



CHƯƠNG



VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Trong không gian Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = (3; 2; 5)$ và $\vec{b} = (3m + 2; 3; 6 - n)$. Tính giá trị biểu thức $6m + 2n$ để hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng nhau.

Lời giải

Trả lời: 2

$$\text{Ta có } \vec{a}, \vec{b} \Leftrightarrow \frac{3m+2}{3} = \frac{3}{2} = \frac{6-n}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{5}{6} \\ n = \frac{-3}{2} \end{cases} \Rightarrow 6m + 2n = 2.$$

Câu 2: Trong không gian Oxy , cho hai điểm $A(1; 2; 3)$ và $B(2; 1; 1)$. Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng. Tính giá trị biểu thức $x_0 + y_0 + z_0$.

Lời giải

Trả lời: 8

Điểm $M \in (Oyz) \Rightarrow M(0; y; z)$

Ta có: $\overrightarrow{AM} = (-1; y - 2; z - 3), \overrightarrow{AB} = (1; -1; -2)$

Để A, B, M thẳng hàng thì $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ z = 5 \end{cases} \Rightarrow M(0; 3; 5)$

Suy ra $x_0 + y_0 + z_0 = 8$.

Câu 3: Trong không gian Oxy , cho ba điểm $A(1; -1; 1), B(3; 1; 2)$ và $C(-1; 0; 3)$. Có bao nhiêu điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có 2 cạnh đáy AB, CD và có góc tại D bằng 45° .

Lời giải

Trả lời: 2

Gọi $D(x; y; z)$

$\overrightarrow{AB} = (2; 2; 1), \overrightarrow{DC} = (-1 - x; -y; 3 - z)$

Tứ giác $ABCD$ là hình thang có 2 cạnh đáy AB, CD nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng phương.

$$\Rightarrow \frac{-1-x}{2} = \frac{-y}{2} = \frac{3-z}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z - 7 \\ y = 2z - 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} = (x-1; y+1; z-1) \\ \overrightarrow{CD} = (x+1; y; z-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AD} = (2z-8; 2z-5; z-1) \\ \overrightarrow{CD} = (2z-6; 2z-6; z-3) \end{cases}$$



$$\cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD}) = \frac{9(z-3)^2}{\sqrt{9(z^2-6z+10)} \cdot \sqrt{9(z-3)^2}} = \frac{z-3}{\sqrt{z^2-6z+10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\Rightarrow 2(z^2 - 6z + 9) = z^2 - 6z + 10 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1; y = 2 \\ x = -3; y = -2 \end{cases}.$$

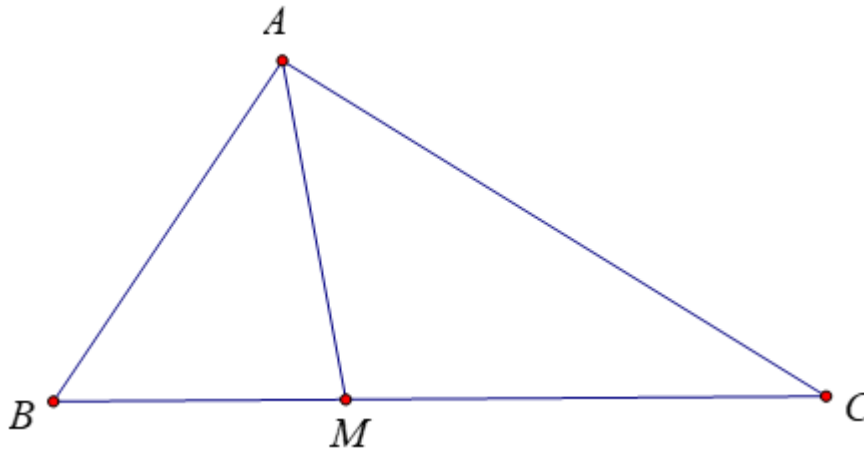
Vậy $D(1; 2; 4)$ hoặc $D(-3; -2; 2)$.

Có 2 điểm D thỏa điều kiện.

Câu 4: Trong không gian Oxy, cho tam giác ABC, biết $A(2; 0; 0), B(0; 3; 1), C(-3; 6; 4)$. Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MC = 2MB$. Tính độ dài AM.

Lời giải

Trả lời: 5,39



Gọi $M(x; y; z)$

$$\overrightarrow{CM} = (-3-x; 6-y; 4-z)$$

$$\overrightarrow{MB} = (x; y-3; z-1)$$

$$\text{Theo đề ta có, } \overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} -3-x = 2x \\ 6-y = 2(y-3) \\ 4-z = 2(z-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow M(-1; 4; 2)$$

$$AM = \sqrt{(-1-2)^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{29} \approx 5,39$$

Câu 5: Trong không gian Oxy, cho ba điểm $A(1; 2; -1), B(2; -1; 3), C(-2; 3; 3)$. Điểm $M(a; b; c)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABCM. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2 - c^2$.

