



CHƯƠNG

IV

NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. NGUYÊN HÀM



LÝ THUYẾT.

1. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT HÀM SỐ: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên một khoảng K (hoặc một đoạn hoặc một nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K .

Chú ý. Trường hợp $K = [a; b]$ thì các đẳng thức $F'(a) = f(a)$ và $F'(b) = f(b)$ được hiểu là đạo hàm bên phải tại điểm $x = a$ và đạo hàm bên trái tại điểm $x = b$ của hàm số $F(x)$, tức là

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = f(a) \text{ và } \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = f(b).$$

Giả sử hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K . Khi đó:

- Với mỗi hằng số C , hàm số $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K ;
- Nếu hàm số $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$ với mọi $x \in K$.

Như vậy, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$. Ta gọi $F(x) + C$ là họ các nguyên hàm của $f(x)$ trên K ký hiệu bởi $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Chú ý:

a) Để tìm họ các nguyên hàm (gọi tắt là tìm nguyên hàm) của hàm số $f(x)$ trên K , ta chỉ cần tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ trên K và khi đó $\int f(x)dx = F(x) + C$, C là hằng số.

b) Người ta chứng minh được rằng, nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K thì $f(x)$ có nguyên hàm trên khoảng đó.

c) Biểu thức $f(x)dx$ gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$, kí hiệu là $dF(x)$. Vậy $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$.

d) Khi tìm nguyên hàm của một hàm số mà không chỉ rõ tập K , ta hiểu là tìm nguyên hàm của hàm số đó trên tập xác định của nó.



2. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA NGUYÊN HÀM.

Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên K . Khi đó:

a) $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ với mọi số thực k khác 0.

Suy ra $\int [k.f(x) + l.g(x)]dx = k \int f(x)dx + l \int g(x)dx$

b) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

3. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

a) Nguyên hàm của hàm số lũy thừa

Hàm số $y = x^\alpha$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, được gọi là hàm số lũy thừa.

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ tùy thuộc vào giá trị của α . Cụ thể:

+) Với α nguyên dương, tập xác định là $\mathbb{R}$.

+) Với α nguyên âm hoặc $\alpha = 0$, tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$.

+) Với α không nguyên, tập xác định là $(0; +\infty)$.

+) Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ (với $\alpha \in \mathbb{R}$) có đạo hàm tại mọi điểm $x > 0$ và $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

Từ đó ta có: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq -1$); $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ ($x \neq 0$)

b) Nguyên hàm của hàm số lượng giác

$\int \cos x dx = \sin x + C$

$\int \sin x dx = -\cos x + C$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$ Với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$ Với $x \neq k\pi$

c) Nguyên hàm của hàm số mũ:

$\int e^x dx = e^x + C$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ($0 < a \neq 1$)



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Xác định nguyên hàm của các hàm số sau:

1) $f(x) = e^{2x-1}$

2) $f(x) = \sin x - 6x^2$

3) $f(x) = x^2 - 3x - \frac{1}{x}$



4) $f(x) = 4x + \sin x$

5) $f(x) = e^x + 2x - 1 + \frac{2}{x}$

6) $f(x) = \cos x - \frac{1}{\sin^2 x}$

7) $f(x) = 4x^3 + 2x + 1$

8) $f(x) = 2^x + \cos x$

9) $f(x) = \cos x + 1$

10) $f(x) = 2^x + x$

11) $f(x) = 5^x + \frac{1}{x}$

12) $f(x) = x^2 - \cos x$

13) $f(x) = 3^x \cdot 5^{x+1}$

14) $f(x) = x^{\frac{5}{7}}$

15) $f(x) = e^x \left(1 - \frac{2e^{-x}}{x^5} \right)$

Lời giải

1) Ta có $\int f(x) dx = \int e^{2x-1} dx = \int \frac{1}{e} (e^2)^x dx = \frac{1}{e} \frac{(e^2)^x}{\ln(e^2)} + C = \frac{1}{e} \frac{e^{2x}}{2} + C = \frac{1}{2} e^{2x-1} + C.$

