



CHƯƠNG

IV

NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. NGUYÊN HÀM



HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$.

a) $f(x) = 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$

b) Biết rằng $\int f(x) dx = ax + b \sin x + C$, $a, b \in \mathbb{Z}$, khi đó $a + b = 2$.

c) Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 1$ là $F(x) = x - \sin x + 1$.

d) Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ khi đó: $F(\pi) = \frac{\pi}{2} + 1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Đúng

$$f(x) = 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$$

b) Sai

$$\text{Ta có: } \int f(x) dx = \int (1 - \cos x) dx = x - \sin x + C$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 0.$$

c) Đúng

$$\text{Ta có: } F(x) = x - \sin x + C.$$

$$\text{Vì } F(0) = 1 \text{ nên } C = 1.$$

$$\text{Vậy ta có: } F(x) = x - \sin x + 1.$$

d) Đúng

$$\text{Ta có: } F(x) = x - \sin x + C.$$

$$\text{Vì } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ nên } \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{-\pi}{2} + 1.$$

$$\text{Suy ra: } F(x) = x - \sin x - \frac{\pi}{2} + 1 \Rightarrow F(\pi) = \pi - \sin \pi - \frac{\pi}{2} + 1 = \frac{\pi}{2} + 1$$



Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x}$.

a) Trên $(0; +\infty)$, ta có: $\int f(x) dx = x - \ln x + C$.

b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $F(1) = 3$. Khi đó $F(x) = x - \ln x + 2$.

c) $\int f'(x) dx = 1 - \frac{1}{x}$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1) = 2$ và $G(2) - G(-2) = 0$. Khi đó tìm được $G(-3) = a + b \ln 3$, với a, b là các số hữu tỷ. Khi đó $a + b = 1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Đúng

Trên $(0; +\infty)$, ta có: $\int f(x) dx = \int \frac{x-1}{x} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = x - \ln x + C$.

b) Đúng

Trên $(0; +\infty)$, ta có $F(x) = x - \ln x + C$.

Mà $F(1) = 3 \Rightarrow 1 + \ln 1 + C = 3 \Leftrightarrow C = 2 \Rightarrow F(x) = x - \ln x + 2$.

c) Sai

$\int f'(x) dx = f(x) + C = \frac{x-1}{x} + C \neq \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$.

d) Đúng

+) Do $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên ta có: $G(x) = x - \ln|x| + C$

$\Rightarrow G(x) = \begin{cases} x - \ln x + C_1, & x > 0 \\ x - \ln(-x) + C_2, & x < 0 \end{cases}$

+) Mà $G(1) = 2$ nên $1 - \ln 1 + C_1 = 2 \Rightarrow C_1 = 1 \Rightarrow G(x) = \begin{cases} x - \ln x + 1, & x > 0 \\ x - \ln(-x) + C_2, & x < 0 \end{cases}$

+) Mặt khác: $G(2) - G(-2) = 0 \Rightarrow 2 - \ln 2 + 1 - (-2 - \ln 2 + C_2) = 0 \Rightarrow C_2 = 5$

$\Rightarrow G(x) = \begin{cases} x - \ln x + 1, & x > 0 \\ x - \ln(-x) + 5, & x < 0 \end{cases}$

+) $G(-3) = -3 - \ln 3 + 5 = 2 - \ln 3 \Rightarrow a = 2; b = -1 \Rightarrow a + b = 1$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 8x^3 + \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = 3$.

a) Hàm số $y = f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x)$.

b) Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa $F(0) = 2$. Khi đó $F(1) = \frac{32}{5} - \sin 1$.

c) $f(x) = 2x^4 - \cos x + 3$.

d) $\int f(x) dx = \frac{2}{5}x^5 - \sin x + 3x + C$, với C là hằng số.