Lời giải

Trả lời: 44

$$\overrightarrow{MC} = (-2-a; 3-b; 3-c)$$

$$\overrightarrow{AB} = (1; -3; 4)$$

Tứ giác ABCM là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2-a = 1 \\ 3-b = -3 \\ 3-c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 6 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow P = 44.$$

Câu 6: Trong không gian Oxy, cho hai điểm trên trục hoành mà khoảng cách từ đó đến điểm $M(-3; 4; 8)$ bằng 12. Tính tổng hai hoành độ của chúng.

Lời giải



Trả lời: -6

$$N(x; 0; 0)$$

$$MN = 12 \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2 + 4^2 + 8^2} = 144 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 64 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -11 \end{cases}$$

Tổng hoành độ của chúng bằng -6

Câu 7: Trong không gian Oxy, cho hai vector $\vec{a} = (2; 5; -3), \vec{b} = (0; -4; 0)$. Tính tích vô hướng của hai vector $\vec{a}, \vec{b}$.

Lời giải

Trả lời: -20

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 0 + 5 \cdot (-4) + (-3) \cdot 0 = -20$$

Câu 8: Trong không gian Oxy, cho ba vector $\vec{a} = (1; m; 2), \vec{b} = (m+1; 2; 1), \vec{c} = (0; m-2; 2)$. Tổng các giá trị thực của tham số m để $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{c}|$.

Lời giải

Trả lời: -12

$$\vec{a} + \vec{b} = (m+2; m+2; 3)$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{c}| \Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$$

$$\Leftrightarrow (m+2)^2 + (m+2)^2 + 9 = (m-2)^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 12m + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -6 \pm \sqrt{3}.$$

Tổng các giá trị của m bằng -12.

Câu 9: Trong không gian Oxy, cho hai vector $\vec{a} = (1; -1; 0), \vec{b} = (2; 2t-1; 0)$. Xác định giá trị t để hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương.

Lời giải

Trả lời: -0,5

$$\text{Hai vector } \vec{a}, \vec{b} \text{ cùng phương thì } \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2k \\ -1 = (2t-1)k \\ 0 = 0k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2k \\ -1 = (2t-1)k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ -1 = (2t-1)k \end{cases}$$

$$\text{Với } t = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ -1 = 0 \end{cases} \text{ (vô nghiệm.)}$$

$$\text{Với } t \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ k = \frac{-1}{2t-1} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1}{2t-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $t = -0,5$.

Câu 10: Trong không gian Oxy, cho hai vector $\vec{a} = (1; 2; -2), \vec{b} = (-1; -1; 0)$. Số đo độ của góc giữa hai vector $\vec{a}, \vec{b}$?

Lời giải

Trả lời: 135

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$



$$\Rightarrow (\vec{a}; \vec{b}) = 135^\circ$$

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1; 2; 1), B(2; -1; 3), C(3; 5; -1)$. Điểm $M(a; b; c)$ trên mặt phẳng (Oyz) sao cho $|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{CM}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó ta có $2b + c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 4

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .

$$\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{CM} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MB} = 3\vec{MG} + \vec{MB}$$

$$\text{Nên } |\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{CM}| = |3\vec{MG} + \vec{MB}| = |3\vec{MN} + \vec{MN} + 3\vec{NG} + \vec{NB}|$$

$$\text{Gọi } N \text{ là điểm thỏa } 3\vec{NG} + \vec{NB} = \vec{0} \text{ nên } |3\vec{MG} + \vec{MB}| = |4\vec{MN}|.$$

Để $|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{CM}|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|4\vec{MN}|$ đạt giá trị nhỏ nhất hay M là hình chiếu của N lên mặt phẳng (Oyz) .

$$\text{Tọa độ trọng tâm của tam giác } ABC \text{ là: } G\left(\frac{4}{3}; 2; 1\right).$$

$$3\vec{NG} + \vec{NB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x_G - x_N) + (x_B - x_N) = 0 \\ 3(y_G - y_N) + (y_B - y_N) = 0 \\ 3(z_G - z_N) + (z_B - z_N) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = \frac{1}{4}(3x_G + x_B) \\ y_N = \frac{1}{4}(3y_G + y_B) \\ z_N = \frac{1}{4}(3z_G + z_B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = \frac{1}{4}\left(3 \cdot \frac{4}{3} + 2\right) \\ y_N = \frac{1}{4}(3 \cdot 2 - 1) \\ z_N = \frac{1}{4}(3 \cdot 1 + 3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_N = \frac{3}{2} \\ y_N = \frac{5}{4} \\ z_N = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ nên } N\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right). \text{ Vậy tọa độ điểm } M\left(0; \frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right) \text{ hay } 2b + c = 4.$$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 2; 0); B(3; -1; 2); C(1; 2; 2)$ và điểm $M \in (Oxy)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = MA^2 + 2MB^2 - MC^2$.

