



CHƯƠNG



VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ



LÝ THUYẾT.

I. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA PHÉP CỘNG HAI VECTƠ, PHÉP TRỪ HAI VECTƠ, PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$. Ta có:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y'; z + z');$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x - x'; y - y'; z - z');$$

$$k\vec{a} = (kx; ky; kz) \text{ với } k \text{ là một số thực.}$$

Nhận xét: Vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ cùng phương với vectơ $\vec{b} = (x'; y'; z') \neq \vec{0}$ khi và chỉ khi tồn tại số thực

$$k \text{ sao cho } \begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \\ z = kz' \end{cases} \text{ (Nếu } x'.y'.z' \neq 0 \text{ thì } \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'})$$

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$ và $C(x_C; y_C; z_C)$. Khi đó:

$$\text{Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng } AB \text{ là } \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right);$$

$$\text{Toạ độ trọng tâm của tam giác } ABC \text{ là } \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right).$$

II. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$ được xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = xx' + yy' + zz'$

Nhận xét:

$$- \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$$



$$- |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$- \text{Nếu } \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \text{ thì } \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

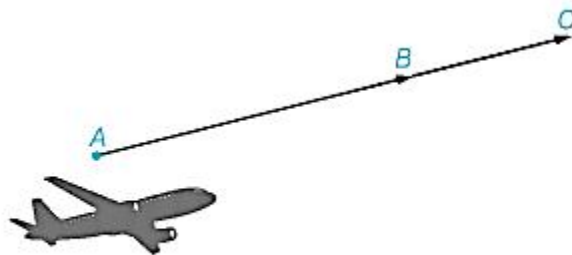
Chú ý: Nếu $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$

$$\text{thì } AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Đặc biệt, khi B trùng O ta nhận được công thức $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$.

III. VẬN DỤNG TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TIỄN

Ví dụ 5: Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800; 500; 7)$ đến điểm $B(940; 550; 8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là gì?



Hình 2.49

Lời giải

Gọi $C(x; y; z)$ là vị trí của máy bay sau 5 phút tiếp theo. Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng. Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B gấp đôi thời gian bay từ B đến C nên $AB = 2BC$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \left(\frac{940 - 800}{2}; \frac{550 - 500}{2}; \frac{8 - 7}{2} \right) = (70; 25; 0,5).$$

$$\text{Mặt khác, } \overrightarrow{BC} = (x - 940; y - 550; z - 8) \text{ nên } \begin{cases} x - 940 = 70 \\ y - 550 = 25 \\ z - 8 = 0,5. \end{cases}$$



$$\text{Từ đó } \begin{cases} x = 1010 \\ y = 575 \\ z = 8,5 \end{cases} \text{ và vì vậy } C(1010; 575; 8,5).$$

Vậy tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $(1010; 575; 8,5)$.

Luyện tập 5 trang 76 SGK

Với các giả thiết như trong Ví dụ 5, hãy xác định tọa độ của các chiếc máy bay sau 10 phút tiếp theo (tính từ thời điểm máy bay ở điểm B).

Lời giải

Gọi $D(x; y; z)$ là vị trí của máy bay sau 10 phút bay tiếp theo (tính từ thời điểm máy bay ở điểm B). Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BD}$ cùng hướng. Do vận tốc máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B bằng thời gian bay từ B đến D nên $AB = BD$. Do đó, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} = (140; 50; 1)$.

$$\text{Mặt khác: } \overrightarrow{BD} = (x - 940; y - 550; z - 8) \text{ nên } \begin{cases} x - 940 = 140 \\ y - 550 = 50 \\ z - 8 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1080 \\ y = 600 \\ z = 9 \end{cases}$$

Vậy $D(1080; 600; 9)$. Vậy tọa độ của máy bay trong 10 phút tiếp theo là $(1080; 600; 9)$.

Ví dụ 6: Hãy trả lời câu hỏi trong tình huống mở đầu.

Giải. Vì điểm A' có tọa độ là $(240; 450; 0)$ nên khoảng cách từ A' đến các trục Ox, Oy lần lượt là 450 cm và 240 cm. Suy ra $A'A = 450$ cm và $A'O' = 240$ cm. Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{A'B'} = (-120; 0; 300)$, do đó $A'B' = |\overrightarrow{A'B'}| = \sqrt{(-120)^2 + 0^2 + 300^2} = 60\sqrt{29} \approx 323$ (cm).

Vì $O'O = A'A = 450$ cm và O' nằm trên trục Oy nên tọa độ của điểm O' là $(0; 450; 0)$.