Lời giải



a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Đúng

b) Đúng

Ta có: $f(x) = \int (8x^3 + \sin x) dx = 8 \int x^3 dx + \int \sin x dx = 2x^4 - \cos x + C$

Lại có: $f(0) = 3 \Rightarrow -1 + C = 3 \Rightarrow C = 4 \Rightarrow f(x) = 2x^4 - \cos x + 4$

Khi đó: $F(x) = \int f(x) dx = \int (2x^4 - \cos x + 4) dx = \frac{2}{5}x^5 - \sin x + 4x + C$

Mà $F(0) = 2 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow F(x) = \frac{2}{5}x^5 - \sin x + 4x + 2 \Rightarrow F(1) = \frac{32}{5} - \sin 1$.

c) Sai

Ta có: $f(x) = \int (8x^3 + \sin x) dx = 8 \int x^3 dx + \int \sin x dx = 2x^4 - \cos x + C$

Lại có: $f(0) = 3 \Rightarrow -1 + C = 3 \Rightarrow C = 4 \Rightarrow f(x) = 2x^4 - \cos x + 4$

d) Sai

$\int f(x) dx = \int (2x^4 - \cos x + 4) dx = \frac{2}{5}x^5 - \sin x + 4x + C$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{2} + \cos x$.

a) Hàm số $f(x)$ có tập xác định là đoạn $[-1;1]$

b) $\int f(x) dx = x^2 + \sin x$.

c) $\int_0^2 f(x) dx = 1 + \sin 2$.

d) Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(0) = 1$ thì $F(1) = \frac{1}{4}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
--------	--------	---------	--------

a) Tập xác định của hàm số $f(x) = \frac{x}{2} + \cos x$ là: $D = \mathbb{R}$. Do đó mệnh đề sai.

b) $\int f(x) dx = \int \left(\frac{x}{2} + \cos x \right) dx = \frac{x^2}{4} + \sin x + C$. Do đó mệnh đề sai.

c) $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left(\frac{x}{2} + \cos x \right) dx = \left(\frac{x^2}{4} + \sin x \right) \Big|_0^2 = 1 + \sin 2$. Do đó mệnh đề Đúng.

d) Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(0) = 1$ thì $F(1) = \frac{1}{4}$.

$$F(1) - F(0) = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} + \cos x \right) dx = \left(\frac{x^2}{4} + \sin x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \sin 1$$

$$\Rightarrow F(1) = \frac{5}{4} + \sin 1. \text{ Do đó mệnh đề sai.}$$

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x}$

a) $\int f(x) dx = 2x + \ln|x| + C$.



b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(1)=3$. Khi đó $F(x)=2x+\ln|x|+1$.

c) $\int f'(2x)dx = \frac{-1}{4x} + C$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(2)=1$ và $G(5)+G(-5)=0$. Khi đó tìm được $G(-10)=a\ln 10+b\ln 5+c\ln 2+d$, với a,b,c là các số hữu tỷ. Khi đó $a+b+c+d=-19$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

a) Đúng

$$\int f(x)dx = 2x + \ln|x| + C.$$

Ta có $f(x) = \frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x} \Rightarrow \int f(x)dx = \int \left(2 + \frac{1}{x}\right)dx = 2x + \ln|x| + C$.

b) Đúng

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(1)=3$. Khi đó $F(x)=2x+\ln|x|+1$.

Theo câu a): $F(x) = \int f(x)dx = 2x + \ln|x| + C$.

Vì $F(1)=3$ nên $C=1$.

Vậy $F(x)=2x+\ln|x|+1$.

c) Sai

$$\int f'(2x)dx = \frac{-1}{4x} + C.$$

Ta có $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(2x) = -\frac{1}{4x^2}$.

$$\int f'(2x)dx = -\int \frac{1}{4x^2}dx = \frac{1}{4x} + C.$$

d) Sai

Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(2)=1$ và $G(5)+G(-5)=0$. Khi đó tìm được $G(-10)=a\ln 10+b\ln 5+c\ln 2+d$, với a,b,c là các số hữu tỷ. Khi đó $a+b+c+d=-17$.

$$\text{Ta có } G(x) = 2x + \ln|x| + C = \begin{cases} 2x + \ln x + C_1 \\ 2x + \ln(-x) + C_2 \end{cases}$$

$$G(2)=1 \Rightarrow 2.2 + \ln 2 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = -3 - \ln 2.$$

$$G(5)+G(-5)=0 \Leftrightarrow 2.5 + \ln 5 - 3 - \ln 2 + 2.(-5) + \ln 5 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 3 + \ln 2 - 2\ln 5.$$

Do đó $G(-10) = 2.(-10) + \ln 10 + 3 + \ln 2 - 2\ln 5 = \ln 10 - 2\ln 5 + \ln 2 - 17$.