Lời giải

Trả lời: 4

$$+) \text{ Gọi } I(x_I; y_I; z_I) \text{ là điểm thỏa mãn } \vec{IA} + 2\vec{IB} - \vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow I(3; -1; 1).$$

$$+) \text{ Ta có } T = MA^2 + 2MB^2 - MC^2$$

$$= (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + 2(\vec{MI} + \vec{IB})^2 - (\vec{MI} + \vec{IC})^2 = 2MI^2 + (IA^2 + 2IB^2 - IC^2).$$

$$+) \vec{IA} = (-2; 3; -1); \vec{IB} = (0; 0; 1); \vec{IC} = (-2; 3; 1). \text{ Suy ra } IA^2 + 2IB^2 - IC^2 = 14 + 2 - 14 = 2$$

$$+) \text{ Gọi } H \text{ là hình chiếu của } I \text{ trên } (Oxy). \text{ Ta có } MI \geq IH = 1, \forall M \in (Oxy).$$

$$\text{Vậy min } T = 4, \text{ khi } MI = 1 \text{ và } M \in (Oxy).$$



Câu 13: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, hình bình hành $ABCD$ có $A(-1; 3; 5)$, $B(2; -3; 7)$, $D(-4; 1; -2)$. Hiệu giữa hoành độ với cao độ của điểm C bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: -1

Gọi $C(x; y; z)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -6; 2)$, $\overrightarrow{DC} = (x+4; y-1; z+2)$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ suy ra $\begin{cases} x+4=3 \\ y-1=-6 \\ z+2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-5 \\ z=0 \end{cases}$.

Vậy hiệu giữa hoành độ với cao độ của điểm C bằng -1 .

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; -1; 2)$, $B(-1; 1; 1)$, $C(-3; -3; 4)$, $D\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$. Điểm M thay

đổi trên mặt phẳng (Oxy) . Khi biểu thức $T = -3\left(\frac{MA}{MD}\right)^2 - 2\left(\frac{MB}{MD}\right)^2 + \left(\frac{MC}{MD}\right)^2$ đạt giá trị lớn nhất thì hoành độ của điểm M bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 1

Giả sử $M(x; y; 0)$.

Ta có $MA^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2 + 4$, $MB^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2 + 1$, $MC^2 = (x+3)^2 + (y+3)^2 + 16$,

$MD^2 = (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$.

$$T = \frac{-3MA^2 - 2MB^2 + MC^2}{MD^2} = \frac{-4x^2 + 8x - 4y^2 + 4y + 10}{(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 1}$$

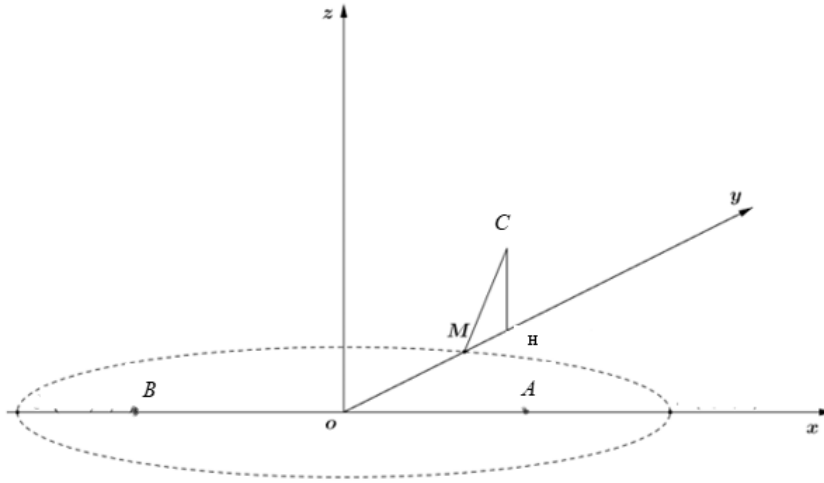
$$= -4 \cdot \frac{(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{19}{4}}{(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 1} = -4 \cdot 1 + \frac{19}{(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 1} \leq -4 + 19 = 15.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(4; 0; 0)$, $B(-4; 0; 0)$ và $C(0; 6; 1)$. Gọi M là một điểm nằm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA + MB = 10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của MC ?