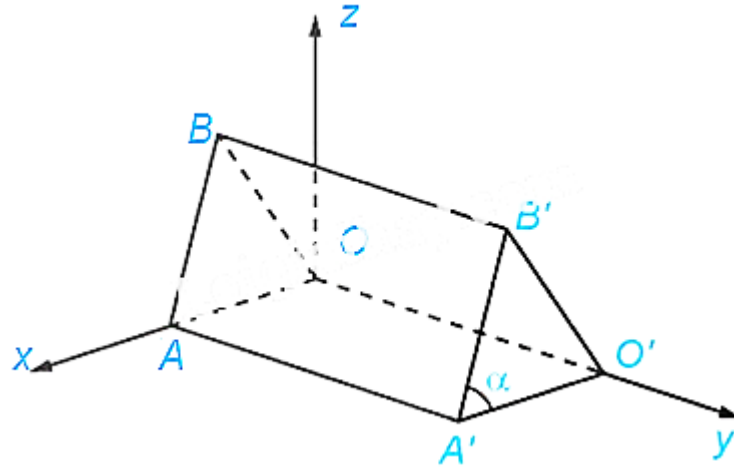
$$\text{Do đó } \overrightarrow{O'B'} = (120; 0; 300) \text{ và } O'B' = |\overrightarrow{O'B'}| = \sqrt{120^2 + 0^2 + 300^2} = 60\sqrt{29} \approx 323 \text{ (cm)}.$$

Vậy mỗi căn nhà gỗ có chiều dài là 450 cm, chiều rộng là 240 cm, mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là 323 cm.

Luyện tập 6 trang 71 SGK

Trong tình huống mở đầu, hãy tính độ lớn của góc α .

Lời giải



Theo Ví dụ 6 ta có: $\overrightarrow{A'B'} = (-120; 0; 300)$; $|\overrightarrow{A'B'}| = 60\sqrt{29}\text{cm}$, $O'(0; 450; 0)$, $A'(240; 450; 0)$

Do đó, $\overrightarrow{A'O'} = (-240; 0; 0) \Rightarrow |\overrightarrow{A'O'}| = 240\text{ cm}$

Ta có: $\cos(\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{A'O'}) = \frac{\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'O'}}{|\overrightarrow{A'B'}| \cdot |\overrightarrow{A'O'}|} = \frac{(-120)(-240) + 0.0 + 300.0}{60\sqrt{29}.240} = \frac{2\sqrt{29}}{29}$

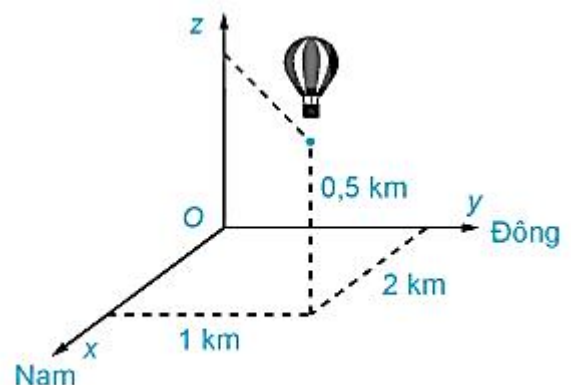
$\Rightarrow B'A'O' \approx 68^\circ$. Vậy $\alpha \approx 68^\circ$

Ví dụ 7: Hai chiếc kHình khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai kHình khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (H.2.50), đơn vị đo lấy theo kilômét.

a) Tìm tọa độ của mỗi chiếc kHình khí cầu đối với hệ tọa độ đã chọn.

b) Xác định khoảng cách giữa hai kHình khí cầu (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Hình 2.50



Lời giải

a) Chiếc khinh khí cầu thứ nhất và thứ hai có tọa độ lần lượt là $(2;1;0,5)$ và $(-1;-1,5;0,8)$.

b) Khoảng cách giữa hai chiếc khinh khí cầu là

$$\sqrt{(-1-2)^2 + (-1,5-1)^2 + (0,8-0,5)^2} = \sqrt{15,34} \approx 3,92 \text{ (km)}.$$

Luyện tập 7 trang 72 SGK

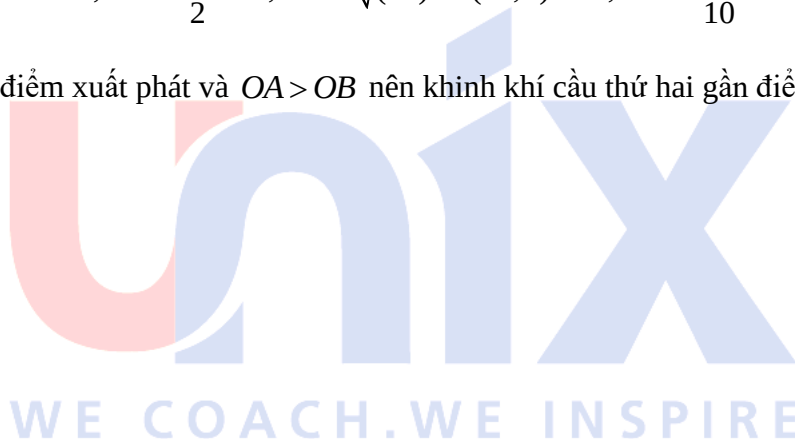
Trong Ví dụ 7, khinh khí cầu thứ nhất hay thứ hai ở xa điểm xuất phát hơn? Giải thích vì sao.