Vậy $a+b+c+d = 1 + (-2) + (1) + (-17) = -17$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$ với $x \neq \pm 1$.



a) $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$.

b) $\int f(x)dx = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C$.

c) Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$ thỏa mãn $F(-2) = \ln(3e)$ là $F(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + 1$.

d) Phương trình $F(x) = \ln(2e)$ có 2 nghiệm $x_1; x_2$. Khi đó $S = x_1 \cdot x_2 = 1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Đúng: Ta có $f(x) = \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$.

b) Sai: $\int f(x)dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln|x-1| - \ln|x+1| + C = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$

c) Đúng: Ta có $\int f(x)dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln|x-1| - \ln|x+1| + C = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$.

$F(-2) = \ln(3e) \Leftrightarrow \ln \left| \frac{-2-1}{-2+1} \right| + C = \ln(3e) \Leftrightarrow \ln \left| \frac{-2-1}{-2+1} \right| + C = 1 + \ln 3 \Leftrightarrow C = 1$.

Vậy $F(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + 1$.

d) Đúng: $F(x) = \ln(2e) \Leftrightarrow \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + 1 = 1 + \ln 2 \Leftrightarrow \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = 2 \Leftrightarrow |x-1| = 2|x+1|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$

Vậy $S = x_1 \cdot x_2 = 1$.

Câu 7: Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 7}{x}$.

a) $f(x) = x + 5 - \frac{7}{x}$.

b) $\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} + 5x - 7\ln|x| + C$.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(1) = 5$. Khi đó ta tìm được hàm số $F(x) = \frac{x^2}{2} + 5x - 7\ln|x| + \frac{1}{2}$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1) = 4$ và $G(3) + G(-9) = 20$. Khi đó tìm được $G(-6) = a \ln 2 + b \ln 3 + c$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Vậy $a + b + c = \frac{2}{3}$.

Lời giải



a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Đúng: $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 7}{x} = x + 5 - \frac{7}{x}$.

b) Đúng: $\int f(x)dx = \int \left(x + 5 - \frac{7}{x}\right)dx = \frac{x^2}{2} + 5x - 7\ln|x| + C$.

c) Sai: Ta có $\int f(x)dx = \int \left(x + 5 - \frac{7}{x}\right)dx = \frac{x^2}{2} + 5x - 7\ln|x| + C$.

Do $F(1) = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + 5 + C = 5 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}$ nên $F(x) = \frac{x^2}{2} + 5x - 7\ln|x| - \frac{1}{2}$.

d) Sai: Ta có $\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} + 5x - 7\ln|x| + C = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + 5x - 7\ln x + C_1 & \text{khi } x > 0 \\ \frac{x^2}{2} + 5x - 7\ln(-x) + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$.

Do $\begin{cases} G(1) = 4 \\ G(3) + G(-9) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} + 15 - 7\ln 3 - \frac{3}{2} + \frac{81}{2} - 45 - 14\ln 3 + C_2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{3}{2} \\ C_2 = 21\ln 3 + \frac{13}{2} \end{cases}$

Khi đó: $G(-6) = \frac{36}{2} - 30 - 7\ln 6 + 21\ln 3 + \frac{13}{2} = -7\ln 2 + 14\ln 3 - \frac{11}{2}$.

Vậy $a + b + c = -7 + 14 - \frac{11}{2} = \frac{3}{2}$.

Câu 8:

Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f(x) = \frac{(x+1)(3x-2)}{x}$.

a) $f(x) = 3x + 5 - \frac{2}{x}$

b) $\int f(x)dx = 3x + x - 2\ln|x| + C$.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(3) = 15$. Khi đó ta tìm được

$F(x) = \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + 15$.

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(2) = 1$ và $G(5) + G(-5) = 10$. Khi đó tìm được $G(-10) = a\ln 2 + b\ln 5 + c$, với a, b, c là các số hữu tỷ. Vậy $a + b + c = 75$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
--------	--------	--------	---------

a) Sai: $f(x) = \frac{(x+1)(3x-2)}{x} = \frac{3x^2 + x - 2}{x} = 3x + 1 - \frac{2}{x}$.

b) Sai: $\int f(x)dx = \int \left(3x + 1 - \frac{2}{x}\right)dx = \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + C$.

c) Sai: Ta có $\int f(x)dx = \int \left(3x + 1 - \frac{2}{x}\right)dx = \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + C$.