Lời giải

Trả lời: 3,16



M là điểm trong mặt phẳng (Oxy) thỏa $MA + MB = 10$ và $AB = 8$. Suy ra M thuộc Elip có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Gọi H là hình chiếu của $C(0;6;1)$ lên mặt phẳng (Oxy) suy ra $H(0;6;0)$.

Khi đó $MC^2 = MH^2 + CH^2 = MH^2 + 1$, do đó $MC_{\min} \Leftrightarrow MC^2_{\min} \Leftrightarrow MH^2_{\min}$.

Với $M(x; y; 0) \in (E)$ ta có $MH^2 = x^2 + (6 - y)^2$

mà $x^2 = 25 - \frac{25y^2}{9}$ do đó $MH^2 = 25 - \frac{25y^2}{9} + (6 - y)^2$, với $y \in [-3; 3]$

$$MH^2 = -\frac{16}{9}y^2 - 12y + 61.$$

Xét hàm số $f(y) = -\frac{16}{9}y^2 - 12y + 61$, $y \in [-3; 3]$

$$f'(y) = -\frac{32}{9}y - 12 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{27}{8} \notin [-3; 3]$$

$$f(-3) = 81; f(3) = 9$$

Do đó $MH^2_{\min} = 9 \Rightarrow MC^2_{\min} = 10 \Rightarrow MC_{\min} = \sqrt{10}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của MC là $\sqrt{10}$.

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(4;1;0)$, $B(4;6;6)$, $C(5;6;2)$, $D(7;2;14)$ và điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA = 3$, $MB = 6$, $MC = 5$, $MD = 13$. Khoảng cách từ điểm M đến điểm O bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 3,46

$$\text{Ta có: } \begin{cases} MA = 3 \\ MB = 6 \\ MC = 5 \\ MD = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-4)^2 + (b-1)^2 + c^2 = 9 \\ (a-4)^2 + (b-6)^2 + (c-6)^2 = 36 \\ (a-5)^2 + (b-6)^2 + (c-2)^2 = 25 \\ (a-7)^2 + (b-2)^2 + (c-14)^2 = 169 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 - 8a - 2b = -8 \\ a^2 + b^2 + c^2 - 8a - 12b - 12c = -52 \\ a^2 + b^2 + c^2 - 10a - 12b - 4c = -40 \\ a^2 + b^2 + c^2 - 14a - 4b - 28c = -80 \end{cases}$$



Đặt $d = a^2 + b^2 + c^2$ ta được:
$$\begin{cases} d - 6a - 2b = -8 \\ d - 6a - 12b - 12c = -52 \\ d - 8a - 12b - 4c = -40 \\ d - 12a - 4b - 28c = -80 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta tìm được $a = 2, b = 2, c = 2, d = 12 \Rightarrow M(2; 2; 2)$

Do đó, khoảng cách từ điểm M đến điểm O là: $OM = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3,46$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 3; -1)$, $B(-8; 7; -3)$ và điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) . Biết rằng A, B, M thẳng hàng, hãy tính $2a - b + 3c$.

Lời giải

Trả lời: 13

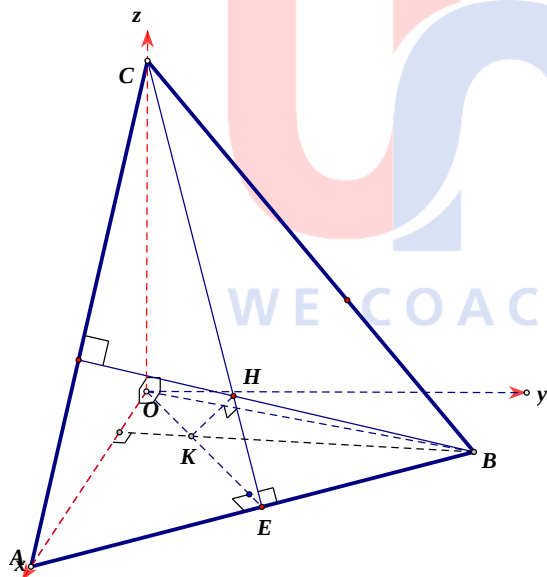
$M(7; 1; 0)$.

$\Rightarrow 2a - b + 3c = 2 \cdot 7 - 1 + 0 = 13$.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(5; 0; 0)$, $B(3; 4; 0)$ và điểm C nằm trên trục Oz . Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Khi C di chuyển trên trục Oz thì H luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính của đường tròn đó, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.

Lời giải

Trả lời: 0,56



Ta có $OA = OB = 5$ nên tam giác OAB cân tại O .

Ta có $C(0; 0; c)$.

Gọi $E(4; 2; 0)$ là trung điểm của AB .