Lời giải

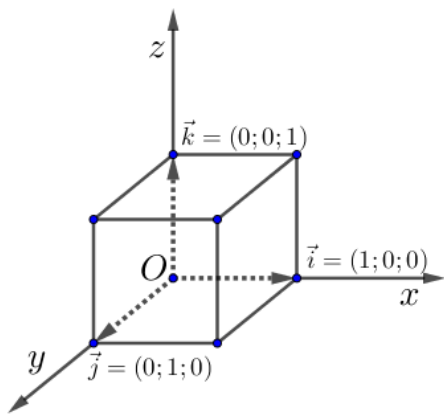
Theo Ví dụ 7 ta có, khinh khí cầu thứ nhất có tọa độ là $A(2;1;0,5)$, khinh khí cầu thứ hai có tọa độ là $B(-1;-1,5;0,8)$.

$$\text{Ta có: } OA = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0,5^2} = \frac{\sqrt{21}}{2} \text{ km}, OB = \sqrt{(-1)^2 + (-1,5)^2 + 0,8^2} = \frac{\sqrt{389}}{10} \text{ km}.$$

Vì góc O đặt tại điểm xuất phát và $OA > OB$ nên khinh khí cầu thứ hai gần điểm xuất phát hơn.





	1. Hệ trục tọa độ Oxyz: ☐ Hệ trục gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc nhau. ☐ Trục Ox: trục hoành, có vectơ đơn vị $\vec{i} = (1; 0; 0)$. ☐ Trục Oy: trục tung, có vectơ đơn vị $\vec{j} = (0; 1; 0)$. ☐ Trục Oz: trục cao, có vectơ đơn vị $\vec{k} = (0; 0; 1)$. ☐ Điểm $O(0; 0; 0)$ là gốc tọa độ.
	2. Tọa độ vector: Vector $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (x; y; z)$. Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có:
☐ $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$ ☐ $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$ ☐ $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$	☐ $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \ (k \in \mathbb{R})$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, \ (b_1, b_2, b_3 \neq 0).$
☐ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$	☐ $\vec{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ ☐ $\vec{a}^2 = \vec{a} ^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$
☐ $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$	☐ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \cdot \vec{b} } = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$
3. Tọa độ điểm: $M(x; y; z) \Leftrightarrow \vec{OM} = (x; y; z)$. Cho $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$, ta có:	
☐ $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ ☐ Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.	☐ $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ ☐ Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC: $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$.
QUY TẮC CHIỀU ĐẶC BIỆT	
Chiều điểm trên trục tọa độ ☐ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x)]{\text{Chiều vào } Ox}} M_1(x_M; 0; 0)$ ☐ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y)]{\text{Chiều vào } Oy}} M_2(0; y_M; 0)$ ☐ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } z)]{\text{Chiều vào } Oz}} M_3(0; 0; z_M)$	Chiều điểm trên mặt phẳng tọa độ ☐ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, y)]{\text{Chiều vào } Oxy}} M_1(x_M; y_M; 0)$ ☐ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y, z)]{\text{Chiều vào } Oyz}} M_2(0; y_M; z_M)$ ☐ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, z)]{\text{Chiều vào } Oxz}} M_3(x_M; 0; z_M)$
Đối xứng điểm qua trục tọa độ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x; \text{ đổi dấu } y, z)]{\text{Đối xứng qua } Ox}} M_1(x_M; -y_M; -z_M)$ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y; \text{ đổi dấu } x, z)]{\text{Đối xứng qua } Oy}} M_2(-x_M; y_M; -z_M)$ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } z; \text{ đổi dấu } x, y)]{\text{Đối xứng qua } Oz}} M_3(-x_M; -y_M; z_M)$	Đối xứng điểm qua mặt phẳng tọa độ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, y; \text{ đổi dấu } z)]{\text{Đối xứng qua } Oxy}} M_1(x_M; y_M; -z_M)$ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, z; \text{ đổi dấu } y)]{\text{Đối xứng qua } Oxz}} M_2(x_M; -y_M; z_M)$ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y, z; \text{ đổi dấu } x)]{\text{Đối xứng qua } Oyz}} M_3(-x_M; y_M; z_M)$



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ VÀ ĐỘ DÀI CỦA ĐOẠN THẲNG

Áp dụng biểu thức tọa độ của các phép toán véc tơ.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (1; -1; 2)$, $\vec{b} = (3; 0; -1)$ và $\vec{c} = (-2; 5; 1)$. Vectơ $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ có tọa độ là

Lời giải

$$\text{Ta có } \vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\vec{d}} = 1 + 3 - (-2) = 6 \\ y_{\vec{d}} = -1 + 0 - 5 = -6 \\ z_{\vec{d}} = 2 + (-1) - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{d} = (6; -6; 0).$$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (2; -1; 5)$. Tọa độ vectơ $-2\vec{a}$ là

Lời giải

$$\text{Ta có: } -2\vec{a} = (-4; 2; -10).$$

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ: $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{d} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \vec{a} = (2; -5; 3)$$

$$4\vec{b} = (0; 8; -4)$$

$$2\vec{c} = (2; 14; 4)$$

$$\text{Suy ra: } \vec{d} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$$

$$= (2; -5; 3) - (0; 8; -4) - (2; 14; 4)$$

$$= (2 - 0 - 2; -5 - 8 - 14; 3 + 4 - 4)$$

$$= (0; -27; 3). \text{ Vậy } \vec{d} = (0; -27; 3).$$

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (3; -2; 1)$ và $\vec{b} = (1; 1; -1)$. Vectơ $\vec{u} = 3\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là

Lời giải

$$\text{Ta có: } 3\vec{a} = (9; -6; 3) \text{ và } \vec{b} = (1; 1; -1). \text{ Suy ra } \vec{u} = 3\vec{a} - \vec{b} = (9 - 1; -6 - 1; 3 - (-1)) = (8; -7; 4).$$