2) $\int f(x) dx = \int (\sin x - 6x^2) dx = -\cos x - 2x^3 + C$

3) $\int f(x) dx = \int x^2 - 3x - \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} - \ln|x| + C$

4) $\int f(x) dx = \int (4x + \sin x) dx = 2x^2 - \cos x + C$

5) $\int f(x) dx = \int \left(e^x + 2x - 1 + \frac{2}{x} \right) dx = e^x + x^2 - x + 2\ln|x| + C$

6) $\int f(x) dx = \int \left(\cos x - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \sin x + \cot x + C.$

7) $\int f(x) dx = \int (4x^3 + 2x + 1) dx = 4\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^2}{2} + x + C = x^4 + x^2 + x + C.$



$$8) \int f(x) dx = \int (2^x + \cos x) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \sin x + C.$$

$$9) \int f(x) dx = \int (\cos x + 1) dx = \sin x + x + C$$

$$10) \int f(x) dx = \int (2^x + x) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$11) \int f(x) dx = \int \left(5^x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{5^x}{\ln 5} + \ln|x| + C$$

$$12) \int f(x) dx = \int (x^2 - \cos x) dx = \frac{x^3}{3} - \sin x + C$$

$$13) \int f(x) dx = \int 3^x \cdot 5^{x+1} dx = \int 3^x \cdot 5^x \cdot 5 dx = 5 \int (3 \cdot 5)^x dx = 5 \int 15^x dx = \frac{5 \cdot 15^x}{\ln 15} + C$$

$$14) \int f(x) dx = \int x^{\frac{5}{7}} dx = \frac{1}{\frac{5}{7} + 1} x^{\frac{5}{7} + 1} + C = \frac{7}{12} x^{\frac{12}{7}} + C$$

$$15) \int f(x) dx = \int e^x \left(1 - \frac{2e^{-x}}{x^5} \right) dx = \int \left(e^x - \frac{2}{x^5} \right) dx = e^x + \frac{1}{2x^4} + C$$

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = x^2 + \sin x + 1$ biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $F(0) = 1$. Khi đó, tìm $F(x)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } F(x) = \int (x^2 + \sin x + 1) dx = \frac{x^3}{3} - \cos x + x + C.$$

$$\text{Mà } F(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{0^3}{3} - \cos 0 + 0 + C = 1 \Leftrightarrow C = 2. \text{ Vậy } F(x) = x^3 - \cos x + x + 2.$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 4 - 3\sin x$ và $f(0) = 5$. Tìm hàm số $f(x)$

Lời giải

$$\text{Ta có } f(x) = \int (4 - 3\sin x) dx = 4x + 3\cos x + c.$$

$$\text{Mặt khác } f(0) = 5 \Leftrightarrow 3 + c = 5 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow f(x) = 4x + 3\cos x + 2.$$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = 2x + e^{-x}$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2023$

Lời giải

$$F(x) = \int (2x + e^{-x}) dx = \frac{2 \cdot x^2}{2} - e^{-x} + C = x^2 - e^{-x} + C$$



$$F(0) = 2023 \Leftrightarrow 0^2 - e^{-0} + C = 2023 \Leftrightarrow C = 2024$$

$$F(x) = x^2 - e^{-x} + 2024.$$

Câu 5: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Tìm $F(x)$.

Lời giải

+ Ta có, $F(x) = \int f(x) dx = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C$, mà $F(0) = 2 \Rightarrow C = 1$. Do đó

$$F(x) = e^x + x^2 + 1.$$

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = x^2 + \sin x + 1$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 1$. Tìm $F(x)$.