Do $\begin{cases} AB \perp OC \\ AB \perp OE \end{cases}$, suy ra mặt phẳng (OCE) có định vuông góc với AB và tam giác ABC cân tại C .

Khi đó $H \in (OCE)$.

Gọi K là trực tâm tam giác OAB , do A, B và K cùng nằm trong mặt phẳng (Oxy) nên $K(a; b; 0)$.



Ta có
$$\begin{cases} \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(-2) + b \cdot 4 = 0 \\ a - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}.$$
 Tìm được $K = \left(3; \frac{3}{2}; 0\right)$.

Ta chứng minh được $KH \perp (CAB)$.

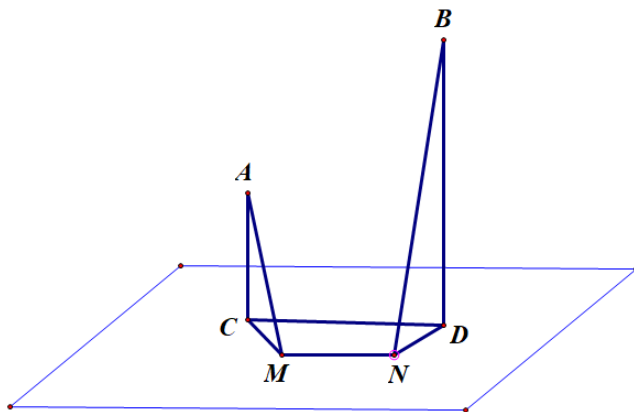
Suy ra $KHE = 90^\circ$.

Suy ra H thuộc mặt cầu đường kính $KE = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ và thuộc mặt phẳng (OCE) cố định. Vậy H luôn thuộc một đường tròn cố định có bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{4} \approx 0,56$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(7;10;6)$. Hai điểm M , N thay đổi trên mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 4$. Khi $AM + BN$ nhỏ nhất, tính tổng hoành độ của M và tung độ của N .

Lời giải

Trả lời: 9



Gọi C , D lần lượt là hình chiếu vuông góc của A , B trên mặt phẳng (Oxy) .

Suy ra tọa độ $C(1;2;0)$, $D(7;10;0)$.

Khi đó $CD = \sqrt{(7-1)^2 + (10-2)^2 + 0^2} = 10$

Ta có $AM + BN = \sqrt{AC^2 + CM^2} + \sqrt{BD^2 + DN^2} = \sqrt{9 + CM^2} + \sqrt{36 + DN^2}$.

Khi đó $AM + BN$ nhỏ nhất khi C , M , N , D thẳng hàng.

Đặt $CM = x$ với $0 < x < 6$. Suy ra $ND = 6 - x$.

Ta có $AM + BN = \sqrt{9 + x^2} + \sqrt{36 + (6 - x)^2} = \sqrt{9 + x^2} + \sqrt{x^2 - 12x + 72}$.

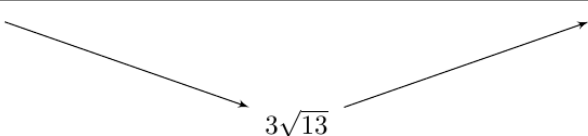
Xét hàm số $f(x) = \sqrt{9 + x^2} + \sqrt{x^2 - 12x + 72}$ với $0 < x < 6$.

Ta có $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{9 + x^2}} + \frac{x - 6}{\sqrt{x^2 - 12x + 72}}$.

Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{9 + x^2}} + \frac{x - 6}{\sqrt{x^2 - 12x + 72}} = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên



x	0	2	6
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Vậy $\min(AM + BN) = 3\sqrt{13}$ khi $CM = x = 2$.

Khi đó $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CD}$. Suy ra $x_M = x_C + \frac{1}{5}(x_D - x_C) = \frac{11}{5}$.

Mặt khác $\overrightarrow{CN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$. Suy ra $y_N = y_C + \frac{3}{5}(y_D - y_C) = \frac{34}{5}$.

Vậy tổng hoành độ của M và tung độ của N là $x_M + y_N = \frac{11}{5} + \frac{34}{5} = 9$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn ngoại tiếp. Tính giá trị OI^2 biết $A(2; 2; -2), B(6; -4; 2), C(8; -2; 0)$

Lời giải

Trả lời: 59

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4; -6; 4), \overrightarrow{CB} = (-2; -2; 2), \overrightarrow{CA} = (-6; 4; -2)$

Xét: $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = (-2) \cdot (-6) + 4 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) = 0$. Suy ra tam giác ABC vuông tại C .

Do đó, I là trung điểm BC .

