



CHƯƠNG



VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ



HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(0; -1; 1)$, $B(-2; 1; -1)$, $C(-1; 3; 2)$.

- a) $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; 0)$.
- b) $ABCD$ là hình bình hành khi $D(1; 1; 4)$.
- c) $I(-1; 0; 0)$ là tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB .
- d) Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; -2)$

b) Gọi $D(x; y; z)$, ta có $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=2 \\ y-3=-2 \\ z-2=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=4 \end{cases}$. Vậy $D(1; 1; 4)$.

c) $\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0-2}{2} = -1 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0 \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 \end{cases}$ Nên $I(-1; 0; 0)$.

d) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; -2)$
 $\overrightarrow{AC} = (-1; 4; 1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 + 8 - 2 = 8$.

a) Sai: $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; -2)$

b) Đúng: $ABCD$ là hình bình hành khi $D(1; 1; 4)$.

c) Đúng: $I(-1; 0; 0)$.



d) Sai: Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (2; 1; 0)$ và $\vec{b} = (-1; 0; -2)$. $\vec{c} = (1; 7; 2)$.

a) $2\vec{a} = (4; 2; 0)$.

b) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}$.

c) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (0; -6; -4)$.

d) $\vec{a}$ cùng phương $\vec{c}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) $2\vec{a} = 2(2; 1; 0) = (4; 2; 0)$

b) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2}} = \frac{-2}{5}$.

c) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (0; -6; -4)$

d) Ta có $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{7} \neq \frac{0}{2}$,

$\vec{a}$ không cùng phương $\vec{c}$

a) Đúng: $2\vec{a} = (4; 2; 0)$

b) Sai: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{-2}{5}$

c) Đúng: $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (0; -6; -4)$

d) Sai: $\vec{a}$ không cùng phương $\vec{c}$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 3; 2)$ và $\vec{b} = (1; 1; -1)$.

a) Tọa độ vector $\vec{a} - \vec{b} = (1; 2; 3)$.

b) Tích vô hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 6.

c) Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

D. Cosin góc giữa vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\frac{\sqrt{51}}{51}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng. Vì $\vec{a} - \vec{b} = (2 - 1; 3 - 1; 2 - (-1)) = (1; 2; 3)$.

b) Sai. Vì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 3$

c) Đúng. Vì $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{2}{-1}$.

d) Sai. Vì $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{51}}$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (-2; 1; -3)$, $\vec{b} = (-1; -3; 2)$ và điểm $A(4; 6; -3)$.

a) Tọa độ vector $\vec{a} - 2\vec{b} = (0; 1; -1)$.



- b) Tọa độ điểm $B(2;7;-6)$ thì $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.
- c) Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương hướng.
- d) Góc giữa vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 120° .

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) Sai. Vì $\vec{a} - 2\vec{b} = (0;7;-7)$.

b) Đúng. Vì $\vec{a} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = x_B - 4 \\ 1 = y_B - 6 \\ -3 = z_B + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2 \\ y_B = 7 \\ z_B = -6 \end{cases} \Rightarrow B(2;7;-6)$.

c) Sai. Vì $\frac{-2}{-1} \neq \frac{1}{-3} \neq \frac{-3}{2}$.

d) Đúng. Vì $\cos(\vec{a};\vec{b}) = \frac{-2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 1 + (-3) \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$

Câu 5: Trong không gian Oxyz, cho ba vector $\vec{a} = (-1;1;0)$, $\vec{b} = (1;1;0)$, $\vec{c} = (1;1;1)$.

- a) Độ dài vector $\vec{a}$ bằng $\sqrt{2}$.
- b) Vector $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{a}$.
- c) Vector $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{c}$.
- d) Tọa độ vector $3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ bằng $(-2;4;-1)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Đúng. Vì $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0} = \sqrt{2}$.

b) Đúng. Vì $\vec{a}\vec{b} = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 = 0$

c) Sai. Vì $\vec{b}\vec{c} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 2$.

d) Đúng. Vì $3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = (-2;4;-1)$.

Câu 6: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(4;2;1)$, $B(2;1;3)$, $C(-1;3;-2)$.

- a) Tọa độ trọng tâm tam giác ABC bằng $\left(\frac{5}{3}; 2; \frac{2}{3}\right)$.
- b) Tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB bằng $\left(3; \frac{3}{2}; 2\right)$
- c) Tứ giác ABCD là hình bình hành thì tọa độ điểm $D = (1;4;-4)$.
- d) Ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Đúng. Tọa độ trọng tâm tam giác ABC $\left(\frac{4+2-1}{3}; \frac{2+1+3}{3}; \frac{1+3-2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}; 2; \frac{2}{3}\right)$.

b) Đúng. Tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB $\left(\frac{4+2}{2}; \frac{2+1}{2}; \frac{1+3}{2}\right) = \left(3; \frac{3}{2}; 2\right)$.

c) Đúng. Tứ giác ABCD là hình bình hành:



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-4 = -1-x_D \\ 1-2 = 3-y_D \\ 3-1 = -2-z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 4 \\ z_D = -4 \end{cases} \Rightarrow D(1; 4; -4).$$

d) Sai. Vì $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2; -1; 2) \\ \overrightarrow{AC} = (-5; 1; -3) \end{cases}$. Ta có: $\frac{-2}{-5} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{-3} \Rightarrow A, B, C$ không thẳng hàng.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 5; -1)$, $B(7; x; 1)$, $C(9; 2; y)$.

a) Ba điểm A, B, C thẳng hàng thì $x + y = 5$.

b) Điểm $G\left(\frac{19}{3}; \frac{8}{3}; 3\right)$ là trọng tâm tam giác ABC thì $x = 1; y = 3$.

c) Tam giác ABC vuông tại A thì $x = 13; y = -1$.

d) Tích vô hướng của $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} = -3x + 2y + 41$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Đúng.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = 4; x-5; 2$, $\overrightarrow{AC} = 6; -3; y+1$

Để ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = k \cdot 6 \\ x-5 = k \cdot -3 \\ 2 = k \cdot y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$.

Vậy $x + y = 5$.

b) Sai. Ta có: $\begin{cases} \frac{3+7+9}{3} = \frac{19}{3} \\ \frac{5+x+2}{3} = \frac{8}{3} \\ \frac{-1+1+y}{3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 9 \end{cases}$.

c) Đúng.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = 4; x-5; 2$, $\overrightarrow{AC} = 6; -3; y+1$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24 + (x-5)(-3) + 2(y+1)$$

Với $\begin{cases} x = 13 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

d) Đúng. Vì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24 + (x-5)(-3) + 2(y+1) = -3x + 2y + 41$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (1; 2; 3)$; $\vec{b} = (2; 2; -1)$, $\vec{c} = (4; 0; -4)$.

a) $3\vec{a} = (1; 6; 9)$.

b) $\vec{a} + \vec{b} = (3; 4; 2)$.

c) $\vec{a} - \vec{c} = (3; -2; -7)$.

d) $\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} = (7; 0; -4)$.

Lời giải



a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

- a) Sai. Vì $3\vec{a} = 3(1; 2; 3) = (3; 6; 9)$
 b) Đúng. Vì $\vec{a} + \vec{b} = (1 + 2; 2 + 2; 3 - 1) = (3; 4; 2)$.
 c) Sai. Vì $\vec{a} - \vec{c} = (1 - 4; 2 - 0; 3 + 4) = (-3; 2; 7)$.
 d) Đúng. Vì $\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} = (1 - 2 + 2 \cdot 4; 2 - 2 + 2 \cdot 0; 3 - (-1) + 2 \cdot (-4)) = (7; 0; -4)$.

Câu 9: Trong không gian Oxyz, cho hai vector $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$; $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$.

- a) Tọa độ vector $\vec{a} = (-1; 3; 4)$.
 b) Cosin góc giữa hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ bằng $\frac{1}{2}$.
 c) Tích vô hướng của hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ bằng 14.
 d) Hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc với nhau.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

- a) Đúng. Dựa theo định nghĩa suy ra $\vec{a} = (-1; 3; 4)$.
 b) Sai. Vì $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{-1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{546}}{39}$.
 c) Đúng. Vì $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 14$.
 d) Sai. Vì tích vô hướng của hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ khác 0.

Câu 10: Trong không gian Oxyz, cho ba vector $\vec{a} = (2; 1; -2)$, $\vec{b} = (1; 2; -4)$, $\vec{c} = (-1; -3; 3)$.

- a) $\vec{a} = 2\vec{b}$.
 b) $|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$.
 c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$
 d) $2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} = (-4; -19; 23)$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

- a) Sai. Vì $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng hướng.
 b) Sai. Vì $\begin{cases} |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3 \\ |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{21} \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}| = \frac{3\sqrt{21}}{21} |\vec{b}|$
 c) Đúng. Vì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-4) = 12$.
 d) Đúng.
 Ta có $2\vec{a} = (4; 2; -4)$, $-3\vec{b} = (-3; -6; 12)$, $5\vec{c} = (-5; -15; 15)$
 Vậy $2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} = (-4; -19; 23)$.

Câu 11: Trong không gian Oxyz, cho bốn vector $\vec{a} = (2; 3; 1)$, $\vec{b} = (-1; 5; 2)$, $\vec{c} = (4; -1; 3)$ và $\vec{x} = (-3; 22; 5)$.

- a) $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.
 b) Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.
 c) Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{c}$ không cùng phương.
 d) Hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc với nhau.



Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng.

$$\text{Đặt } \vec{x} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b} + p \cdot \vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - n + 4p = -3 \\ 3m + 5n - p = 22 \\ m + 2n + 3p = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \\ p = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}.$$

b) Sai. Vì $\frac{2}{-1} = \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$.

c) Đúng. Vì $\frac{2}{-1} \neq \frac{3}{5} \neq \frac{1}{2}$.

d) Sai. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 2 = 15$

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3}$.

b) $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$.

c) $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$

d) $|\vec{a} - 2\vec{b}| = 28$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
--------	---------	--------	--------

a) Sai. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 3$

b) Đúng. $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$

$$= \vec{a}^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) + \vec{b}^2$$

$$= 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ + 3^2 = 19$$

$$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}.$$

c) Sai. $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$

$$= \vec{a}^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) + \vec{b}^2$$

$$= 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ + 3^2 = 7$$

$$\Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{7}.$$

d) Sai. $|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = \vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2$

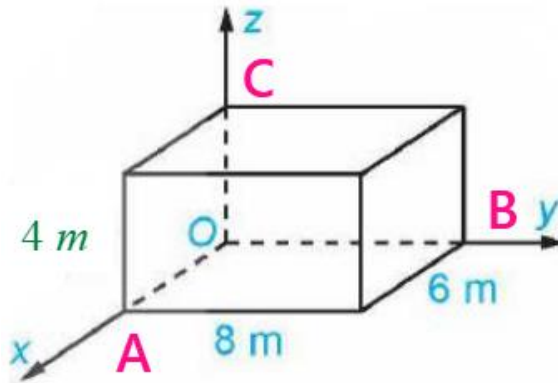
$$= \vec{a}^2 - 4|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) + 4\vec{b}^2$$

$$= 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ + 4 \cdot 3^2 = 28$$

$$\Rightarrow |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{28}.$$



Câu 13: Một phòng học có thiết kế dạng hình chữ nhật với chiều dài $8m$; chiều rộng $6m$ và chiều cao $4m$. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ có góc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn (như hình vẽ), đơn vị đo được lấy theo mét.

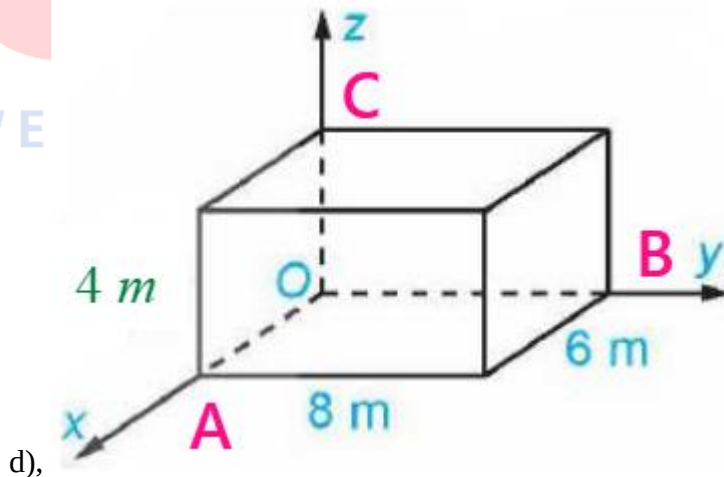


- a) $A \in Ox \Rightarrow A(8;0;0)$.
 b) $B \in Oy \Rightarrow B(0;6;0)$.
 c) $C \in Oz \Rightarrow C(6;6;3)$.
 d) Tọa độ của điểm treo đèn có tọa độ $K(3;4;4)$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
--------	--------	--------	---------

- a) $A \in Ox \Rightarrow A(6;0;0)$
 b) $B \in Oy \Rightarrow B(0;8;0)$
 c) $C \in Oz \Rightarrow C(0;0;4)$



d), $F(6;8;4)$.

Vị trí treo đèn là trung điểm K của CF và $K(3;4;4)$

- a) Sai: $A \in Ox \Rightarrow A(6;0;0)$
 b) Sai: $B \in Oy \Rightarrow B(0;8;0)$
 c) Sai: $C \in Oz \Rightarrow C(0;0;4)$
 d) Sai: Tọa độ của điểm treo đèn có tọa độ $K(3;4;4)$

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (-1; 0; 3)$ và $\vec{b} = (2; 2; 5)$.



a) $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 23$.

b) $|\vec{a}| = 10$.

c) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{13\sqrt{330}}{330}$.

d) $|2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{493}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) **Đúng**

Ta có $\vec{a} + \vec{b} = (1; 2; 8)$. Suy ra $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 8 = 23$.

b) **Sai**. $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.

c) **Đúng**: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{-1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 5}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + 5^2}} = \frac{13}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{33}} = \frac{13\sqrt{330}}{330}$.

d) **Đúng**. $2\vec{a} = (-2; 0; 6)$

$3\vec{b} = (6; 6; 15)$

$\Rightarrow 2\vec{a} + 3\vec{b} = (4; 6; 21) \Rightarrow |2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 6^2 + 21^2} = \sqrt{493}$.

Câu 15: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $D'(0; 3; -3)$.

a) $\vec{AB} = (0; 0; 3)$.

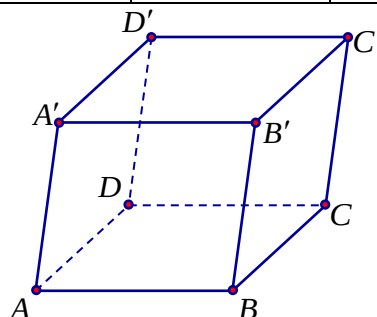
b) Toạ độ trọng tâm tam giác ABC là $G(1, -1, 0)$.

c) Toạ độ điểm C là $C(3, 3, 0)$.

d) Toạ độ trọng tâm tam giác $A'B'C$ là $K(2, -1, 2)$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
--------	--------	---------	--------



Ta có $\vec{AB} = (3; 0; 0)$. Gọi $C(x; y; z) \Rightarrow \vec{DC} = (x; y - 3; z)$

$ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow (x; y - 3; z) = (3; 0; 0) \Rightarrow C(3; 3; 0)$

Ta có $\vec{AD} = (0; 3; 0)$. Gọi $A'(x'; y'; z') \Rightarrow \vec{A'D'} = (-x'; 3 - y'; -3 - z')$

$ADD'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow \vec{AD} = \vec{A'D'} \Rightarrow (0; 3; 0) = (-x'; 3 - y'; -3 - z') \Rightarrow A'(0; 0; -3)$



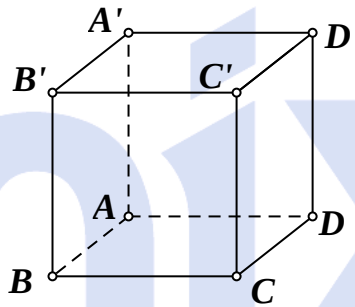
Gọi $B'(x_0; y_0; z_0) \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = (x_0; y_0; z_0 + 3)$

$ABB'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow (x_0; y_0; z_0 + 3) = (3; 0; 0) \Rightarrow B'(3; 0; -3)$

G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{0+3+3}{3} = 2 \\ y_G = \frac{0+0+3}{3} = 1 \\ z_G = \frac{0+0+0}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow G(2; 1; 0).$

K là trọng tâm tam giác $A'B'C \Rightarrow \begin{cases} x_K = \frac{0+3+3}{3} = 2 \\ y_K = \frac{0+0+3}{3} = 1 \\ z_K = \frac{-3-3+0}{3} = -2 \end{cases} \Rightarrow K(2; 1; -2).$

Câu 16: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc tọa độ O và các đỉnh $A'(0;0;5)$, $B(3;0;0)$, $D(0;4;0)$.



a) $D'(3;4;5)$.

b) $\overrightarrow{CB'} = (0;4;-5)$.

c) $\overrightarrow{AC'} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$.

d) Nếu $\overrightarrow{A'E} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'}$ thì $E(3;4;10)$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) **Sai.**

Điểm $D(0;4;0)$ và $A'(0;0;5)$, suy ra: $D'(0;4;5)$

b) **Sai.**

Điểm $B(3;0;0)$, $D(0;4;0)$ và $A'(0;0;5)$, suy ra: $C(3;4;0)$ và $B'(3;0;5)$.

Khi đó: $\overrightarrow{CB'} = (0;-4;5)$.

c) **Đúng.**

Điểm $C(3;4;0)$ và $A'(0;0;5)$ suy ra: $C'(3;4;5)$.

Khi đó: $\overrightarrow{AC'} = (3;4;5) = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$.

d) **Đúng.**

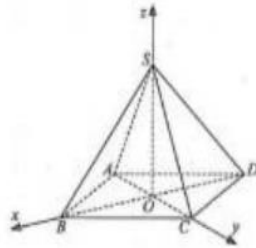
Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} = (3;4;5)$.



$$\overrightarrow{A'E} = (x_E; y_E; z_E - 5).$$

$$\text{Khi đó: } \overrightarrow{A'E} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 3 \\ y_E = 4 \\ z_E - 5 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 3 \\ y_E = 4 \\ z_E = 10 \end{cases}. \text{ Vậy } E(3; 4; 10).$$

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp đều $S.ABCD$ và O là tâm của đáy $ABCD$ như hình vẽ. Biết cạnh $SA = 4$ và $AB = 2\sqrt{2}$. Khi đó:



a) Tọa độ điểm A là $(0; 2; 0)$.