Do $F(3) = 15 \Leftrightarrow \frac{27}{2} + 3 - 2\ln 3 + C = 15 \Leftrightarrow C = 2\ln 3 - \frac{3}{2}$.

Vậy $F(x) = \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + 2\ln 3 - \frac{3}{2}$.

d) Đúng: Ta có: $\int f(x)dx = \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + C = \begin{cases} \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln x + C_1 & \text{khi } x > 0 \\ \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln(-x) + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

Do $\begin{cases} G(2) = 1 \\ G(5) + G(-5) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 + 2 + C_1 = 1 \\ \frac{75}{2} + 5 - 2\ln 5 + C_1 + \frac{75}{2} - 5 - 2\ln 5 + C_2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -7 \\ C_2 = 4\ln 5 - 65 \end{cases}$

Nên $G(-10) = 150 - 10 - 2\ln 10 + 4\ln 5 - 65 = 75 - 2\ln 2 + 2\ln 5 = a\ln 2 + b\ln 5 + c$.

Vậy $a + b + c = -2 + 2 + 75 = 75$.

Câu 9: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = e^x - 2x$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 1$.

a) $F(x) = e^x - x^2$.

b) $F(1) = e - 1$.

c) $\int F(x)dx = e^x - \frac{x^3}{3} + C$.

d) $\int \frac{f(x)}{xe^x}dx = \ln|x| - 2e^x + C$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) **Đúng:** Ta có $\int f(x)dx = \int (e^x - 2x)dx = e^x - x^2 + C$

$F(0) = 1 \Leftrightarrow e^0 - 0^2 + C = 1 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = e^x - x^2$

b) **Đúng:** $\int f(x)dx = \int (e^x - 2x)dx = e^x - x^2 + C \Rightarrow F(x) = e^x - x^2 + C$.

$F(0) = 1 \Leftrightarrow e^0 - 0^2 + C = 1 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = e^x - x^2 \Rightarrow F(1) = e - 1$

c) **Đúng:** $\int F(x)dx = \int (e^x - x^2)dx = e^x - \frac{x^3}{3} + C$

d) **Sai:** $\int \frac{f(x)}{xe^x}dx = \int \frac{e^x - 2x}{x.e^x}dx = \int \left(\frac{1}{x} - 2.e^{-x} \right)dx = \int \frac{1}{x}dx - 2\int (e^{-1})^x dx$

$= \ln|x| - 2(e^{-1})^x \ln e^{-1} + C = \ln|x| + 2e^{-x} + C$

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = 2^x$.

a) Hàm số $f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = 2^x \cdot \ln 2$.

b) Mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ đều có dạng $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$.

c) $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + 1$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(1) = 1$.



d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Khi đó giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + \dots + F(2024) + F(2025) = \frac{2^{2026} - 1}{\ln 2}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Đúng: $f'(x) = g(x)$.

b) Sai: $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$, C là hằng số.

c) Sai: $F(x) = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$; $F(1) = 1 \Rightarrow \frac{2}{\ln 2} + C = 1 \Rightarrow C = 1 - \frac{2}{\ln 2} \neq 1$.

d) Đúng:

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, ta có $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ mà $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$

$$\Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}.$$

$$T = F(0) + F(1) + \dots + F(2024) + F(2025)$$

$$= \frac{1}{\ln 2} (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2024} + 2^{2025}) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{2^{2026} - 1}{2 - 1} = \frac{2^{2026} - 1}{\ln 2}.$$

Câu 11: Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2$.

a) $f(x) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$.

b) $\int f(x) dx = x - 2 \ln|x| + \frac{1}{x} + C$.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(3) = 5$. Khi đó tìm được

$$F(x) = x - 2 \ln|x| - \frac{1}{x} + 5.$$

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1) = 5$ và $G(2) + G(-4) = 2025$.