Lời giải

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, ta có:

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (x^2 + \sin x + 1) dx = \frac{x^3}{3} - \cos x + x + C.$$

$$\text{Mà } F(0) = 1 \Rightarrow C - 1 = 1 \Leftrightarrow C = 2.$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{x^3}{3} - \cos x + x + 2.$$

Câu 7: Ký hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo m) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau một năm đầu tiên cây cao $2,5m$. Trong 10 năm tiếp theo cây phát triển với tốc độ $h'(x) = \frac{1}{x}$ (m/năm).

a) Xác định chiều cao của cây sau x năm ($1 \leq x \leq 11$).

b) Sau bao nhiêu năm cây cao $4m$.

Lời giải

a) Xác định chiều cao của cây sau x năm ($1 \leq x \leq 11$).

$$\text{Ta có } h(x) = \int h'(x) dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$$

$$\text{Vì } h(1) = 2,5 \text{ nên } \ln 1 + C = 2,5 \Rightarrow C = 2,5.$$

$$\text{Chiều cao của cây sau } x \text{ năm } (1 \leq x \leq 11) \text{ là } h(x) = \ln x + 2,5.$$

b) Sau bao nhiêu năm cây cao $4m$.

$$\text{Ta có } h(x) = 4 \Leftrightarrow \ln x + 2,5 = 4 \Leftrightarrow \ln x = 1,5 \Leftrightarrow x = e^{1,5} \approx 4,48 \text{ (năm)}.$$

Vậy sau $4,48$ (năm) thì cây cao $4m$.



Câu 8: Một chiếc xe đạp đang chạy với vận tốc $v_0 = 12 \text{ m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc không đổi $a = 3 \text{ m/s}^2$. Tính quãng đường xe đi được trong 8 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

Lời giải

Ta có $v(t) = \int a(t) dt = \int 3 dt = 3t + C$.

Vì $v(0) = 12$ nên $C = 12 \Rightarrow v(t) = 3t + 12$.

Khi đó $s(t) = \int v(t) dt = \int (3t + 12) dt = \frac{3}{2}t^2 + 12t + C'$.

Vì $s(0) = 0$ nên $C' = 0 \Rightarrow s(t) = \frac{3}{2}t^2 + 12t (m)$.

Quãng đường xe đi được trong 8 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc là $s(8) = \frac{3}{2}.8^2 + 12.8 = 192$.

Câu 9: Một vườn ươm cây cảnh bán một cây sau 6 năm trồng và uốn tạo dáng. Tốc độ tăng trưởng trong suốt 5 năm được tính xấp xỉ bởi công thức $h'(t) = 1,6t + 4$, trong đó $h(t)(cm)$ là chiều cao của cây khi kết thúc t (năm). Cây con khi được trồng cao 12 cm.

a) Tìm công thức chỉ chiều cao của cây sau t năm.

b) Khi được bán, cây cao bao nhiêu centimét?

Lời giải

Ta có:

a) $h(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $h'(t) = 1,6t + 4$.

$$\int (1,6t + 4) dt = \int 1,6t dt + \int 4 dt = 1,6 \int t dt + \int 4 dt = \frac{4}{5}t^2 + 4t + C.$$

Nên $h(t) = \frac{4}{5}t^2 + 4t + C$.

Vì cây con khi được trồng cao 12 cm nên $h(0) = 12 \Leftrightarrow \frac{4}{5}.0^2 + 4.0 + C = 12 \Leftrightarrow C = 12$,

Vậy $h(t) = \frac{4}{5}t^2 + 4t + 12$.

b) Sau 5 năm trồng và uốn tạo dáng. Cây có chiều cao là: $h(5) = \frac{4}{5}.5^2 + 4.5 + 12 = 52 (cm)$.

Vậy khi được bán, cây cao 52 (cm).

Câu 10: Tại một lễ hội bia, tốc độ thay đổi lượng khách tham dự được biểu diễn bằng hàm số $f'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t$. Trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 15$), $f'(t)$ tính bằng khách/giờ. Sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội.