Ta có: $I(7; -3; 1) \Rightarrow OI^2 = 7^2 + (-3)^2 + 1 = 59$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(0; 0; 4)$ và $N\left(\frac{3}{2}; 2; 6\right)$. Xét điểm $I(a; b; c)$ thay đổi sao cho IN luôn vuông góc với OM và diện tích tam giác IMO bằng 8. Khi độ dài đoạn thẳng IN đạt giá trị lớn nhất, giá trị $5a + 5b + c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: -22

Ta có $\overrightarrow{NI} = \left(a - \frac{3}{2}; b - 2; c - 6\right); \overrightarrow{OM} = (0; 0; 4)$.

$IN \perp OM \Leftrightarrow \overrightarrow{NI} \cdot \overrightarrow{OM} = 0 \Leftrightarrow 4(c - 6) = 0 \Leftrightarrow c = 6$.

Ta thấy $M, O \in Oz \Rightarrow S_{\triangle IMO} = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot d(I, Oz) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2}$

Từ giả thiết suy ra $2\sqrt{a^2 + b^2} = 8 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 16$.

Suy ra $IN^2 = \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + (b - 2)^2 = a^2 + b^2 - 3a - 4b + \frac{25}{4} = 16 - 3a - 4b + \frac{25}{4} = -3a - 4b + \frac{89}{4}$

Ta có $(3a + 4b)^2 \leq (9 + 16) \cdot (a^2 + b^2) \Leftrightarrow (3a + 4b)^2 \leq 400 \Leftrightarrow -20 \leq 3a + 4b \leq 20 \Rightarrow -3a - 4b \leq 20$

$\Rightarrow IN^2 \leq \frac{169}{4} \Leftrightarrow IN \leq \frac{13}{2}$



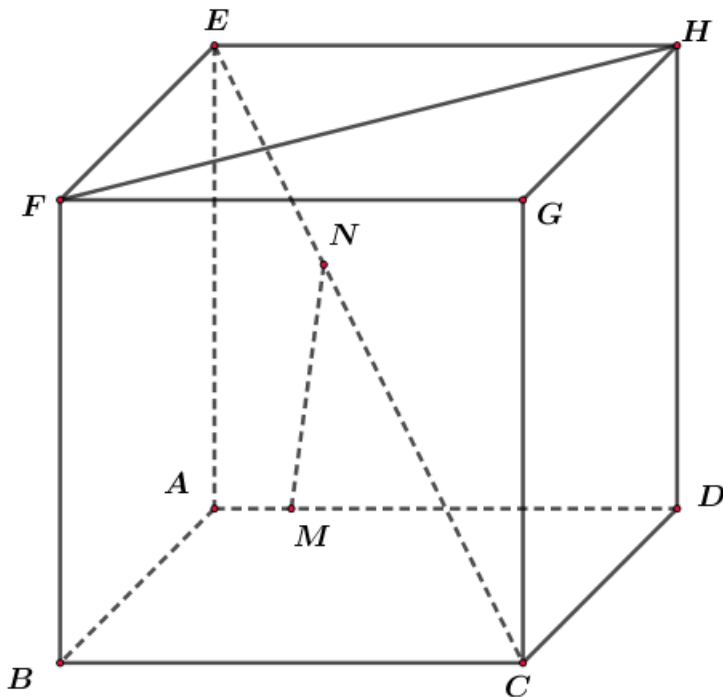
$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{3} = \frac{b}{4} \\ -3a - 4b = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{12}{5} \\ b = -\frac{16}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5a + 5b + c = -12 - 16 + 6 = -22.$$

Câu 22: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$ có $AB = AE = 2 (m)$, $AD = 3 (m)$. Lấy hai điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5} \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EN} = \frac{2}{5} \overrightarrow{EC}$. Độ dài đoạn MN bằng bao nhiêu mét? .

Lời giải

Trả lời: 1,56



$$\overrightarrow{EN} = \frac{2}{5} \overrightarrow{EC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AE} = \frac{2}{5} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AE} + \frac{2}{5} \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AE} + \frac{2}{5} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AE} + \frac{2}{5} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5} \overrightarrow{AD}$$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AE} + \frac{2}{5} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5} \overrightarrow{AD} - \frac{1}{5} \overrightarrow{AD} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AE} + \frac{2}{5} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{5} \overrightarrow{AD}$$

$$MN^2 = \frac{9}{25} AE^2 + \frac{4}{25} AB^2 + \frac{1}{25} AD^2 = \frac{9 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 9}{25} = \frac{61}{25}$$

$$\Rightarrow MN \approx 1,56.$$

Câu 23: Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn các điều kiện $|\vec{a}| = \frac{1}{2} |\vec{b}| = 1$, $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{15}$. Đặt $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{v} = 2k\vec{a} - \vec{b}$, $k \in \mathbb{R}$. Với $k = m + \frac{3\sqrt{n}}{2}$ thì $(\vec{u}; \vec{v}) = 60^\circ$. Tính $T = m + n$.