Câu 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (3; -1; 5)$. Tìm tọa độ



của vector $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

Lời giải

Ta có: $2\vec{a} = (4; -6; 6)$, $3\vec{b} = (0; 6; -3)$, $-2\vec{c} = (-6; 2; -10)$

Suy ra $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} = (-2; 2; -7)$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, biết tọa độ hình chiếu của điểm A lên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $M(1; 0; 0)$, $N(0; -2; 0)$, $P(0; 0; 3)$. Tọa độ của vector $\vec{OA}$ là

Lời giải

Ta có $A(1; -2; 3)$ và $O(0; 0; 0)$ nên $\vec{OA}(1; -2; 3)$

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có trọng tâm G . Biết $A(1; -2; -3)$, $B(3; 4; -1)$, $G(2; 1; -1)$. Tọa độ điểm C là:

Lời giải

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B \\ z_C = 3z_G - z_A - z_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3.2 - 1 - 3 = 2 \\ y_C = 3.1 + 2 - 4 = 1 \\ z_C = 3.(-1) + 3 + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow C(2; 1; 1).$$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = (2; 1; -3)$ và $\vec{v} = (4; 5; -2)$. Tìm tọa độ của điểm M , biết $\vec{OM} = -3\vec{u} + 2\vec{v}$?

Lời giải

Ta có $\vec{OM} = -3\vec{u} + 2\vec{v} = (2; 7; 5)$

Suy ra tọa độ điểm M là $(2; 7; 5)$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; -1; -2)$ và trọng tâm $G(2; 1; -3)$. Tọa độ của vector $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC}$ là

Lời giải

Gọi M là trung điểm cạnh BC .

Ta có: $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM} = 2 \cdot \frac{3}{2} \vec{AG} = 3\vec{AG} = (3; 6; -3)$

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -1; 5)$, $B(3; 4; 4)$, $C(4; 6; 1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) và cách đều các điểm A, B, C ?

Lời giải

Gọi $M(x; y; 0) \in (Oxy)$, $(x, y \in \mathbb{R}; x^2 + y^2 \neq 0)$ là điểm cần tìm.



Vì M cách đều A, B, C nên ta có: $MA = MB = MC \Leftrightarrow \begin{cases} AM^2 = BM^2 \\ AM^2 = CM^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 + (0-5)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 + (0-4)^2 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 + (0-5)^2 = (x-4)^2 + (y-6)^2 + (0-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+10y-14=0 \\ 2x+4y-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5y=7 \\ x+2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16 \\ y=-5 \end{cases}$$

Vậy $M(16; -5; 0)$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho $A(-2; 2; -1)$, $B(-2; 3; 0)$, $C(x; 3; -1)$. Tìm các giá trị của x để tam giác ABC đều?

Lời giải

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB

Ta có: $M\left(-2; \frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $AB = \sqrt{2}$, $CM = \sqrt{(x+2)^2 + \frac{1}{2}}$

Tam giác ABC đều khi và chỉ khi $CM = AB \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow (x+2)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$

Vậy: $\begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho ba vectơ $\vec{a} = (1; 2; 3)$; $\vec{b} = (2; 2; -1)$; $\vec{c} = (4; 0; -4)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$

Lời giải

Ta có: $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} = (1; 2; 3) - (2; 2; -1) + 2 \cdot (4; 0; -4) = (1-2+8; 2-2+0; 3+1-8) = (7; 0; -4)$

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho $\vec{a} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

Lời giải

Ta có: $2\vec{a} = (4; -6; 6)$; $3\vec{b} = (0; 6; -3)$; $-2\vec{c} = (-6; 2; -10)$.

Khi đó: $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} = (-2; 2; -7)$.

Câu 14: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1; -2; -1)$, $B(1; 4; 3)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

Lời giải

Ta có $AB = \sqrt{(1-1)^2 + (4+2)^2 + (3+1)^2} = 2\sqrt{13}$.

Câu 15: Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a} = (-2; 2; 0)$; $\vec{b} = (2; 2; 0)$; $\vec{c} = (2; 2; 2)$. Tính giá trị của $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$.



Lời giải

Ta có: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (-2; 2; 0) + (2; 2; 0) + (2; 2; 2) = (2; 6; 2)$.

Vậy $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 2^2} = 2\sqrt{11}$

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (3; m+1; 3)$, $\vec{b} = (1; -3; 2n)$. Tìm m, n để các vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

Lời giải

$$\vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng hướng} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \ (k > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = k \\ m+1 = -3k \\ 3 = k \cdot 2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ m = -10 \\ n = \frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Vậy } m = -10; n = \frac{1}{2}$$

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector: $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = 0; 2; -1$, $\vec{c} = 1; 7; 2$. Tìm tọa độ vector $\vec{x} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{c}$.

Lời giải

$$4\vec{a} = (8; -20; 12), \quad -\frac{1}{3}\vec{b} = \left(0; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right), \quad 3\vec{c} = (3; 21; 6).$$

$$\vec{x} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{c} = \left(11; \frac{1}{3}; \frac{55}{3}\right).$$

DẠNG 2: XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ ĐIỂM

Dùng công thức biểu thức tọa độ trung điểm, tọa độ trọng tâm của tam giác...

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -4; 3)$ và $B(2; 2; 7)$. Tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB .