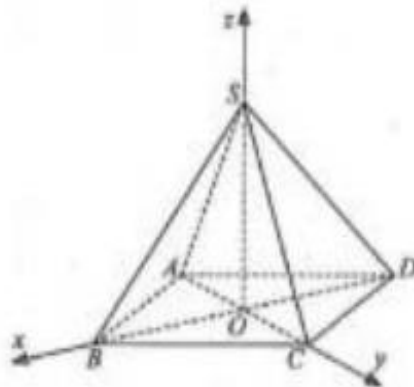
b) Trọng tâm của tam giác SAB là điểm $G\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

c) Nếu $E(a; 0; b)$ là điểm trên mặt phẳng (Oxz) sao cho C, E, G thẳng hàng thì $a.b = \sqrt{3}$.

d) Nếu $K(0; m; n)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $KG + KB$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $m^2 + n^2 = 1$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
--------	--------	--------	---------



a) Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $ABCD$ là hình vuông. Do đó:

$$AB = 2\sqrt{2} \Rightarrow AC = AB\sqrt{2} = 4 \Rightarrow AO = 2 \Rightarrow A(0; -2; 0) \Rightarrow \text{a) SAI.}$$

$$b) BD = AC = 4 \Rightarrow BO = 2 \Rightarrow B(2; 0; 0)$$

$$\text{Ta lại có, } SA^2 = SO^2 + OA^2 \Rightarrow SO^2 = SA^2 - OA^2 = 12 \Rightarrow SO = 2\sqrt{3} \Rightarrow S(0; 0; 2\sqrt{3})$$

$$\text{Khi đó, với } G \text{ là trọng tâm của tam giác } SAB \text{ thì tọa độ điểm } G\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right).$$

Vậy b) SAI.

$$c) \text{ Ta có: } A(0; -2; 0) \Rightarrow C(0; 2; 0) \Rightarrow \overrightarrow{CG} = \left(\frac{2}{3}; -\frac{8}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$



$$\overrightarrow{CE} = (a; -2; b)$$

$$C, E, G \text{ thẳng hàng} \Rightarrow \frac{a}{\frac{2}{3}} = \frac{-2}{-\frac{8}{3}} = \frac{b}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow a.b = \frac{\sqrt{3}}{4}. \text{ Vậy c) SAI.}$$

d) Gọi B' là điểm đối xứng của B qua (Oyz) . Khi đó, $B' \equiv D(-2; 0; 0)$ và $KG + KB = KG + KD \geq GD$ nhỏ nhất khi K, D, G thẳng hàng

$$\text{mà } \overrightarrow{DG} = \left(\frac{8}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3} \right), \overrightarrow{DK} = (2; m; n) \Rightarrow \frac{2}{\frac{8}{3}} = \frac{m}{-\frac{2}{3}} = \frac{n}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ n = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow m^2 + n^2 = 1. \text{ Vậy d)}$$

ĐÚNG.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(3; -4; 1)$, $B(1; 1; -1)$ và $C(2; 0; -3)$.

a) Hình chiếu vuông góc của điểm B lên mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là $(1; 0; -1)$.

b) Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $(2; -1; -1)$.

c) Biết rằng điểm I thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Cao độ của điểm I là -2 .

d) Xét M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (Oxz) . Biểu thức $K = MA^2 + 3MB^2 - 2MC^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -1 .

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Chọn đúng

Hình chiếu vuông góc của điểm $B(1; 1; -1)$ lên mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là $(1; 0; -1)$.

b) Chọn đúng

$$\text{Gọi } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC, \text{ ta có: } \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 2 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = -1 \Rightarrow G(2; -1; -1) \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = -1 \end{cases}$$

c) Chọn sai

Gọi $I(a; b; c)$. Khi đó:

$$\overrightarrow{IA} = (3-a; -4-b; 1-c), \overrightarrow{IB} = (3-3a; 3-3b; -3-3c), -2\overrightarrow{IC} = (-4+2a; 2b; 6+2c)$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = (2-2a; -1-2b; 4-2c).$$

$$\text{Theo giả thiết } \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-2a=0 \\ -1-2b=0 \\ 4-2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-\frac{1}{2} \\ c=2 \end{cases}. \text{ Vậy cao độ của điểm } I \text{ là } 2.$$

d) Chọn đúng

Vì $M(a; 0; c) \in (Oxz)$



Ta có: $\overrightarrow{MA} = (3-a; -4; 1-c)$; $\overrightarrow{MB} = (1-a; 1; -1-c)$; $\overrightarrow{MC} = (2-a; 0; -3-c)$.

$$MA^2 = (3-a)^2 + 4^2 + (1-c)^2 = a^2 + c^2 - 6a - 2c + 26$$

$$MB^2 = (1-a)^2 + 1^2 + (1+c)^2 = a^2 + c^2 - 2a + 2c + 3$$

$$MC^2 = (2-a)^2 + 0^2 + (3+c)^2 = a^2 + c^2 - 4a + 6c + 13$$

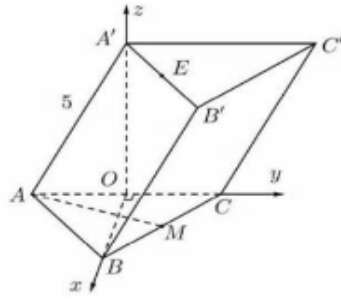
$$K = MA^2 + 3MB^2 - 2MC^2$$

$$= a^2 + c^2 - 6a - 2c + 26 + 3(a^2 + c^2 - 2a + 2c + 3) - 2(a^2 + c^2 - 4a + 6c + 13)$$

$$= 2a^2 + 2c^2 - 4a - 8c + 9$$

$$= 2(a-1)^2 + 2(c-2)^2 - 1 \geq -1. \text{ Khẳng định d đúng.}$$

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 8 và cạnh bên bằng 5. Góc tọa độ O là trung điểm của cạnh AC và các điểm B, C, A' thuộc các tia Ox, Oy, Oz như hình vẽ bên.



a) Tọa độ trung điểm cạnh BC là $M(2; 2; 0)$.

b) $\cos A'AB = \frac{2}{5}$.

c) Nếu E là trung điểm cạnh $A'B'$ thì $ME = 2\sqrt{5}$.

d) Gọi điểm F sao cho $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{FC'}$ và đoạn $PQ = 1$ luôn thay đổi trên mặt phẳng (ABC) . Giá trị nhỏ nhất của $A'P + FQ = \frac{\sqrt{514}}{3}$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) **Sai.**

Từ hình vẽ ta có: $B(4\sqrt{3}; 0; 0)$ và $C(0; 4; 0)$, suy ra tọa độ trung điểm BC là: $M(2\sqrt{3}; 2; 0)$

b) **Đúng.**

Từ hình vẽ ta có: $A(0; -4; 0)$, $A'O = \sqrt{A'A^2 - AO^2} = 3 \Rightarrow A'(0; 0; 3) \Rightarrow A'B = \sqrt{57}$.

Xét tam giác $A'AB$ có: $\cos A'AB = \frac{AB^2 + A'A^2 - A'B^2}{2AB.AA'} = \frac{8^2 + 5^2 - 57}{2.8.5} = \frac{2}{5}$.

c) **Sai.**

Gọi tọa độ điểm $B'(x; y; z)$. Ta thấy: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$. Mà $\begin{cases} \overrightarrow{AA'} = (0; 4; 3) \\ \overrightarrow{BB'} = (x - 4\sqrt{3}; y; z) \end{cases}$



$$\text{Suy ra: } \begin{cases} x - 4\sqrt{3} = 0 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4\sqrt{3} \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow B'(4\sqrt{3}; 4; 3)$$

Nếu E là trung điểm của $A'B' \Rightarrow E(2\sqrt{3}; 2; 3) \Rightarrow ME = \sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2} = 3$

d) Đúng.

Ta có: $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{FC'} \Rightarrow F\left(0; \frac{20}{3}; 2\right)$. Ta thấy: $z_{A'} \cdot z_F > 0$ nên A', F nằm cùng phía so với (Oxy) .

Góc tọa độ $O(0; 0; 0), F'\left(0; \frac{20}{3}; 0\right)$ lần lượt là hình chiếu của A', F .

Gọi $A_1(0; 0; -3)$ là điểm đối xứng với A qua (Oxy) .

A_2 là điểm thỏa mãn đẳng thức: $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{PQ}$

Ta có: $A'P + FQ = A_1P + FQ = A_2Q + FQ \geq FA_2$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\overrightarrow{A_1A_2}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OF'} = \left(0; \frac{20}{3}; 0\right)$.

$$\text{Suy ra: } FA_2 = \sqrt{A_2H^2 + FH^2} = \sqrt{\left(\frac{20}{3} - 1\right)^2 + 5^2} = \frac{\sqrt{514}}{3}$$

Khi đó, giá trị nhỏ nhất của $A'P + FQ = \frac{\sqrt{514}}{3}$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(8; 9; 2), B(3; 5; 1), C(11; 10; 4)$.

a) Điểm D thỏa mãn $ABCD$ là hình bình hành có tọa độ $D(6; 6; 3)$.

b) Độ dài trung tuyến $AM = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

c) $BAC = 30^\circ$.

d) Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm N có tung độ bằng 1.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) Sai

Điểm $D(x; y; z)$ thỏa mãn $ABCD$ là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 = 11 - x \\ -4 = 10 - y \\ -1 = 4 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 14 \\ z = 5 \end{cases} \Rightarrow D(16; 14; 5).$$

b) Đúng

Gọi M là trung điểm của BC ta có:

$$M\left(7; \frac{15}{2}; \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \left(-1; -\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow AM = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

c) Sai

Ta có: $\overrightarrow{AB}(-5; -4; -1); \overrightarrow{AC}(3; 1; 2)$



Vậy $\cos BAC = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{-15-4-2}{\sqrt{25+16+1}\sqrt{9+1+4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BAC = 150^\circ$.

d) Đúng

Gọi $N(x; y; 0)$ là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (Oxy) . Suy ra A, N, B thẳng hàng hay $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}$ là 2 vectơ cùng phương. Ta có $\overrightarrow{AB}(-5; -4; -1)$ $\overrightarrow{AN}(x-8; y-9; -2)$

Do đó: $\frac{x-8}{-5} = \frac{y-9}{-4} = \frac{-2}{-1}$ dẫn đến hệ phương trình $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$. Vậy $N(-2; 1; 0)$.

Câu 21: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(0; 0; 0)$; $B(2; 0; 0)$; $D(0; 3; 0)$; $C'(2; 3; 4)$.

a) Tọa độ đỉnh C là $(2; 3; 0)$.

b) Tọa độ trọng tâm G của tam giác $BC'D$ là $(1; 1; \frac{4}{3})$.

c) Độ dài đường chéo $A'B$ là $2\sqrt{5}$.

d) Tọa độ chân đường phân giác ngoài của góc ABC' trong tam giác ABC' là $E(a; b; c)$. Khi đó $2a - 3b + c = \frac{2}{3}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Đúng

Gọi $C(x; y; z)$. Ta có: $\overrightarrow{BC} = (x-2; y; z)$, $\overrightarrow{AD} = (0; 3; 0)$.