Lời giải

Trả lời: 9

$$\text{Ta có: } |\vec{a}| = \frac{1}{2} |\vec{b}| = 1 \Rightarrow |\vec{a}| = 1; |\vec{b}| = 2.$$



$$15 = |\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = \vec{a}^2 - 4\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2 \Rightarrow \vec{a}\vec{b} = \frac{\vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 - 15}{4} = \frac{1 + 4 \times 4 - 15}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{1^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2} = \sqrt{6}.$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(2k\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{4k^2\vec{a}^2 - 4k\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{4k^2 \cdot 1^2 - 4k \cdot \frac{1}{2} + 2^2} = \sqrt{4k^2 - 2k + 4}$$

$$\cos 60^\circ = \cos(\vec{u}; \vec{v}) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2k\vec{a}^2 - \vec{a}\vec{b} + 2k\vec{a}\vec{b} - \vec{b}^2}{\sqrt{6}\sqrt{4k^2 - 2k + 4}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2k - \frac{1}{2} + 2k \cdot \frac{1}{2} - 2^2}{2\sqrt{3}\sqrt{2k^2 - k + 2}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sqrt{2k^2 - k + 2} = 6k - 9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \frac{3}{2} \\ 4k^2 - 32k + 19 = 0 \end{cases} \Rightarrow k = \frac{8 + 3\sqrt{5}}{2} = 4 + \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

Suy ra: $m = 4, n = 5$.

Vậy $T = m + n = 4 + 5 = 9$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ với $SA = 3, SB = 4, SC = 5$. Một mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua trọng tâm của $S.ABC$ cắt các cạnh SA, SB, SC tại các điểm A_1, B_1, C_1 . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \frac{1}{SA_1^2} + \frac{1}{SB_1^2} + \frac{1}{SC_1^2}$ có dạng $P = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0; a, b$ nguyên tố cùng nhau. Tính $a + 2b$?

Lời giải

Trả lời: 58

Gọi G là trọng tâm của $S.ABC$ khi đó $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GS} = \vec{0}$.

Từ đó $\vec{SG} = \frac{1}{4}(\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC})$ (1).

Do A_1, B_1, C_1 thuộc các tia SA, SB, SC nên $\vec{SA}, \vec{SA_1}$ cùng hướng, $\vec{SB}, \vec{SB_1}$ cùng hướng, $\vec{SC}, \vec{SC_1}$ cùng hướng, từ đó $\vec{SA} = \frac{SA}{SA_1} \vec{SA_1}; \vec{SB} = \frac{SB}{SB_1} \vec{SB_1}; \vec{SC} = \frac{SC}{SC_1} \vec{SC_1}$.

Vậy tương đương với $\vec{SG} = \frac{1}{4} \left(\frac{SA}{SA_1} \vec{SA_1} + \frac{SB}{SB_1} \vec{SB_1} + \frac{SC}{SC_1} \vec{SC_1} \right)$ (2)

Do G, A_1, B_1, C_1 thuộc một mặt phẳng nên từ ta có $\frac{1}{4} \left(\frac{SA}{SA_1} + \frac{SB}{SB_1} + \frac{SC}{SC_1} \right) = 1$

Hay $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} + \frac{5}{z} = 4$ trong đó $x = SA_1, y = SB_1, z = SC_1$.

Vậy bài toán quy về tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$ trong điều kiện $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} + \frac{5}{z} = 4$ và

$0 < x < 3; 0 < y < 4; 0 < z < 5$.



Ta có $16 = \left(\frac{3}{x} + \frac{4}{y} + \frac{5}{z}\right)^2 \leq (3^2 + 4^2 + 5^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)$.

Suy ra $P = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{8}{25}$.

Vậy GTNN của $P = \frac{8}{25}$ khi $x = \frac{25}{6}; y = \frac{25}{8}; z = \frac{15}{6}$.

Suy ra $a = 8; b = 25 \Rightarrow a + 2b = 58$.

Câu 25: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;3;4)$ và $B(1;1;2)$. Giả sử điểm $M(m;n;0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho tổng khoảng cách $MA+MB$ ngắn nhất. Tính $T = 2m - n$

Lời giải

Trả lời: 1

Ta thấy hai điểm $A; B$ nằm cùng phía so với mặt phẳng (Oxy) . Lấy điểm A' đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (Oxy) thì $A'(2;3;-4)$ và $MA=MA'$.

Khi đó $MA+MB = MA'+MB \geq A'B$. Tổng khoảng cách $MA+MB$ ngắn nhất bằng $A'B$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow M, A', B$ thẳng hàng hay M là giao của $A'B$ với mặt phẳng (Oxy) .