Khi đó tìm được $F(-8) = \frac{a}{b}$, với a, b là các số nguyên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Vậy

$$a + b = 16123.$$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Đúng vì $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$.

b) Sai vì:

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = x - 2 \ln|x| - \frac{1}{x} + C.$$

c) Sai vì:



Ta có $\int f(x)dx = \int \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C.$

Do $F(3) = 5 \Leftrightarrow 3 - 2\ln 3 - \frac{1}{3} + C = 5 \Leftrightarrow C = 2\ln 3 + \frac{7}{3}.$

Vậy $F(x) = x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + 2\ln 3 + \frac{7}{3}.$

d) Đúng vì:

Ta có: $\int f(x)dx = x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C = \begin{cases} x - 2\ln x - \frac{1}{x} + C_1 & \text{khi } x > 0. \\ x - 2\ln(-x) - \frac{1}{x} + C_2 & \text{khi } x < 0. \end{cases}$

Do

$\begin{cases} G(1) = 5 \\ G(2) + G(-4) = 2025 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 5 \\ 2 - 2\ln 2 - \frac{1}{2} + 5 - 4 - 4\ln 2 + \frac{1}{4} + C_2 = 2025 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 5 \\ C_2 = 6\ln 2 + \frac{8089}{4} \end{cases}$

Nên $G(-8) = -8 - 6\ln 2 + \frac{1}{8} + 6\ln 2 + \frac{8089}{4} = \frac{16115}{8}.$

Suy ra: $a = 16115; b = 8.$

Vậy $a + b = 16115 + 8 = 16123.$

Câu 12: Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5cm. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số $v(t) = -0,1t^3 + t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng cm/tuần. Gọi $h(t)$ là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t .

a) $h(t) = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3}$, với $t \geq 0$.

b) Chiều cao tối đa của cây cà chua đó là 88,4 cm.

c) Giai đoạn tăng trưởng của cây cà chua đó kéo dài trong 9 tuần.

d) Vào thời điểm cây cà chua đó phát triển nhanh nhất thì chiều cao cây cà chua đạt 54,4 cm.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

a) Sai: Ta có: $\int (-0,1t^3 + t^2) dt = \int -0,1t^3 dt + \int t^2 dt = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + C.$

Do $h(t)$ là một nguyên hàm của $v(t)$ nên $h(t) = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + C$

Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm nên $h(0) = 5$ suy ra $C = 5.$

Vậy $h(t) = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + 5, t \geq 0.$

b) Đúng: Ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của $h(t) = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + 5$ với $t \in [0; 10].$

Ta có: $h'(t) = \frac{-t^3}{10} + t^2 = \frac{t^2}{10}(-t + 10)$ suy ra $h'(t) = 0$ khi t bằng 0 hoặc 10.

Ta thấy $h(0) = 5, h(10) = \frac{265}{3}$. Khi đó, $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{265}{3}$ trên đoạn $[0; 10].$



Vậy chiều cao tối đa của cây cà chua đó là $\frac{265}{3} \approx 88,3$ (cm).

c) Sai: Cây tăng trưởng khi $v(t) > 0 \Leftrightarrow -0,1t^3 + t^2 > 0 \Rightarrow t < 10$.

Vậy giai đoạn tăng trưởng của cây kéo dài 10 tuần.

d) Đúng: Ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của hàm số $v(t) = -0,1t^3 + t^2$ với $t \in [0; 10]$.

Ta có: $v'(t) = -0,3t^2 + 2t = -0,3t\left(t - \frac{20}{3}\right)$, suy ra $v'(t) = 0$ khi t bằng 0 hoặc $\frac{20}{3}$.

Ta thấy $v(0) = 0, v\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{400}{27}, v(10) = 0$.

Khi đó $v(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{400}{27}$ trên đoạn $[0; 10]$ tại $t = \frac{20}{3}$.

Ta có: $h\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{4405}{81} \approx 54,4$.

Câu 13: Một chiếc xe đang chuyển động đều với tốc độ $v_0 = 15 \text{ m/s}$ thì gặp chướng ngại vật rồi phanh gấp với gia tốc không đổi là $a = -3 \text{ m/s}^2$. Kí hiệu $v(t)$ là tốc độ của xe, $a(t)$ là gia tốc xe, $s(t)$ là quãng đường xe đi được cho đến thời điểm t giây kể từ lúc phanh xe.

a) $v(t) = a'(t)$.

b) $a(t) = s''(t)$.

c) Tính từ lúc phanh xe, sau 4 giây thì xe dừng hẳn.

d) Quãng đường xe đi được tính từ lúc phanh xe đến khi dừng hẳn nằm trong khoảng từ 35 mét đến 40 mét.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

a) Sai: $v(t) = \int a(t) dt$

b) Đúng: $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

c) Sai: $v(t) = \int a(t) dt = \int -3 dt = -3t + C$.