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên ta có: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ y=3 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=0 \end{cases}$. Vậy $C(2; 3; 0)$.

b) Sai

Tọa độ trọng tâm G của tam giác $BC'D$ là:

$x = \frac{2+0+2}{3} = \frac{4}{3}$; $y = \frac{0+3+3}{3} = 2$; $z = \frac{0+0+4}{3} = \frac{4}{3}$. Suy ra: $G(\frac{4}{3}; 2; \frac{4}{3})$.

c) Đúng

Độ dài đường chéo $A'B = C'D = \sqrt{(0-2)^2 + (3-3)^2 + (0-4)^2} = 2\sqrt{5}$.

d) Đúng

Ta có: $AB = \sqrt{2^2} = 2$; $BC' = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Gọi $E(a; b; c)$ là chân đường phân giác ngoài của góc ABC' .

Ta có: $\overrightarrow{AE} = (a; b; c)$, $\overrightarrow{C'E} = (a-2; b-3; c-4)$.

Vì E là chân đường phân giác ngoài của góc ABC' nên



$$\frac{AE}{C'E} = \frac{BA}{BC'} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{BA}{BC'} \cdot \overrightarrow{C'E} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{C'E} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{5}(a-2) \\ b = \frac{2}{5}(b-3) \\ c = \frac{2}{5}(c-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{3} \\ b = -2 \\ c = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

Khi đó: $2a - 3b + c = \frac{2}{3}$.

Câu 22: Trong hệ trục tọa độ, Oxyz cho bốn điểm $A(0; -2; 1), B(1; 0; -2), C(3; 1; -2), D(-2; -2; -1)$.

- a) Bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng
- b) Tam giác ACD là tam giác vuông tại A .
- c) Góc giữa hai véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là góc tù.
- d) Tam giác ABD là tam giác cân tại B .

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

a) sai

Ta có $\overrightarrow{AB}(1; 2; -3), \overrightarrow{AC}(3; 3; -3), \overrightarrow{AD}(-2; 0; -2) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (3; -6; -3) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

Nên 4 điểm A, B, C, D đồng phẳng

b) đúng

$\overrightarrow{AC}(3; 3; -3), \overrightarrow{AD}(-2; 0; -2) \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ nên tam giác ACD là tam giác vuông tại A

c) đúng

$\overrightarrow{CD}(-5; -3; 1) \Rightarrow \cos \angle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} = \frac{-\sqrt{10}}{5} < 0$ suy ra góc giữa hai véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là góc tù

d) đúng

$AB = \sqrt{14}, BD = \sqrt{14} \Rightarrow AB = BD$. Vậy (d) đúng

Câu 23: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(2; -1; 1), B(-1; 3; -1), C(5; -3; 4)$.

- a) Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng -52 .
- b) Góc ABC là góc tù.
- c) Với điểm $D(2; 1; -1)$ thì tứ giác $ABCD$ theo thứ tự đó là một hình bình hành.
- d) Điểm $E(1; 2; x)$ với $\triangle ABE$ vuông tại B thì giá trị $x = -6$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3; 4; -2), \overrightarrow{BC} = (6; -6; 5) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (-3) \cdot 6 + 4 \cdot (-6) + (-2) \cdot 5 = -52$.

b) Ta có:

$$\cos \angle ABC = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{52}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{6^2 + (-6)^2 + 5^2}} = \frac{52}{\sqrt{2813}} > 0$$

Suy ra góc ABC là góc nhọn.

c) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3; 4; -2), \overrightarrow{DC} = (3; -4; 5) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$.



Do đó, $ABCD$ không là hình bình hành.

d) Để $\triangle ABE$ vuông tại B thì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$

Mà $\overrightarrow{BE} = (2; -1; x+1) \Rightarrow -6 - 4 - 2(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -6$.

Câu 24: Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; -2; 1)$, $B(-2; -2; -1)$, $C(3; 1; -2)$.

a) Hình chiếu của điểm C lên trục Oz là $C'(0; 0; -2)$.

b) Trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{1}{3}; 1; \frac{-2}{3}\right)$.

c) Tam giác ABC vuông tại A .

d) Nếu $M(a; b; 0)$ là điểm thuộc mặt phẳng Oxy sao cho ba điểm B, C, M thẳng hàng thì $a + b = 12$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng.

Hình chiếu của điểm $C(3; 1; -2)$ lên trục Oz là $C'(0; 0; -2)$.

b) Sai.

$G(x_G; y_G; z_G)$ là trọng tâm của tam giác ABC , suy ra:

$$\begin{cases} x_G = \frac{0 + (-2) + 3}{3} = \frac{1}{3} \\ y_G = \frac{-2 + (-2) + 1}{3} = -1 \\ z_G = \frac{1 + (-1) + (-2)}{3} = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

Vậy $G\left(\frac{1}{3}; -1; \frac{-2}{3}\right)$.

c) Đúng.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-2; 0; -2)$, $\overrightarrow{AC}(3; 3; -3)$. Ta thấy $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + (-2) \cdot (-3) = 0$ nên $AB \perp AC$.

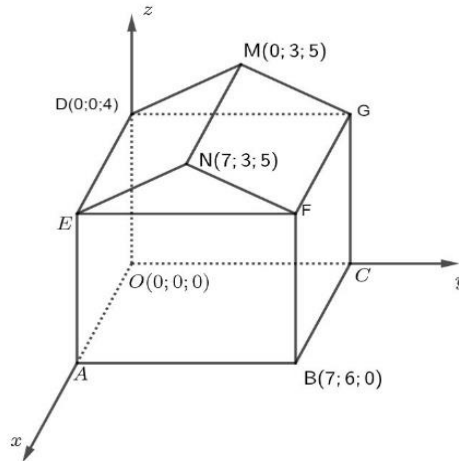
Suy ra tam giác ABC vuông tại A .

d) Sai.

Ta có: $\overrightarrow{BC}(5; 3; -1)$, $\overrightarrow{BM}(a+2; b+2; 1)$. Do ba điểm B, C, M thẳng hàng nên $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}$ cùng

phương nên suy ra: $\frac{a+2}{5} = \frac{b+2}{3} = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = -5 \end{cases} \Rightarrow a + b = -12$

Câu 25: Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó $OABC$ là hình hộp chữ nhật, $EFN.DGM$ là hình lăng trụ đứng và các điểm có tọa độ như hình vẽ



- a) Điểm $F(7;6;4)$
 b) Độ dài $FN = \sqrt{10}$.
 c) Tích vô hướng $\overrightarrow{FN} \cdot \overrightarrow{FE} = -18$
 d) Góc dốc của mái nhà, tức là số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG, hai mặt lần lượt là $(FGNM)$ và $(FGDE)$ là $20,4^\circ$ (làm tròn đến hàng phần mười của độ).

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Đúng

vì tọa độ điểm $E(7;0;4)$, $A(7;0;0)$, $C(0;6;0)$, $G(0;6;4)$, $F(7;6;4)$

b) Đúng.

vì $\overrightarrow{FN} = (0; -3; 1)$ nên độ dài $FN = \sqrt{10}$

c) Sai

. vì $\overrightarrow{FE} = (0; -6; 0)$ nên $\overrightarrow{FN} \cdot \overrightarrow{FE} = 18$

d) Sai.

vì số đo của góc nhị diện có cạnh FG, hai mặt là $(FGMN)$ và $(FGDE)$ bằng góc giữa 2 vector $(\overrightarrow{FN}; \overrightarrow{FE})$

Mà $\cos(\overrightarrow{FN}; \overrightarrow{FE}) = \frac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow (\overrightarrow{FN}; \overrightarrow{FE}) \approx 18,4^\circ$

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;3)$, $B(3;0;-2)$, $C(2;1;6)$.

a) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

c) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì điểm D có tọa độ là $(4; -1; 1)$.

d) Tọa độ tâm của hình bình hành $ABCD$ là $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Lời giải

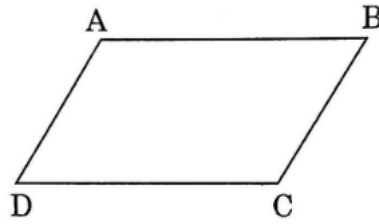
a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Đúng

$\overrightarrow{AB} = (2; -2; -5)$, $\overrightarrow{AC} = (1; -1; 3)$.

$\frac{2}{1} \neq \frac{-5}{3}$ nên hai vecto không cùng phương. Vậy ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Sai



Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

c) Sai

Gọi $D(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = (2 - x; 1 - y; 6 - z)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2 - x \\ -2 = 1 - y \\ -5 = 6 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = 11 \end{cases}$

Vậy $D(0; 3; 11)$.

d) Đúng

Toạ độ tâm của hình bình hành $ABCD$ là trung điểm I của AC , $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2; 1; 1)$, $B(1; 2; 1)$ và $C(2; -1; 3)$.

a) Diện tích của tam giác ABC bằng $\sqrt{3}$.

b) Góc BAC bằng 120° .

c) Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là $(5; 2; 5)$.

d) Đường phân giác trong của góc BAC cắt cạnh BC tại điểm D có toạ độ là $\left(\frac{4}{3}; 1; \frac{5}{3}\right)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Đúng.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0; -2; 2) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (2; 2; 2)$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right| = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{3}.$$

b) Đúng.

$$\text{Ta có } \cos BAC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{(-1) \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 2}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow BAC = 120^\circ.$$

c) Sai.

Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là $\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

d) Đúng

Ta có $AB = \sqrt{2}$; $AC = 2\sqrt{2}$.

Ta có AD là đường phân giác trong của góc BAC ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2DB = DC \Rightarrow 2\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{DC}$$



$$\Rightarrow 2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_D = \frac{2x_B + x_C}{2+1} = \frac{4}{3} \\ y_D = \frac{2y_B + y_C}{2+1} = 1 \\ z_D = \frac{2z_B + z_C}{2+1} = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{4}{3}; 1; \frac{5}{3}\right).$$

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;3;-2)$, $B(3;4;-5)$, $C(2;0;0)$

a) Góc $BAC = 120^\circ$.

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;1;-3)$, $\overrightarrow{AC} = (1;-3;2)$.

c) Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G\left(2; \frac{7}{3}; -\frac{7}{3}\right)$.

d) Tam giác ABC là tam giác đều.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Đúng.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2;1;-3)$, $\overrightarrow{AC} = (1;-3;2)$

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 120^\circ \Rightarrow BAC = 120^\circ$$

b) Đúng.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2;1;-3)$, $\overrightarrow{AC} = (1;-3;2)$

c) Đúng.