Mà $\frac{MA'}{MB} = \frac{d(A', (Oxy))}{d(B, (Oxy))} = \frac{4}{2} = 2$ nên $\overrightarrow{A'M} = 2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - 2 = 2(1 - x_M) \\ y_M - 3 = 2(1 - y_M) \\ z_M + 4 = 2(2 - z_M) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{4}{3} \\ y_M = \frac{5}{3} \\ z_M = 0 \end{cases}$.

Suy ra $M\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}; 0\right)$

Vậy $T = 2m - n = 2 \cdot \frac{4}{3} - \frac{5}{3} = 1$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1;-1;2), B(-2;0;3), C(0;1;-2)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng Oxy sao cho biểu thức $S = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $T = 16a + 16b + 3c$.

Lời giải

Trả lời: -1

Với mọi điểm I bất kì ta có:

$$\begin{aligned} S &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) + 4(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \\ &= 8MI^2 + \overrightarrow{MI} (5\overrightarrow{IA} + 4\overrightarrow{IB} + 7\overrightarrow{IC}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} + 4\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC} \end{aligned}$$

Chọn điểm I sao cho: $5\overrightarrow{IA} + 4\overrightarrow{IB} + 7\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Gọi $I(x; y; z) \Rightarrow \begin{cases} 5(1-x) + 4(-2-x) + 7(0-x) = 0 \\ 5(-1-y) + 4(0-y) + 7(1-y) = 0 \\ 5(2-z) + 4(3-z) + 7(-2-z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{16} \\ y = \frac{1}{8} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{3}{16}; \frac{1}{8}; \frac{1}{2}\right)$



$$\text{Khi đó: } S = 8MI^2 + \overline{IA}.\overline{IB} + 3\overline{IB}.\overline{IC} + 4\overline{IA}.\overline{IC}$$

S đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất. Khi đó M là hình chiếu của I lên mặt phẳng Oxy.

$$\text{Suy ra: } M\left(-\frac{3}{16}; \frac{1}{8}; 0\right) \Rightarrow T = 16\left(-\frac{3}{16}\right) + 16 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot 0 = -1.$$

Câu 27: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC có $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$. Gọi $D(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn $\overline{AD} - \overline{AB} - 2\overline{AC} = \vec{0}$. Tính giá trị của biểu thức $a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 16

$$\overline{AD} - \overline{AB} - 2\overline{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow (a-1; b-2; c+1) - (1; -3; 4) - 2 \cdot (-5; 5; 6) = (0; 0; 0)$$

$$\Leftrightarrow (a+8; b-9; c-15) = (0; 0; 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a+8=0 \\ b-9=0 \\ c-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-8 \\ b=9 \\ c=15 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } a+b+c = -8+9+15 = 16.$$

Câu 28: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(3; -2; -1)$, $B(1; 4; 6)$, $C(3; 38; -16)$, $D(2; 5; 1)$. Điểm $M(a; b; c)$ thỏa mãn biểu thức $P = MD^4 - \frac{16}{3}MD^3 - 4MA^2 - 5MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = a + b + c$?

Lời giải

Trả lời: 16,7

Ta có:

$$\overline{DA} = (1; -7; -2); \overline{DB} = (-1; -1; 5); \overline{DC} = (1; 33; -17)$$

Vì

$$4\overline{DA} + 5\overline{DB} + \overline{DC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 4MA^2 + 5MB^2 + MC^2 = 4(\overline{MD} + \overline{DA})^2 + 5(\overline{MD} + \overline{DB})^2 + (\overline{MD} + \overline{DC})^2 = 10MD^2 + 1730$$

$$\text{Ta có: } P = MD^4 - \frac{16}{3}MD^3 - 10MD^2 - 1730$$

$$\text{Đặt } u = MD \geq 0 \Rightarrow MD^4 - \frac{16}{3}MD^3 - 10MD^2 - 1730 = u^4 - \frac{16}{3}u^3 - 10u^2 - 1730 = f(u)$$

$$f'(u) = 4u^3 - 16u^2 - 20u = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 5. \\ u = 0. \\ u = -1(L) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \min_{[0; +\infty)} f(u) = f(5) = \frac{-6065}{3}.$$

$$\text{Biểu thức } P \text{ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi } MD = 5 \Leftrightarrow (a-2)^2 + (b-5)^2 + (c-1)^2 = 25.$$

Mặt khác:

$$[(a-2).1 + (b-5).1 + (c-1).1]^2 \leq [(a-2)^2 + (b-5)^2 + (c-1)^2](1^2 + 1^2 + 1^2) = 75$$

$$\Rightarrow Q = a + b + c \leq 5\sqrt{3} + 8 \approx 16,7.$$