac{5}{2}\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}$$

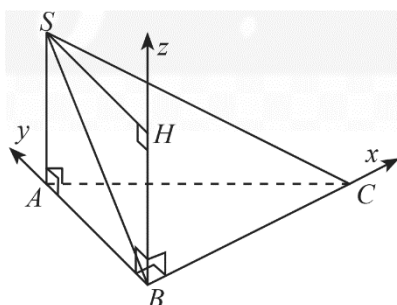
$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \left(\frac{5}{2}; 6; 9\right).$$

Câu 20: Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B , $BC = 3, BA = 2, SA$ vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2.

a) Xác định một hệ tọa độ dựa trên gợi ý của hình vẽ.

b) Tìm tọa độ các điểm A, B, C, S .

Lời giải



a) Quan sát hình ảnh xét đây là hệ trục tọa độ $Oxyz$ với điểm $B \equiv O$.

b) Vì $B \equiv O \Rightarrow B(0; 0; 0)$

Do $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng với $\vec{i}$ và $|\overrightarrow{BC}| = BC = 3 = 3|\vec{i}|$ nên $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i}$ hay $\overrightarrow{BC} = 3\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = 3\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} \Leftrightarrow C(3; 0; 0).$

Tương tự, ta cũng có:

$$\overrightarrow{BA} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k} \Leftrightarrow A(0; 2; 0)$$

$$\overrightarrow{BH} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{OH} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k} \Leftrightarrow H(0; 0; 2)$$

Trong hình bình hành $BASH$, ta có: $\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{OS} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \Leftrightarrow S(0; 2; 2)$

Vậy $A(0; 2; 0), B(0; 0; 0), C(3; 0; 0), S(0; 2; 2).$

XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC CỦA MỘT ĐIỂM TRÊN TRỤC TỌA ĐỘ VÀ TRÊN MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ



PHƯƠNG PHÁP.

Nhận xét. Nếu điểm M có tọa độ $(x; y; z)$ đối với hệ tọa độ $Oxyz$ thì:

- Hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox, Oy và Oz có tọa độ lần lượt là $(x; 0; 0), (0; y; 0)$ và $(0; 0; z).$
- Hình chiếu vuông góc của M trên các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz)$ và (Ozx) có tọa độ lần lượt là $(x; y; 0), (0; y; z)$ và $(x; 0; z).$



BÀI TẬP.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, xác định tọa độ hình chiếu vuông góc của $A(4; -3; 2)$ lên trục Oz .

Lời giải

Lý thuyết: $M(x_0; y_0; z_0)$ chiếu vuông góc lên trục Ox được điểm $(x_0; 0; 0)$, lên Oy được $(0; y_0; 0)$ và lên Oz được $(0; 0; z_0)$.

Vậy $A(4; -3; 2)$ chiếu vuông góc lên trục Oz được điểm $(0; 0; 2)$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, xác định tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm $A(2; 1; -1)$ lên trục Oy .

Lời giải

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(2; 1; -1)$ lên trục Oy có tọa độ là $H(0; 1; 0)$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(4; 2; -1)$ trên trục Oy là điểm

Lời giải

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(4; 2; -1)$ trên trục Oy là điểm $M_2(0; 2; 0)$.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, xác định tọa độ hình chiếu vuông góc của $A(3; 2; 1)$ trên trục Ox .

Lời giải

Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của $A(3; 2; 1)$ trên trục Ox có tọa độ là $(3; 0; 0)$

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, xác định tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; -1; 1)$ trên trục Oz .

Lời giải

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; -1; 1)$ trên trục Oz có tọa độ là $(0; 0; 1)$.

Câu 26: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xác định tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 2; 3)$ trên mặt phẳng (Oyz) .

Lời giải

Hình chiếu của điểm $M(x; y; z)$ lên mặt phẳng (Oyz) là $M'(0; y; z)$

Nên $M(0; 2; 3)$ là hình chiếu của điểm $A(1; 2; 3)$ trên mặt phẳng (Oyz) .

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, xác định tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $M(-2; 3; 5)$ trên mặt phẳng (Oxy) .

Lời giải

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(-2; 3; 5)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $N(-2; 3; 0)$.



Câu 28: Cho điểm $M(1; 2; 4)$, xác định tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (Oxz) .

Lời giải

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(1; 2; 4)$ trên mặt phẳng (Oxz) là điểm $M'(1; 0; 4)$.