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$

$$\Rightarrow G\left(2; \frac{7}{3}; -\frac{7}{3}\right).$$

d) Sai.

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (2;1;-3) \Rightarrow AB = \sqrt{14}$$

$$\overrightarrow{AC} = (1;-3;2) \Rightarrow AC = \sqrt{14}$$

$$\overrightarrow{BC} = (-1;-4;5) \Rightarrow BC = \sqrt{42}$$

$\Rightarrow \triangle ABC$ cân tại A

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$ cho hình bình hành $ABCD$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $C(1;-1;1)$.

a) Tọa độ của vector $\overrightarrow{AB}$ là $(1;1;1)$.

b) Tọa độ của điểm D là $(0;2;0)$.

c) Có 2 điểm M trên trục hoành để tam giác MAB vuông tại A .



d) $|\overrightarrow{AC}| = 1.$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Đúng.

b) Sai.

Gọi $D(x; y; z)$

$$ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (x-1; y; z-1) = (-1; -2; -1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \\ z=0 \end{cases}$$

Vậy $D(0; -2; 0)$.

c) Sai.

$$M \in Ox \Rightarrow M(m; 0; 0) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (m-1; 0; -1).$$

$$\text{Tam giác } MAB \text{ vuông tại } A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot (m-1) - 1 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow m-1=1 \Leftrightarrow m=2$$

$$\Rightarrow M(2; 0; 0).$$

Vậy chỉ có một điểm M trên trục hoành để tam giác MAB vuông tại A .

d) Đúng. $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(1-1)^2 + (-1-0)^2 + (1-1)^2} = 1.$

Câu 30: Trong không gian cho hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-1; 3; 0); B(1; 2; -1); C(1; 1; -2)$.

a) $\overrightarrow{AB} = (2; -1; -1).$

b) $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$

c) Tọa độ điểm D là $(-1; 2; -1).$

d) Diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{2}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Đúng.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (2; -1; -1).$$

b) Đúng.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (2; -1; -1); \overrightarrow{AC} = (2; -2; -2)$$

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot (-2)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{8}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{12}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

c) Đúng.

$$\text{Để tứ giác } ABCD \text{ là hình bình hành thì } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{DC} = (1 - x_D; 1 - y_D; -2 - z_D).$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_D = 2 \\ 1 - y_D = -1 \\ -2 - z_D = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -1 \\ y_D = 2 \\ z_D = -1 \end{cases} \Rightarrow D(-1; 2; -1)$$

d) Sai.



$$\overrightarrow{AB} = (2; -1; -1) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

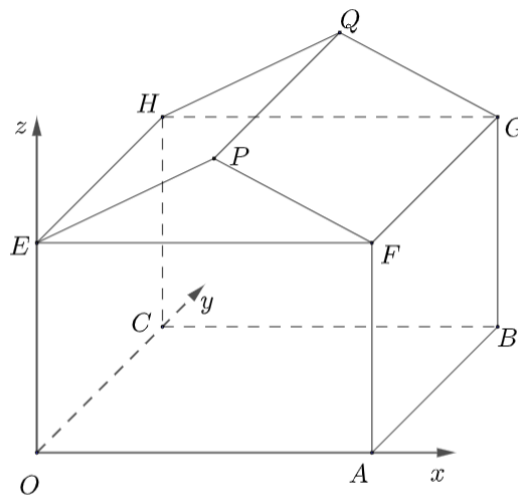
$$\overrightarrow{AC} = (2; -2; -2) \Rightarrow AC = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{BC} = (0; -1; -1) \Rightarrow BC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)} = \sqrt{2}.$$

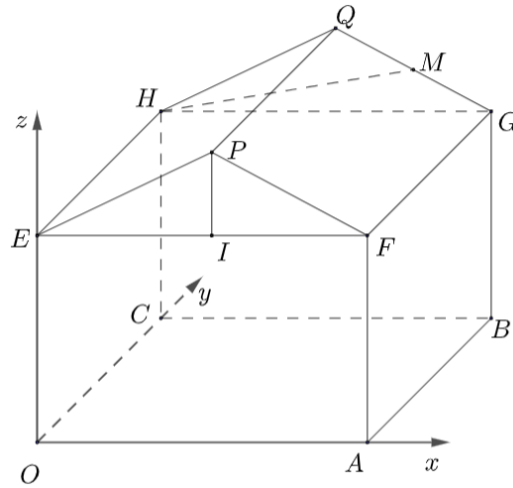
Câu 31: Một kho chứa hàng có dạng hình lăng trụ đứng $OAFPECBGQH$ với $OAFE$ là hình chữ nhật với EFP là tam giác cân tại P . Biết $OA = 4m$; $AB = 6m$; $HC = 5$; độ dốc của mái nhà, tức là số đo góc nhị diện $[Q, FG, H]$ bằng 45° . Người ta mô hình hóa nhà kho bằng cách chọn hệ trục tọa độ tương ứng như hình vẽ dưới đây (đơn vị trên mỗi trục là $1m$).



- Tọa độ của $\overrightarrow{PQ}$ là $(0; 6; 0)$.
- Tọa độ của điểm G là $(6; 4; 5)$.
- Chiều cao kho hàng tức là khoảng cách từ nóc nhà (điểm cao nhất của nóc nhà) và sàn nhà bằng $7m$.
- Người ta muốn lắp camera quan sát trong nhà kho tại vị trí trung điểm của GQ và đầu thu dữ liệu đặt tại vị trí O . Người ta thiết kế đường dây cáp nối từ O đến E rồi từ E đến H . Độ dài đoạn cáp nối tối thiểu bằng $11 + \sqrt{10} m$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------



a) Đúng

Ta có $A(4;0;0)$, $B(4;6;0)$, $C(0;6;0)$, $H(0;6;5)$.

Vì P, Q có cùng cao độ và hoành độ, $PQ = AB = 6m$ nên $\overrightarrow{PQ} = (0;6;0)$

b) Sai

Ta có $A(4;0;0)$, $B(4;6;0)$, $C(0;6;0)$, $H(0;6;5)$.

Suy ra $G(4;6;5)$.

c) Đúng

Gọi I là trung điểm của EF . Vì $\triangle EFP$ cân tại P nên PI là đường cao.

Khoảng cách giữa nóc nhà và sàn nhà là $PI + FA = PI + 5(m)$

Vì $QG \perp FG, HG \perp FG$ nên số đo góc nhị diện $[Q, FG, H]$ là $QGH = 45^\circ$. Suy ra

$PFE = 45^\circ$. Suy ra $\triangle EFP$ vuông cân tại P . Suy ra $PI = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2(m)$

Vậy khoảng cách giữa nóc nhà và sàn nhà là $7m$.

d) Đúng

Xét $\triangle QHG$ vuông cân tại Q có $HQ = QG = \frac{HG}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}(m)$.

Gọi M là trung điểm của GQ suy ra $QM = \sqrt{2}(m)$.

Xét $\triangle QHM$ vuông tại Q có $HM^2 = QM^2 + HQ^2$ suy ra

$$HM = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{10}(m).$$

Suy ra độ dài đoạn cáp nối tối thiểu bằng $OE + EH + HM = 5 + 6 + \sqrt{10} = 11 + \sqrt{10}(m)$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$ cho 3 vectơ $\vec{a} = (1; -1; 2)$, $\vec{b} = (3; 0; -2)$, $\vec{c} = (7; -1; -2)$.

a) Toạ độ vectơ $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = (6; -3; 4)$.

b) $|\vec{b}| = 1$.

c) Giá trị $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{-1}{\sqrt{78}}$.



d) Nếu $\vec{d}$ có độ lớn bằng 1 và $\vec{a} \cdot \vec{d} = 2$ thì khi đó $\vec{a} + \vec{d}^2 = 11$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Đúng.

$$2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = (6; -3; 4).$$

b) Sai.

$$|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}.$$

c) Đúng.

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{13}} = \frac{-1}{\sqrt{78}}.$$

d) Đúng.

$$\text{Ta có: } \vec{a} + \vec{d}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{d}^2 = 6 + 2 \cdot 2 + 1 = 11.$$

Câu 33: Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC với $A(-2; 3; 1), B(2; 1; 0), C(-3; -1; 1)$

a) Gọi M là điểm nằm trên trục hoành sao cho M cách đều các điểm A, B. Khi đó $MC = \frac{3\sqrt{39}}{8}$

b) Tam giác ABC có góc ABC là góc nhọn.

c) Nếu $D(x_0; y_0; z_0)$ là điểm thỏa mãn tứ giác ABCD là hình thang với đáy AD và diện tích bằng 3 lần diện tích tam giác ABC thì $3x_0 - 4y_0 + z_0 = -29$.

d) Cho điểm $E(1; 1; 1)$ và điểm $M(a; b; c)$ thỏa mãn biểu thức $MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2ME^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $2a + b + c = \frac{8}{5}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) Chọn Sai

Vì M nằm trên trục hoành nên gọi điểm $M(x; 0; 0)$.

$$\begin{aligned} M \text{ cách đều các điểm } A, B \text{ nên ta có } MA = MB &\Leftrightarrow \sqrt{(-2-x)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{(2-x)^2 + 1^2 + 0^2} \\ &\Leftrightarrow 4 + 4x + x^2 + 10 = 4 - 4x + x^2 + 1 \Leftrightarrow 8x = -9 \Rightarrow x = \frac{-9}{8} \Rightarrow M\left(\frac{-9}{8}; 0; 0\right) \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó: } MC = \sqrt{\left(\frac{-9}{8} + 3\right)^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{353}}{8}.$$

b) Chọn Đúng

$$\text{Ta có: } \vec{BA} = (-4; 2; 1), \vec{BC} = (-5; -2; 1)$$

$$\cos ABC = \cos(\vec{BA}; \vec{BC}) = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{17}{3\sqrt{70}} > 0$$

Suy ra góc ABC là góc nhọn.

c) Chọn Đúng

Kẻ $AH \perp BC$



Ta có: $S_{ABCD} = 3S_{\triangle ABC} \Leftrightarrow \frac{(AD+BC).AH}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC \Leftrightarrow AD+BC = 3BC \Leftrightarrow AD = 2BC$

Vì 2 vectơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ cùng hướng nên ta có

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (x_0 + 2; y_0 - 3; z_0 - 1) = 2(-5; -2; 1) \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -12 \\ y_0 = -1 \\ z_0 = 3 \end{cases}$$

Khi đó: $3x_0 - 4y_0 + z_0 = -29$.

d) Chọn Sai

Ta có $G\left(-1; 1; \frac{2}{3}\right)$ là trọng tâm của tam giác ABC .

Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{IE} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{IG} + 2\overrightarrow{IE} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{IE}$

$$\Leftrightarrow \left(-1-x; 1-y; \frac{2}{3}-z\right) = -\frac{2}{3}(1-x; 1-y; 1-z) \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5} \\ y = 1 \\ z = \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{1}{5}; 1; \frac{4}{5}\right)$$

Ta có: $MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2ME^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IE})^2$
 $= 5MI^2 + (IA^2 + IB^2 + IC^2 + 2IE^2) + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{IE}) = 5MI^2 + (IA^2 + IB^2 + IC^2 + 2IE^2)$

Suy ra: $MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2ME^2$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất, hay $M \equiv I \Rightarrow M\left(-\frac{1}{5}; 1; \frac{4}{5}\right)$

Khi đó: $2a + b + c = \frac{7}{5}$.

Câu 34: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ biết $A(2; 3; 2)$, $B(6; -1; -2)$, $C(-1; -4; 3)$, $D(1; 6; -5)$.

a) $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -1)$.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -4$.

c) Tổng chu vi các mặt của tứ diện gần bằng 106,95.

d) Tọa độ điểm M trên CD sao cho tam giác AMB có chu vi nhỏ nhất là $M(0; 1; -1)$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

$\overrightarrow{AB} = (4; -4; -4)$ $\overrightarrow{AC} = (-3; -7; 1)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \cdot (-3) - 4 \cdot (-7) - 4 \cdot 1 = -12 + 28 - 4 = 12$

Có $AB = 4\sqrt{3}$, $BC = BD = \sqrt{83}$, $AC = AD = \sqrt{59}$, $CD = 2\sqrt{42}$ nên tổng chu vi gần bằng 106,95

Gọi tọa độ điểm $M(x; y; z)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; -4; -4)$, $\overrightarrow{CD} = (2; 10; -8)$, $\overrightarrow{CM} = (x+1; y+4; z-3)$

Do AB có độ dài không đổi, nên chu vi của tam giác AMB nhỏ nhất khi và chỉ khi $AM + MB$ đạt nhỏ nhất.



$$\text{Vì } M \text{ trên } CD \Rightarrow \overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CD} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = -4 + 10k \\ z = 3 - 8k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow M(-1 + 2k; -4 + 10k; 3 - 8k) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-3 + 2k; -7 + 10k; 1 - 8k)$$

$$\overrightarrow{BM} = (2k - 7; -3 + 10k; 5 - 8k)$$

$$\text{suy ra } AM + BM = \sqrt{168k^2 - 168k + 59} + \sqrt{168k^2 - 168k + 83}$$

$$= \sqrt{168\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + 17} + \sqrt{168\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + 41} \geq \sqrt{17} + \sqrt{41}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $k = \frac{1}{2}$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} x = -1 + 2k = 0 \\ y = -4 + 10k = 1 \\ z = 3 - 8k = -1 \end{cases} \Rightarrow M(0; 1; -1)$$

Câu 35: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$, $B(3; 0; 8)$, $D(-5; -4; 0)$.

a) Tâm I hình vuông $ABCD$ có tọa độ là $I(-1; -2; -4)$.

b) Biết $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = (a; b; c)$. Suy ra $a + b - c$ bằng -4 .

c) Diện tích của hình vuông $ABCD$ bằng 144 (đơn vị diện tích).

d) Biết đỉnh $A(m; n; 0)$ với $m; n \in \mathbb{Z}$. Khi đó $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$ bằng $6\sqrt{10}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) Sai

Ta có tâm I hình vuông $ABCD$ là trung điểm của đoạn BD nên có tọa độ là $I(-1; -2; 4)$.

b) Đúng

Theo quy tắc hình bình hành suy ra $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} = (-8; -4; -8) \Rightarrow a = -8; b = -4; c = -8$.

Do đó $a + b - c = (-8) + (-4) - (-8) = -4$.

c) Sai

Ta có $BD = 12$ và $ABCD$ là hình vuông nên $S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{1}{2} BD^2 = \frac{1}{2} \cdot 12^2 = 72$.

d) Đúng

Ta có trung điểm BD là $I(-1; -2; 4)$, $BD = 12$ và điểm $A(m; n; 0)$.

$$\text{Do } ABCD \text{ là hình vuông} \Rightarrow \begin{cases} AB^2 = AD^2 \\ AI^2 = \left(\frac{1}{2}BD\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)^2 + n^2 + 8^2 = (m+5)^2 + (n+4)^2 \\ (m+1)^2 + (n+2)^2 + 4^2 = 36 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 4 - 2m \\ (m+1)^2 + (6-2m)^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m = \frac{17}{5} \\ n = \frac{-14}{5} \end{cases} \Rightarrow A(1; 2; 0) \text{ hoặc } A\left(\frac{17}{5}; \frac{-14}{5}; 0\right) (\text{loại}). \text{ Với}$$



$$A(1; 2; 0) \Rightarrow C(-3; -6; 8).$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{CA} = (4; 8; -8), \overrightarrow{CB} = (6; 6; 0) \Rightarrow \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = (10; 14; -8)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = \sqrt{10^2 + 14^2 + (-8)^2} = 6\sqrt{10}.$$

Câu 36: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC , biết $A(5; 3; -1), B(2; 3; -4), C(3; 1; -2)$

a) Trung điểm của đoạn AB là $I\left(\frac{7}{2}; 3; \frac{-5}{2}\right)$.

b) Tam giác ABC vuông cân tại C .

c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

d) Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng $9 + 2\sqrt{6}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Đúng:

$$\text{Trung điểm của đoạn } AB \text{ là } I\left(\frac{7}{2}; 3; \frac{-5}{2}\right).$$

b) Đúng:

Ta có

$$\overrightarrow{AB} = (-3; 0; -3) \Rightarrow AB = 3\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2; -2; -1) \Rightarrow AC = 3$$

$$\overrightarrow{BC} = (1; -2; 2) \Rightarrow BC = 3$$

Suy ra $AC = BC = 3$ và $AC^2 + BC^2 = AB^2$ nên tam giác ABC vuông cân tại C .

c) Đúng:

Vì tam giác ABC vuông cân tại C nên bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

d) Sai:

Do tam giác ABC vuông cân tại C nên suy ra bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\frac{1}{2}CA \cdot CB}{\frac{1}{2}(AB + BC + CA)} = \frac{3 \cdot 3}{3\sqrt{2} + 3 + 3} = \frac{6 - 3\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 37: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 3; 1), B(-1; 2; 0), C(1; 1; -2)$.

a) $\overrightarrow{AB} = (3; -1; -1)$.

b) Tọa độ trọng tâm G là $G\left(\frac{2}{3}; 2; -\frac{1}{3}\right)$.

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8$.

d) Gọi $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Giá trị biểu thức $P = 15a + 30b + 75c$ bằng 50.

Lời giải



a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

a) Sai:

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; -1; -1)$.

b) Đúng:

Toạ độ trọng tâm G là $G\left(\frac{2}{3}; 2; -\frac{1}{3}\right)$.

c) Đúng:

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; -1; -1)$ và $\overrightarrow{AC} = (-1; -2; -3)$ nên

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-3) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot (-3) = 3 + 2 + 3 = 8.$$

d) Đúng:

Ta có $I(x; y; z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Leftrightarrow AI = BI = CI, I \in (ABC)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ CI^2 = BI^2 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AI} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{14}{15} \\ y = \frac{61}{30} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{14}{15}; \frac{61}{30}; -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow P = 50.$$

Câu 38: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(4; 0; 2)$, $B(1; -4; -2)$ và $C(2; 1; 1)$.

a) Tọa độ trọng tâm tam giác ABC là $G\left(\frac{7}{3}; -1; \frac{1}{3}\right)$.

b) Điểm D thỏa mãn $ABDC$ là hình bình hành, khi đó tọa độ điểm D là $D(5; 5; 5)$.

c) Tam giác ABC là tam giác tù.

d) Gọi điểm $E(a; b; c)$ là giao điểm của đường thẳng BC với mặt phẳng tọa độ (Oxz) , khi đó $\frac{2a}{c} + b = \frac{9}{2}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

a) Tọa độ trọng tâm là $G\left(\frac{4+1+2}{3}; \frac{0+(-4)+1}{3}; \frac{2+(-2)+1}{3}\right) = G\left(\frac{7}{3}; -1; \frac{1}{3}\right)$.

b) Tứ giác $ABDC$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 2 = -3 \\ y_D - 1 = -4 \\ z_D - 1 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -1 \\ y_D = -3 \\ z_D = -3 \end{cases}$

Vậy $D(-1; -3; -3)$

c) Ta có $\overrightarrow{BC} = (1; 5; 3)$; $\overrightarrow{AC} = (-2; 1; -1)$.

Do đó $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 + 5 - 3 = 0$ nên tam giác ABC vuông tại C .

d) Vì E thuộc mặt phẳng Oxz nên $E(a; 0; c)$.

Ta có $\overrightarrow{BE} = (a-1; 4; c+2)$, $\overrightarrow{BC} = (1; 5; 3)$.