Lời giải

$$\text{Gọi } I \text{ là trung điểm của } AB, \text{ ta có tọa độ điểm } I \text{ là } \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 2 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = -1. \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 5 \end{cases}$$

Vậy $I(2; -1; 5)$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC biết $A(5; -2; 0)$, $B(-2; 3; 0)$, $C(0; 2; 3)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .



Lời giải

Gọi $G(x, y, z)$.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên

$$\begin{cases} x = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 + (-2) + 0}{3} = 1 \\ y = \frac{-2 + 3 + 2}{3} = 1 \\ z = \frac{0 + 0 + 3}{3} = 1 \end{cases} \text{ . Vậy } G(1; 1; 1).$$

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 3)$, $B(2; 3; -4)$, $C(-3; 1; 2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

Gọi $D(x; y; z)$. Để $ABCD$ là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (1; 3; -7) = (-3 - x; 1 - y; 2 - z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \\ z = 9 \end{cases}.$$

Vậy $D(-4; -2; 9)$.

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2; -5; 0)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(3, 3, 0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.

Lời giải

Vì $D \in Ox$ nên $D(x; 0; 0)$

$$\text{Ta có: } AD = BC \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + 25} = \sqrt{(3+1)^2 + (3-1)^2 + (0-3)^2}.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + 25} = \sqrt{29} \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy $D(0; 0; 0)$, $D(4; 0; 0)$

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(3; -2; 3)$, $I(1; 0; 4)$. Tìm tọa độ điểm N sao cho I là trung điểm của đoạn MN .

Lời giải

Gọi $N(x; y; z)$. Vì I là trung điểm của MN nên



$$\begin{cases} x_I = \frac{x_M + x_N}{2} \\ y_I = \frac{y_M + y_N}{2} \\ z_I = \frac{z_M + z_N}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 2x_I - x_M \\ y_N = 2y_I - y_M \\ z_N = 2z_I - z_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = -1 \\ y_N = 2 \\ z_N = 5 \end{cases} \Rightarrow M(-1; 2; 5).$$

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; -1; 3)$, $B(2; -3; 5)$, $C(-1; -2; 6)$. Biết điểm $M(a; b; c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Tính $T = a - b + c$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} - 2\overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

$$\text{Mà } \begin{cases} \overrightarrow{AM} = (a-1; b+1; c-3) \\ \overrightarrow{BM} = (a-2; b+3; c-5) \\ \overrightarrow{CM} = (a+1; b+2; c-6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-1) + 2(a-2) - 2(a+1) = 0 \\ (b+1) + 2(b+3) - 2(b+2) = 0 \\ (c-3) + 2(c-5) - 2(c-6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = -3 \\ c = 1 \end{cases}$$

Vậy $T = a - b + c = 7 + 3 + 1 = 11$

Câu 24: Trong không gian m , cho tam giác đều ABC có $A(5; 3; -1)$, $B(2; 3; -4)$ và điểm C nằm trong mặt phẳng (Oxy) có tung độ nhỏ hơn 3.

1/ Tìm tọa độ điểm C .

2/ Tìm tọa độ điểm D biết $ABCD$ là tứ diện đều.

Lời giải

1/ Vì $C \in (Oxy)$ nên $C(x; y; 0)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3; 0; -3)$, $\overrightarrow{AC} = (x-5; y-3; 1)$, $\overrightarrow{BC} = (x-2; y-3; 4)$

Tam giác ABC đều nên $\begin{cases} AB = AC \\ AC = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = AC^2 \\ AC^2 = BC^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)^2 + (y-3)^2 + 1 = 18 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + 1 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vì C có tung độ nhỏ hơn 3 nên $C(1; 2; 0)$.

2/ Gọi $D(x; y; z)$.

Khi đó: $\overrightarrow{AD} = (x-5; y-3; z+1)$, $\overrightarrow{BD} = (x-2; y-3; z+4)$, $\overrightarrow{CD} = (x-1; y-2; z)$.

Vì tam giác ABC đều nên tứ diện $ABCD$ đều khi và chỉ khi $AD = BD = CD = AB = 3\sqrt{2}$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - x \\ y = 16 - 5x \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - x \\ y = 16 - 5x \\ 3x^2 - 16x + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \\ z = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

Vậy: $D(2; 6; -1) \vee D\left(\frac{10}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{7}{3}\right)$.

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 5)$, $B(5; -5; 7)$; $M(x; y; 1)$. Khi A, B, M thẳng hàng, tìm giá trị của $x; y$

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3; -4; 2)$; $\overrightarrow{AM} = (x-2; y+1; -4)$

Để ba điểm A, B, M thẳng hàng thì $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{-4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 7 \end{cases}$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 2; -3)$, $B(1; 0; 2)$, $C(x; y; -2)$ thẳng hàng. Khi đó, tính tổng $x + y$.

Lời giải

$\overrightarrow{AB} = (2; -2; 5)$, $\overrightarrow{AC} = (x+1; y-2; 1)$

A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow x + y = 1$.

Câu 27: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$. Tìm tọa độ điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Lời giải

Gọi $I(x; y; z)$. Khi đó: $\overrightarrow{IA} = (1-x; 2-y; -1-z)$, $\overrightarrow{IB} = (2-x; -1-y; 3-z)$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{IB} = (4-2x; -2-2y; 6-2z)$. Nên $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = (5-3x; -3y; 5-3z)$.