- a) Viết công thức của hàm số $f(t)$ biểu diễn số lượng khách tham dự lễ hội với $0 \leq t \leq 15$.
- b) Sau 4 giờ sẽ có bao nhiêu khách tham dự lễ hội?
- c) Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là bao nhiêu?
- d) Tại thời điểm nào thì tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất?

Lời giải

a) Ta có $B(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t$.

$$\text{Do đó } f(t) = \int (20t^3 - 300t^2 + 1000t) dt = 5t^4 - 100t^3 + 500t^2 + C.$$

$$\text{Nên } f(t) = 5t^4 - 100t^3 + 500t^2 + C.$$

Vì sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội nên $f(1) = 405 + C = 500 \Rightarrow C = 95$.

$$\text{Vậy } f(t) = 5t^4 - 100t^3 + 500t^2 + 95, \quad 0 \leq t \leq 15.$$

b) Số lượng khách tham dự lễ hội sau 4 giờ là: $f(4) = 5 \cdot 4^4 - 100 \cdot 4^3 + 500 \cdot 4^2 + 95 = 2975$ (khách).

c) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[0; 15]$. Ta có:

$$f'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 5 \\ t = 10 \end{cases}.$$

Ta có: $f(0) = 95; f(5) = 3220; f(10) = 95; f(15) = 28220$.

Vậy Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là 28220 khách sau 15 giờ,

d) Ta tìm t để hàm số $f'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; 15]$. Ta có:

$$f''(t) = 60t^2 - 600t + 1000 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{15 - 5\sqrt{3}}{3} \\ t = \frac{15 + 5\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

Ta có: $f'(0) = 0; f'\left(\frac{15 - 5\sqrt{3}}{3}\right) \approx 962,25; f'\left(\frac{15 + 5\sqrt{3}}{3}\right) \approx -962,25; f'(15) = 15000$.

Khi đó, giá trị lớn nhất của hàm số $f'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t$ trên đoạn $[0; 15]$ bằng 15000 tại $t = 15$.

Vậy tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất tại thời điểm 15 giờ.



Câu 11: Các dự án xây dựng dân dụng, chi phí nhân công lao động được tính theo số ngày công. Gọi $m(t)$ là số lượng nhân công được sử dụng ở ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Gọi $M(t)$ là số ngày công nhân được tính đến hết ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Trong kinh tế xây dựng, người ta đã biết rằng $M'(t) = m(t)$. Một công trình xây dựng dự kiến hoàn thành trong 400 ngày. Số lượng công nhân được sử dụng cho bởi hàm số $m(t) = 200 - 2t$, Trong đó t tính theo ngày ($0 \leq t \leq 180$), $m(t)$ tính theo người. Đơn giá cho một ngày công lao động là 380 000 đồng. Tính chi phí nhân công lao động của công trình đó (cho đến lúc hoàn thành).

Lời giải

Ta có $M'(t) = m(t)$ nên $M(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $m(t) = 200 - 2t$.

$$\text{Do đó: } M(t) = \int (200 - 2t) dt = 200t - t^2 + C.$$

$$\text{Suy ra: } M(t) = 200t - t^2 + C, 0 \leq t \leq 180. \text{ Vì } M(0) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$\text{Vậy } M(t) = 200t - t^2.$$

$$\text{Số ngày công được tính đến hết ngày thứ 180 là: } M(180) = 200 \cdot 180 - 180^2 = 3600.$$

$$\text{Chi phí nhân công lao động của công trình đó là: } 380000 \cdot 3600 = 1368000000 \text{ (đồng).}$$

Câu 12: Một vật được thả từ độ cao $50m$ rơi với gia tốc $5m/s^2$. Sau khi rơi được 4 giây vật di chuyển với vận tốc bao nhiêu m/s ?

Lời giải

Chọn trục theo chiều rơi của vật.