E là giao điểm của đường thẳng BC với mặt phẳng (Oxz)



Suy ra B, C, E thẳng hàng nên hai vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}$ cùng phương, do đó:

$$\overrightarrow{BE} = k\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} a-1=k \\ 4=5k \\ c+2=3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{9}{5} \\ k=\frac{4}{5} \\ c=\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } E\left(\frac{9}{5}; 0; \frac{2}{5}\right) \Rightarrow \frac{2a}{c} + b = 9$$

Câu 39: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ΔABC với $A(1; -3; 3), B(2; -4; 5), C(3; -2; 1)$

a) $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; -2)$.

b) Điểm $G(a; b; c)$ là trọng tâm của tam giác ΔABC thì $a+b+c=2$.

c) Điểm $I(x; y; z)$ thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, khi đó $2x+y+z=4$.

d) Gọi $M(x; y; z)$ là điểm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz) sao cho biểu thức $P = -2MA^2 - MB^2 - 3MC^2$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó $x+y-z < -5$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 2)$. Vậy a) **Sai**.

b) Điểm $G(2; -3; 3) \Rightarrow a+b+c=2$. Vậy b) **Đúng**.

c) Điểm $I(x; y; z)$ thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{IA}(1-x; -3-y; 3-z); \overrightarrow{IB}(2-x; -4-y; 5-z); \overrightarrow{IC}(3-x; -2-y; 1-z)$$

$$2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 13-6x=0 \\ -16-6y=0 \\ 14-6z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{13}{6} \\ y=-\frac{8}{3} \\ z=\frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow 2x+y+z=4. \text{ Vậy c) } \mathbf{Đúng}.$$

d) Gọi Điểm I thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, theo (c) ta có $I\left(\frac{13}{6}; -\frac{8}{3}; \frac{7}{3}\right)$

$$\begin{aligned} 2MA^2 + MB^2 + 3MC^2 &= 2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + 3\overrightarrow{MC}^2 \\ &= 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 6MI^2 + 2IA^2 + IB^2 + 3IC^2 \Rightarrow P = -6MI^2 - 2IA^2 - IB^2 - 3IC^2 \end{aligned}$$

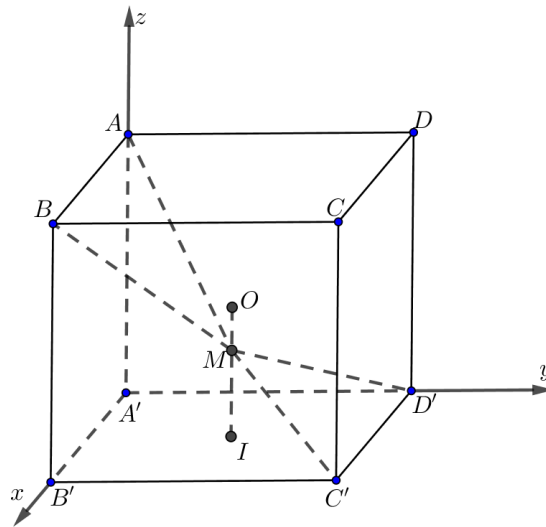
Do tổng $2IA^2 + IB^2 + 3IC^2$ không đổi nên P đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MI^2 nhỏ nhất hay IM nhỏ nhất.

Mà M nằm trên mặt phẳng (Oyz) nên IM nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của

I lên mặt phẳng (Oyz) . Suy ra: $M\left(0; -\frac{8}{3}; \frac{7}{3}\right) \Rightarrow x+y-z = -5$. Vậy d) **Sai**.



Câu 40: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1, có tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = \frac{1}{2}MI$. Gắn hệ trục $A'xyz$ như hình vẽ.



a) Tọa độ các điểm $A'(0;0;0)$, $B'(1;0;0)$, $D'(0;1;0)$ và $A(0;0;1)$

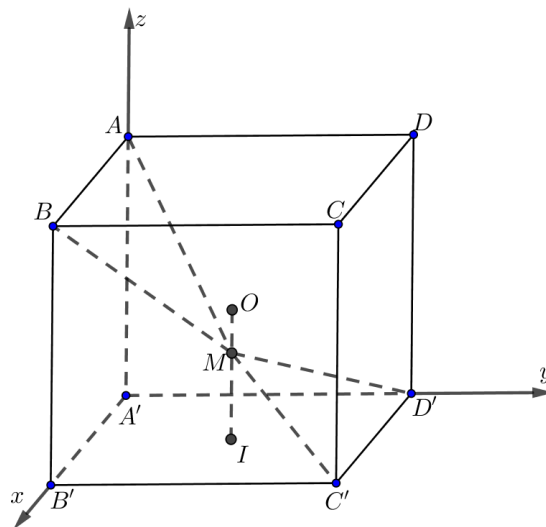
b) Tọa độ điểm $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

c) Trong không gian có đúng 2 điểm N sao cho N không trùng với các điểm A, B', D' và $\angle ANB' = \angle B'ND' = \angle D'NA = 90^\circ$?

d) Trong không gian giả sử điểm P, Q sao cho $\overrightarrow{A'P} = \overrightarrow{A'B'} + 2\overrightarrow{A'D'} - 2\overrightarrow{A'A}$; $\overrightarrow{A'Q} = \frac{8}{3}\overrightarrow{A'B'} + \frac{4}{3}\overrightarrow{A'D'} + \frac{8}{3}\overrightarrow{A'A}$ và $J(a;b;c)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'PQ$, khi đó $a - b + c = 0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------



a) ĐÚNG

Chọn hệ trục tọa độ sao cho $A'(0;0;0)$, $B'(1;0;0)$, $D'(0;1;0)$ và $A(0;0;1)$.



b) SAI vì $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$.

c) ĐÚNG

Gọi $N(x_0; y_0; z_0)$

$$\overrightarrow{AN} = (x_0; y_0; z_0 - 1); \overrightarrow{B'N} = (x_0 - 1; y_0; z_0); \overrightarrow{D'N} = (x_0; y_0 - 1; z_0)$$

$$\text{Do } \angle ANB' = \angle B'ND' = \angle D'NA = 90^\circ \text{ nên } \begin{cases} \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{B'N} = 0 \\ \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{D'N} = 0 \\ \overrightarrow{D'N} \cdot \overrightarrow{B'N} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0(x_0 - 1) + y_0^2 + (z_0 - 1)z_0 = 0 \\ x_0^2 + y_0(y_0 - 1) + (z_0 - 1)z_0 = 0 \\ x_0(x_0 - 1) + (y_0 - 1)y_0 + z_0^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ ta được } x_0 = y_0 = z_0 = 0; \quad x_0 = y_0 = z_0 = \frac{2}{3}$$

Khi đó có hai điểm N thỏa mãn điều kiện trên.

d) ĐÚNG

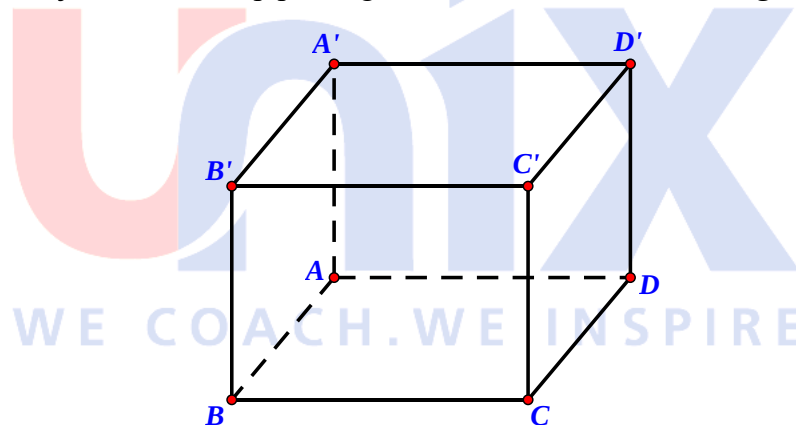
Ta có $\overrightarrow{A'P} = (1; 2; -2)$, $\overrightarrow{A'Q} = \left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$, do đó $A'P = 3$, $A'Q = 4$, $PQ = 5$. Với $J(a; b; c)$ là tâm đường tròn

nội tiếp tam giác $A'PQ$ ta lại có

$$PQ \cdot \overrightarrow{JA'} + A'P \cdot \overrightarrow{JQ} + A'Q \cdot \overrightarrow{JP} = \vec{0} \text{ ta giải tìm được tọa độ } J(1; 1; 0).$$

$$\text{Vậy } a - b + c = 0.$$

Câu 41: Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1.



a) $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

b) Nếu $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $A'(0; 0; 1)$ thì $C'(1; 2; 3)$.

c) Nếu $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $A'(0; 0; 1)$ và điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MB'} - 3\overrightarrow{MC} + 5\overrightarrow{MD'} = \vec{0}$ thì $M(-1; 4; 7)$.

d) Gọi E , F lần lượt thuộc các đường thẳng AA' và CD' sao cho đường thẳng EF vuông góc với mặt phẳng $(A'BC')$. Khi đó $EF = \sqrt{3}$.

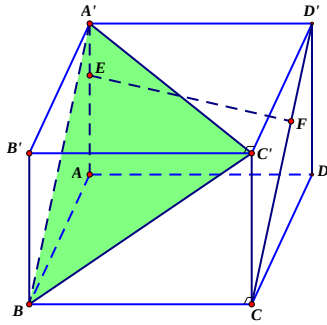
Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

c) $B'(1; 0; 1)$, $C(1; 1; 0)$, $D'(0; 1; 1)$. $M\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{7}{4}\right)$.

Suy ra c) sai

d) Giả sử $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $A'(0; 0; 1) \Rightarrow C(1; 1; 0)$, $D'(0; 1; 1)$, $C'(1; 1; 1)$.



Đặt $\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{CF} = y\overrightarrow{CD'}$ $\Rightarrow E(0;0;x), F(-y+1;1;y)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{EF} = (-y+1;1;y-x), \overrightarrow{BA'} = (-1;0;1), \overrightarrow{BC'} = (0;1;1)$.

Vì $EF \perp (A'BC') \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BA'} = 0 \\ \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BC'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-1+(y-x)=0 \\ 1+y-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{EF} = (1;1;1) \Rightarrow EF = \sqrt{3}$.

Suy ra d) **đúng**.