Ta có: $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-3x=0 \\ -3y=0 \\ 5-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{3} \\ y=0 \\ z=\frac{5}{3} \end{cases}$. Vậy $I\left(\frac{5}{3}; 0; \frac{5}{3}\right)$.



Cách 2: Áp dụng công thức tính nhanh: Nếu điểm I thỏa mãn $a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ thì

$$I = \left(\frac{a.x_A + b.x_B}{a+b}; \frac{a.y_A + b.y_B}{a+b}; \frac{a.z_A + b.z_B}{a+b} \right).$$

Suy ra $I = \left(\frac{1+2.2}{1+2}; \frac{2+2.(-1)}{1+2}; \frac{-1+2.3}{1+2} \right) = \left(\frac{5}{3}; 0; \frac{5}{3} \right).$

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $E(1;3;2)$, $F(0;-1;5)$, $K(2;4;-1)$ và tam giác ABC thỏa mãn $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CK} = \vec{0}$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác $\triangle ABC$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CK} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GE} - \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GK} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GK} - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GK} = \vec{0}.$

Suy ra: G cũng là trọng tâm của tam giác $\triangle EFK$.

Do đó:
$$\begin{cases} x_G = \frac{1+0+2}{3} = 1 \\ y_G = \frac{3-1+4}{3} = 2 \\ z_G = \frac{2+5-1}{3} = 2 \end{cases}$$

Câu 29: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\overrightarrow{PQ} = (0;1;-2)$, $\overrightarrow{PR} = (-2;-1;0)$ và điểm $M(1;-2;2)$ trung điểm của đoạn QR . Tìm tọa độ điểm Q .

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR} = (2;2;-2)$. Suy ra
$$\begin{cases} x_Q - x_R = 2 \\ y_Q - y_R = 2 \\ z_Q - z_R = -2 \end{cases} \quad (1).$$

Vì điểm $M(1;-2;2)$ trung điểm của đoạn QR nên
$$\begin{cases} x_Q + x_R = 2 \\ y_Q + y_R = -4 \\ z_Q + z_R = 4 \end{cases} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $Q(2;-1;1)$.

Câu 30: Trong không gian m , cho tam giác ABC có $A(-2;0;-3)$, $B(-4;1;-1)$, $C(-4;-4;1)$. Gọi D là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC . Tìm tọa độ điểm **D**.

Lời giải

Theo tính chất phân giác trong, ta có:



$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{AB}{AC} \overrightarrow{DC} \quad (1)$$

Mà: $AB = 3; AC = 6$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - x_D = -2(x_B - x_D) \\ y_C - y_D = -2(y_B - y_D) \\ z_C - z_D = -2(z_B - z_D) \end{cases} \Rightarrow D\left(-4; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right).$$

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$. Tìm tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC .

Lời giải

Ta có $BA = \sqrt{26}; BC = 2\sqrt{26}$.

Gọi D là chân đường phân giác trong góc B ta có $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow DC = 2DA$.

$$\text{Vì } D \text{ là chân đường phân giác trong nên } 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_D = \frac{2x_A + x_C}{3} = -\frac{2}{3} \\ y_D = \frac{2y_A + y_C}{3} = \frac{11}{3} \\ z_D = \frac{2z_A + z_C}{3} = 1 \end{cases}.$$

Vậy $D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$.

Câu 32: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC , có $A(0; -4; 0)$; $B(-5; 6; 0)$, $C(3; 2; 0)$. Tìm tọa độ chân đường phân giác ngoài của góc A .

Lời giải

Gọi $F(x; y; z)$ là chân đường phân giác ngoài của góc A .

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-5; 10; 0) \Rightarrow AB = 5\sqrt{5}$.

$\overrightarrow{AC} = (3; 6; 0) \Rightarrow AC = 3\sqrt{5}$. Do đó $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{3}$.

Theo tính chất đường phân giác ngoài của tam giác ta có: $\frac{FB}{FC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{3}$.



$$\text{Từ đó suy ra } \overrightarrow{FB} = \frac{5}{3} \overrightarrow{FC} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 - x = \frac{5}{3}(3 - x) \\ 6 - y = \frac{5}{3}(2 - y) \\ -z = \frac{5}{3}(-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = -4 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Vậy tọa độ chân đường phân giác ngoài của góc là $A(15; -4; 0)$.

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$ trong đó $A(1; 2; 0), B(3; 0; 8), C(-3; -6; 8)$. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên cạnh AB, BC thỏa mãn $AM = BN = \frac{1}{3}BC$. Gọi $I(a; b; c)$ là giao điểm của AN, DM . Tính $P = a + b + c$.

Lời giải

$$\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{DM} = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} \right) \cdot \left(\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \right) = 0 \Rightarrow AN \perp DM$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} \Rightarrow N(1; -2; 8)$$

Ta có $\triangle AIM$ và $\triangle ABN$ đồng dạng

$$\Rightarrow AI = \frac{AM \cdot AB}{AN} = \frac{1}{\sqrt{10}} AB, AN = \frac{\sqrt{10}}{3} AB \Rightarrow AI = \frac{3}{10} AN$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{10} \overrightarrow{AN} \Rightarrow I\left(1; \frac{4}{5}; \frac{12}{5}\right) \Rightarrow P = \frac{21}{5}.$$

DẠNG 3: TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ CÁC ỨNG DỤNG CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Áp dụng biểu thức tọa độ của tích có hướng và ứng dụng.