Kí hiệu $v(t)$ là vận tốc của vật, tại thời điểm t giây kể từ khi vật bắt đầu rơi.

$$\text{Vì } a(t) = v'(t), \forall t \geq 0 \text{ nên } v(t) = \int a(t) dt = \int 5 dt = 5t + C_1.$$

$$\text{Ta có: } v(0) = 0 \text{ nên } 5 \cdot 0 + C_1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0. \text{ Vậy } v(t) = 5t (m/s).$$

$$\text{Sau khi vật rơi 4 giây vật di chuyển với vận tốc: } v(4) = 5 \cdot 4 = 20 (m/s).$$

Câu 13: Doanh thu bán hàng của một doanh nghiệp khi bán một loại sản phẩm là số tiền $R(x)$ (triệu đồng) thu được khi x đơn vị sản phẩm được bán ra. Tốc độ biến động (thay đổi) của doanh thu khi x đơn vị sản phẩm đã được bán là hàm số $M_R(x) = R'(x)$. Đại diện của doanh nghiệp cho biết tốc độ biến đổi của doanh thu khi bán một loại sản phẩm được cho bởi $M_R(x) = 500 - 0,1x$, ở đó x là số lượng sản phẩm đã bán. Tìm doanh thu của doanh nghiệp khi đã bán 2000 sản phẩm.

Lời giải



Doanh thu của doanh nghiệp là $R(x) = \int M_R(x) dx = \int (500 - 0,1x) dx = 500x - \frac{1}{20}x^2 + C$.

Vì $R(0) = 0$ nên $C = 0$. Vậy $R(x) = 500x - \frac{1}{20}x^2$.

Doanh thu của doanh nghiệp khi bán 2000 sản phẩm là:

$$R(2000) = 500.2000 - \frac{1}{20}.2000^2 = 800000 \text{ triệu đồng.}$$

Câu 14: Một viên đạn được bắn lên trời với vận tốc là $72m/s$ bắt đầu từ độ cao $2m$. Hãy xác định chiều cao của viên đạn sau thời gian $5s$ kể từ lúc bắn biết gia tốc trọng trường là $9.8m/s^2$

Lời giải

Ta có vận tốc của viên đạn tại thời điểm t là:

$$v(t) = \int -9,8dt = -9,8t + C_1$$

Do $v(0) = 72$ nên $v(0) = -9,8.0 + C_1 = 72 \Leftrightarrow C_1 = 72 \Rightarrow v(t) = -9,8t + 72$.

Độ cao của viên đạn tại thời điểm t là:

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (-9,8t + 72) dt = -4,9t^2 + 72t + C_2$$

Vì $s(0) = 2$ nên $s(0) = -4,9.0^2 + 72.0 + C_2 = 2 \Leftrightarrow C_2 = 2 \Rightarrow s(t) = -4,9t^2 + 72t + 2$.

Vậy sau khoảng thời gian $5s$ kể từ lúc bắn, viên đạn ở độ cao

$$s(5) = -4,9.5^2 + 72.5 + 2 = 239,5m.$$

Câu 15: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt$ (m^3/s) và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây.

Lời giải

Ta có: $h'(t) = 3at^2 + bt$

$$\Rightarrow h(t) = \int (3at^2 + bt) dt = at^3 + \frac{1}{2}bt^2 + C \Rightarrow h(t) = at^3 + \frac{1}{2}bt^2 + C$$

$$\text{Chọn } t = 0 \Rightarrow h(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow h(t) = at^3 + \frac{1}{2}bt^2$$

$$\text{Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là } 150m^3: h(5) = 150 \Leftrightarrow 125a + \frac{25}{2}b = 150$$

$$\text{Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là } 1100m^3: h(10) = 1100 \Leftrightarrow 1000a + 50b = 1100$$

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} 125a + \frac{25}{2}b = 150 \\ 1000a + 50b = 1100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow h(t) = t^3 + t^2$$

Nên thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là $h(20) = 20^3 + 20^2 = 8400m^3$