Câu 42: Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0), B(3;0;0), D(0;3;0), A'(0;0;3)$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh BD, AD' sao cho $AN = DM$, P là trung điểm $B'C'$, K là điểm thuộc mặt phẳng (Oxz) .

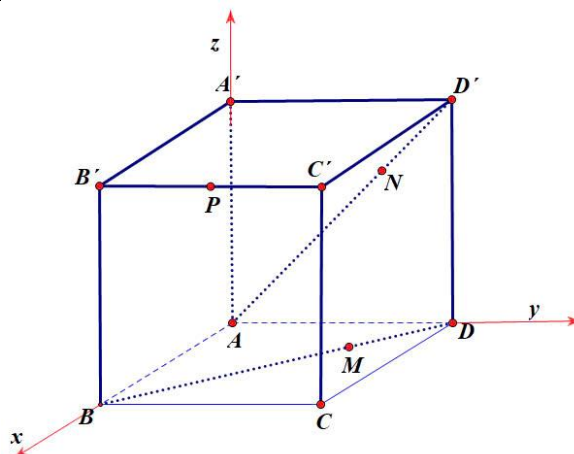
a) Trọng tâm của tam giác PCD có tọa độ là $\left(2; \frac{5}{2}; 1\right)$.

b) Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|\overrightarrow{KP} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD}|$ là $\frac{5}{2}$.

c) Góc giữa hai đường thẳng AP và BC' bằng 60° .

d) Độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất bằng $\sqrt{2}$.

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------



a) Ta có: $C(3;3;0), D'(0;3;3), C'(3;3;3), B'(3;0;3)$

P là trung điểm $B'C'$ nên tọa độ là $P\left(3; \frac{3}{2}; 3\right)$

Trọng tâm của tam giác PCD là $G\left(2; \frac{5}{2}; 1\right)$



Vậy a) **ĐÚNG**

b) Ta có $|\overrightarrow{KP} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD}| = |3\overrightarrow{KG}| = 3KG$

$|\overrightarrow{KP} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD}| \text{ min} \Leftrightarrow KG \text{ min.}$

Do K là điểm thuộc mặt phẳng (Oxz) nên $KG \text{ min} \Leftrightarrow KG = d(G, Oxz) = \frac{5}{2}$

Vậy b) **ĐÚNG**

c) Có $\overrightarrow{AP} = \left(3; \frac{3}{2}; 3\right)$ là vec tơ chỉ phương của đường thẳng AP .

$\overrightarrow{BC'} = (0; 3; 3)$ là vec tơ chỉ phương của đường thẳng BC' .

Góc giữa hai đường thẳng AP và BC' là góc α với

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC'}|}{|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{BC'}|} = \frac{\left|3 \cdot 0 + \frac{3}{2} \cdot 3 + 3 \cdot 3\right|}{\sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{3^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Suy ra } \alpha = 45^\circ$$

Vậy c) **SAI**

d) M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh BD, AD' nên

$$\overrightarrow{AN} = t_1 \overrightarrow{AD'}, t_1 \in [0; 1] \Rightarrow N(0; 3t_1; 3t_1)$$

$$\overrightarrow{BM} = t_2 \overrightarrow{AD'}, t_2 \in [0; 1] \Rightarrow M(3 - 3t_2; 3t_2; 0)$$

Mặt khác:

$$AN = DM \Leftrightarrow AN^2 = DM^2 \Leftrightarrow 18t_1^2 = (3t_2 - 3)^2 + (3 - 3t_2)^2$$

$$\Leftrightarrow 18t_1^2 = 18(t_2 - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = t_2 - 1 \\ t_1 = 1 - t_2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } MN^2 = (3 - 3t_2)^2 + (3t_2 - 3t_1)^2 + 9t_1^2$$

$$\text{Với } t_1 = t_2 - 1 \Rightarrow MN^2 = (3 - 3t_2)^2 + (3t_2 - 3t_2 + 3)^2 + 9(t_2 - 1)^2 = 18t_2^2 - 36t_2 + 9$$

$$t_2 \in [0; 1] \text{ nên } MN^2 \text{ min bằng } -9 \Rightarrow \text{loại}$$

$$\text{Với } t_1 = 1 - t_2 \Rightarrow MN^2 = (3 - 3t_2)^2 + (3t_2 - 3 + 3t_2)^2 + 9(1 - t_2)^2 = 54t_2^2 - 72t_2 + 27$$

$$t_2 \in [0; 1] \text{ nên } 54t_2^2 - 72t_2 + 27 \text{ min bằng } 4 \text{ khi } t_2 = \frac{2}{3} \in [0; 1]. \text{ Suy ra } MN \text{ min bằng } 2.$$

Vậy d) **SAI**

Câu 43: Trong không với hệ toạ độ $Oxyz$ cho tam giác ABC có các đỉnh $A(1; -2; 0), B(2; 1; -2), C(0; 3; 4)$.

a) Toạ độ của vec-tơ $\overrightarrow{AB}$ là $(1; 3; -2)$.

b) Toạ độ hình chiếu của điểm B trên mặt phẳng Oxy là $H(0; 0; -2)$

c) Gọi điểm $E(a; b; c)$ là hình chiếu của C lên AB , khi đó $7a + 3b + c = 8$.

d) Toạ độ điểm M thuộc mặt phẳng xOz sao cho $T = MC + MB$ nhỏ nhất là $M\left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right)$

Lời giải



a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là $(1; 3; -2)$.

Chọn a) ĐÚNG

b) Tọa độ hình chiếu của điểm B trên mặt phẳng Oxy là $H(2; 1; 0)$.

Chọn b) SAI

c) Gọi điểm $E(a; b; c)$ là hình chiếu của C lên AB ,

Ta có $\overrightarrow{CE} = (a; b-3; c-4)$, $\overrightarrow{AE} = (a-1; b+2; c)$, $\overrightarrow{AB} = (1; 3; -2)$.

Vì $CE \perp AB$ và vector $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}$ cùng phương nên
$$\begin{cases} a+3(b-3)-2(c-4)=0 \\ \frac{a-1}{1} = \frac{b+2}{3} = \frac{c}{-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+3b-2c=1 \\ 3a-b=5 \\ -2a-c=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{10}{7} \\ b=\frac{-5}{7} \\ c=-\frac{6}{7} \end{cases} \Rightarrow 7a+3b+c=7.$$

Chọn c) SAI

d) Điểm M thuộc mặt phẳng xOz suy ra $M(a; 0; c)$.

Hai điểm B, C cùng phía với mặt phẳng xOz , ta gọi B' là điểm đối xứng của B qua mặt phẳng xOz , khi đó $B'(2; -1; -2)$, suy ra $MB = MB'$

Ta có $MB + MC = MB' + MC \geq B'C$.

Dấu bằng xảy ra khi B', M, C thẳng hàng.

$\overrightarrow{CM} = (a; -3; c-4)$; $\overrightarrow{CB'} = (2; -4; -6)$.

$$A, M, B' \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \frac{a}{2} = \frac{-3}{-4} = \frac{c-4}{-6} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ c = -4 \end{cases} \Rightarrow M\left(3; 0; -\frac{1}{2}\right).$$

Chọn d) Đúng.

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 0; -2)$, $B(-2; 3; 4)$ và $C(4; -6; 1)$.

a) $\overrightarrow{AB} = (3; -3; 6)$.

b) Hình chiếu vuông góc của B lên trục Ox là $B'(-2; 3; 0)$.

c) Tồn tại 1 điểm M thuộc trục hoành sao cho tam giác MBC vuông tại M .

d) Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm D là $(1; -3; 7)$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
--------	--------	---------	--------

a) Sai.

$\overrightarrow{AB} = (-2-1; 3-0; 4+2) = (-3; 3; 6)$.

b) Sai.

Hình chiếu vuông góc của B lên trục Ox là $B'(-2; 0; 0)$.



c) Đúng.

M thuộc trục hoành $\Rightarrow M(x_M; 0; 0)$.

Tam giác MBC vuông tại M

Suy ra $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$.

$$\Rightarrow (-2 - x_M) \cdot (4 - x_M) + 3 \cdot (-6) + 4 \cdot 1 = 0.$$

$$\Rightarrow x_M^2 - 2x_M - 22 = 0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{23} \\ x = 1 - \sqrt{23} \end{cases}.$$

Suy ra tồn tại 2 điểm M thuộc trục hoành sao cho tam giác MBC vuông tại M .

d) Sai.

$ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 = 4 - x_D \\ 3 = -6 - y_D \\ 6 = 1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = 7 \\ y_D = -9 \\ z_D = -5 \end{cases}.$$

Vậy $D(7; -9; -5)$.

Câu 45: Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(5; 3; 4), B(1; 2; 1), C(8; -3; 2)$. Gọi $D(a; b; c)$ là chân đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC .

a) Trọng tâm của tam giác ABC có tọa độ $G\left(\frac{14}{3}; \frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

b) $BC = 5\sqrt{2}$.

c) Tam giác ABC là tam giác vuông.

d) Giá trị $a + 2b + 3c$ là một số nguyên.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Áp dụng công thức tọa độ trọng tâm tam giác, ta có

$$G\left(\frac{5+1+8}{3}; \frac{3+2+(-3)}{3}; \frac{4+1+2}{3}\right) \Rightarrow G\left(\frac{14}{3}; \frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right). \text{ Suy ra đúng.}$$

b) Ta có $BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(8-1)^2 + (-3-2)^2 + (2-1)^2} = 5\sqrt{3}$. Suy ra sai.

c) Ta có $\overrightarrow{AB}(-4; -1; -3), \overrightarrow{AC}(3; -6; -2), \overrightarrow{BC}(7; -5; 1)$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-4) \cdot 3 + (-1) \cdot (-6) + (-3) \cdot (-2) = 0$ nên tam giác ABC vuông tại A . Suy ra đúng.

d) Ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{26}}{7} \Rightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{\sqrt{26}}{7} \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (1-a; 2-b; 1-c) = -\frac{\sqrt{26}}{7}(8-a; -3-b; 2-c)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \approx 3,95 \\ b \approx -1,07 \\ c \approx 1,42 \end{cases}$$
 nên $a + 2b + 3c$ không nguyên. Suy ra sai.