Câu 34: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = (3; 0; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; 0)$. Tính tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 6.$$

Câu 35: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 2; 1), B(-1; 3; 2), C(2; 4; -3)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

$$\overrightarrow{AB} = (-4; 1; 1), \overrightarrow{AC} = (-1; 2; -4) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 + 2 - 4 = 2.$$



Câu 36: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 3$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Độ dài của vectơ $3\vec{a} - 2\vec{b}$ bằng

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (3\vec{a} - 2\vec{b})^2 &= 9\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 9\vec{a}^2 - 12|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) + 4\vec{b}^2 \\ &= 9 \cdot 12 - 12 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \cos 30^\circ + 4 \cdot 9 = 36 \\ \Rightarrow |3\vec{a} - 2\vec{b}| &= 6. \end{aligned}$$

Câu 37: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;0)$, $B(1;2;-1)$, $C(0;1;1)$. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (0;1;-1), \overrightarrow{AC} = (-1;0;1).$$

$$\text{Nên } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{0+0-1}{\sqrt{1+1} \cdot \sqrt{1+1}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 120^\circ.$$

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1;2;0)$ và $\vec{b} = (-1;3;0)$. Tính góc giữa hai vectơ đó.

Lời giải

$$\text{Ta có } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ.$$

Câu 39: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2;1;2)$ và $\vec{b} = (1;0;-2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2}} = -\frac{2\sqrt{5}}{15}.$$

Câu 40: Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{a} = (2;1;-1)$; $\vec{b} = (1;3;m)$. Tìm m để $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

Lời giải

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 5 - m = 0 \Leftrightarrow m = 5.$$

Câu 41: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (2;3;-1)$ và $\vec{v} = (5;-4;m)$. Tìm m để $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 10 - 12 - m = 0 \Leftrightarrow -2 - m = 0 \Leftrightarrow m = -2.$$

Câu 42: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = (x;0;1)$, $\vec{v} = (\sqrt{2};\sqrt{2};0)$. Tìm x để góc giữa $\vec{u}$ và



$\vec{v}$ bằng 60° .

Lời giải

$$\text{Ta có } (\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ \Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}x = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x = 1.$$

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

Lời giải

Ta có

$$\overrightarrow{NM} = (3;2;-2), \overrightarrow{NP} = (2;m-2;1).$$

Tam giác MNP vuông tại N khi và chỉ khi $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = 0$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 2 + 2 \cdot (m-2) - 2 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = 0$.

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho vec tơ $\vec{u}(1;1;-2)$, $\vec{v}(1;0;m)$. Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng 45° .

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \cos(\vec{u}, \vec{v}) &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \Leftrightarrow \cos 45^\circ = \frac{1-2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1+m^2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-2m}{\sqrt{6(1+m^2)}} \Leftrightarrow \sqrt{12(1+m^2)} = 2-4m \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2-4m \geq 0 \\ 12(1+m^2) = (2-4m)^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m^2 - 4m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Câu 45: Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ có độ dài lần lượt là 1 và 2. Biết $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$ khi đó góc giữa 2 vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ là

Lời giải

$$\text{Ta có: } |\vec{a} + \vec{b}| = 3 \Leftrightarrow \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 9 \Leftrightarrow 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 9 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 9 - 1^2 - 2^2 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 2.$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2}{1 \cdot 2} = 1 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ.$$

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ; |\vec{a}| = 2; |\vec{b}| = 3$

1) Tính $|\vec{a} - 2\vec{b}|$.

2) Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{x} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.

Lời giải



1) Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b}) = -3$

$$\Rightarrow (\vec{a} - 2\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 52 \Rightarrow |\vec{a} - 2\vec{b}| = 2\sqrt{13}.$$

2) Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{a}(\vec{a} - 2\vec{b}) = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$ và $|\vec{x}| = \sqrt{(3\vec{a} + 2\vec{b})^2} = 6.$

$$\Rightarrow \cos(\vec{a}; \vec{x}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{x}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}; \vec{x}) = 60^\circ.$$

Câu 47: Cho ba điểm $A(5; -1; 2)$, $B(1; -3; 7)$ và $M(x; y; 1)$. Với giá trị nào của x, y thì ba điểm A, B, M thẳng hàng?

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4; -2; 5)$, $\overrightarrow{AM} = (x-5; y+1; -1)$.

Để ba điểm A, B, M thẳng hàng thì $\frac{x-5}{-4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{-1}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{29}{5} \\ y = \frac{-3}{5} \end{cases}.$

Câu 48: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2; 5; 1)$, $B(-2; -6; 2)$, $C(1; 2; -1)$ và điểm $M(m; m; m)$. Tìm giá trị m để $|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$\overrightarrow{AC} = (-1; -3; -2)$, $\overrightarrow{MB} = (-2-m; -6-m; 2-m)$

$$|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}| = \sqrt{m^2 + m^2 + (m-6)^2} = \sqrt{3m^2 - 12m + 36} = \sqrt{3(m-2)^2 + 24} \geq \sqrt{24}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m-2=0$

Vậy $m=2$ thì $|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}|$ nhỏ nhất.

Câu 49: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2; 5; 1)$, $B(-2; -6; 2)$, $C(1; 2; -1)$ và điểm $M(m; m; m)$, Tìm giá trị m để $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{MA} = (2-m; 5-m; 1-m)$, $\overrightarrow{MB} = (-2-m; -6-m; 2-m)$, $\overrightarrow{MC} = (1-m; 2-m; -1-m)$

$$MA^2 - MB^2 - MC^2 = -3m^2 - 24m - 20 = 28 - 3(m+4)^2 \leq 28$$

Vậy $m=-4$ thì $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 50: Cho ba điểm $A(1; -3)$, $B(-2; 6)$ và $C(4; -9)$. Tìm điểm M trên trục Ox sao cho vector $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải



* Cách 1: Ta có ba điểm A, B, C không thẳng hàng (do hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương). Gọi $M(m; 0) \in Ox$ và G là trọng tâm $\triangle ABC$ suy ra $G(1; -2)$. Khi đó

$$\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} = 3(1-m; -2)$$

Do đó $|\vec{u}| = 3|\overrightarrow{MG}| = 3\sqrt{(1-m)^2 + 4} \geq 3.2 = 6$. Suy ra $|\vec{u}|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 6 khi và chỉ khi $m=1$.

Vậy $M(1; 0)$.

* Cách 2: Gọi $M(m; 0) \in Ox$, ta có $\overrightarrow{MA} = (1-m; -3)$, $\overrightarrow{MB} = (-2-m; 6)$, $\overrightarrow{MC} = (4-m; -9)$.

$\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (3-3m; -6) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{(3-3m)^2 + 36} \geq 6$. Suy ra $|\vec{u}|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 6 khi và chỉ khi $m=1$.

Câu 51: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 0; -1)$, $B(-1; 1; 0)$, $C(1; 0; 1)$. Tìm điểm M sao cho $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Gọi } M(x; y; z) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = (x; y; z+1) \\ \overrightarrow{BM} = (x+1; y-1; z) \\ \overrightarrow{CM} = (x-1; y; z-1) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} AM^2 = x^2 + y^2 + (z+1)^2 \\ BM^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 \\ CM^2 = (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 \end{cases} \\ \Rightarrow 3MA^2 + 2MB^2 - MC^2 &= 3[x^2 + y^2 + (z+1)^2] + 2[(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2] - [(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2] \\ &= 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 6x - 4y + 8z + 6 = \left(2x + \frac{3}{2}\right)^2 + (2y-1)^2 + (2z+2)^2 - \frac{5}{4} \geq -\frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}, y = \frac{1}{2}, z = -1$, khi đó $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right)$.

Câu 52: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 3)$, $B(0; 1; 1)$, $C(1; 0; -2)$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên mặt phẳng Oxz sao cho $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi $I(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-a + 2 \cdot 0 - a + 3 \cdot 1 - a = 0 \\ 2-b + 2 \cdot 1 - b + 3 \cdot 0 - b = 0 \\ 3-c + 2 \cdot 1 - c + 3 \cdot -2 - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{2}{3} \\ c = -\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{6}\right).$$

Ta có.

$$MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}^2 + 2 \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}^2 + 3 \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}^2$$



$$= MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + IA^2 + 2MI^2 + 4\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + 2IB^2 + 3MI^2 + 6\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IC} + 3IC^2$$

$$= 6MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}) + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2$$

$$= 6MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2$$

Để $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì MI ngắn nhất.

Mà $M \in Oxz$ nên M là hình chiếu vuông góc I của lên Oxz .

$$\text{Vậy } M \left(\frac{2}{3}; 0; -\frac{1}{6} \right).$$

Câu 53: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm $A(2;0;2)$, $B(0;2;0)$, $C(1;0;3)$. Gọi M là điểm trong không gian thỏa mãn $MA^2 + MC^2 = MB^2$. Tính MP với $P(3;-2;5)$.

Lời giải

Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IB}$ (*).

Ta có $\overrightarrow{IA} = (2-x; -y; 2-z)$; $\overrightarrow{IB} = (-x; 2-y; -z)$; $\overrightarrow{IC} = (1-x; -y; 3-z)$.

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x+1-x=-x \\ -y-y=2-y \\ 2-z+3-z=-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \\ z=5 \end{cases} \Rightarrow I(3;-2;5) \equiv P.$$

Suy ra $\overrightarrow{IA} = (-1; 2; -3) \Rightarrow IA^2 = 14$; $\overrightarrow{IB} = (-3; 4; -5) \Rightarrow IB^2 = 50$; $\overrightarrow{IC} = (-2; 2; -2) \Rightarrow IC^2 = 12$.

Ta có $MA^2 + MC^2 = MB^2 \Leftrightarrow MA^2 + MC^2 - MB^2 = 0$.

$$\text{Khi đó } MA^2 + MC^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$$

$$= MI^2 + IA^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + MI^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IC} - MI^2 - IB^2 - 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB}$$

$$= MI^2 + (IA^2 + IC^2 - IB^2) + 2\overrightarrow{MI} (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IB}) = 0 \text{ hay}$$

$$\Leftrightarrow MP^2 + (14 + 12 - 50) = 0 \Leftrightarrow MP^2 = 24 \Rightarrow MP = 2\sqrt{6}.$$