$v(0) = -3 \cdot 0 + C = 15 \Rightarrow C = 15$. Suy ra $v(t) = -3t + 15$.

Xe dừng hẳn khi $v(t) = 0 \Rightarrow -3t + 15 = 0 \Rightarrow t = 5$ giây.

d) Đúng: $s(t) = \int v(t) dt = \int -3t + 15 dt = -\frac{3}{2}t^2 + 15t + C$.

$s(0) = -\frac{3}{2} \cdot 0^2 + 15 \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow s(5) = 37,5$ mét.

Câu 14: Trong thí nghiệm nuôi cấy một loại vi sinh vật, kí hiệu $f(t)$ là tổng số lượng vi sinh vật sau t giờ. Biết rằng sau 3 giờ đầu tiên thì tổng số lượng vi sinh vật là 50 con. Trong 7 giờ tiếp theo, số lượng vi sinh vật thay đổi với tốc độ $f'(t) = t^2 - 8t$.

a) Họ nguyên hàm của $f'(t)$ là $\frac{t^3}{3} - 8t^2 + C$ ($C \in \mathbb{R}$).

b) Số lượng vi khuẩn tăng liên tục trong khoảng từ 3 giờ đến 10 giờ sau thời điểm làm thí nghiệm.

c) Số lượng vi khuẩn là nhỏ nhất sau 8 giờ tính từ lúc bắt đầu làm thí nghiệm.

d) Sau 6 giờ thì số lượng vi khuẩn là 5 con.



Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) Sai: Ta có: $\int (t^2 - 8t) dt = \frac{t^3}{3} - 4t^2 + C$.

b) Sai: Ta có: $f'(t) > 0$ khi $8 < t < 10$ và $f'(t) < 0$ khi $3 < t < 8$.

Nên số lượng vi sinh vật giảm trong khoảng từ 3 giờ đến 8 giờ, sau đó tăng dần trong khoảng 8 giờ đến 10 giờ.

c) Đúng: Bảng biến thiên của $f(t)$:

t	3	8	10
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$			

d) Đúng: $f(t) = \frac{t^3}{3} - 4t^2 + C$. Do $f(3) = 50 \Rightarrow \frac{3^3}{3} - 4 \cdot 3^2 + C = 50 \Rightarrow C = 77$.

Suy ra $f(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 77 \Rightarrow f(6) = 5$.

Câu 15: Đối với các dự án xây dựng, chi phí nhân công lao động được tính theo số ngày công. Gọi $m(t)$ là số lượng công nhân được sử dụng ở ngày thứ t . Gọi $M(t)$ là số ngày công được tính đến hết ngày thứ t . Trong kinh tế xây dựng, người ta đã biết rằng $M'(t) = m(t)$. Một công trình xây dựng dự kiến hoàn thành trong 400 ngày. Số lượng công nhân được sử dụng cho bởi hàm số $m(t) = 800 - 2t$, trong đó t tính theo ngày ($0 \leq t \leq 400$), $m(t)$ tính theo người.

Đơn giá cho một ngày công lao động là 400000 đồng.

a) $M(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $m(t) = 800 - 2t$.

b) $M(t) = 800t - t^2 + C$ với $0 \leq t \leq 400$ và C là một hằng số.

c) Số ngày công được tính đến hết ngày thứ 400 là 160000.

d) Chi phí nhân công lao động của công trình đó là 6400000000 đồng.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

Vì $M'(t) = m(t)$ nên ta có $M(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $m(t) = 800 - 2t$.

Do $\int (800 - 2t) dt = 800 \int dt - \int 2t dt = 800t - t^2 + C$

nên $M(t) = 800t - t^2 + C$ với $0 \leq t \leq 400$. Vì $M(0) = 0$ nên $C = 0$.

Vậy $M(t) = 800t - t^2$.

Số ngày công được tính đến hết ngày thứ 400 là:

$M(400) = 800 \cdot 400 - 400^2 = 160000$.

Chi phí nhân công lao động của công trình đó là:

$400000 \cdot 160000 = 64000000000$



Câu 16: Tại một khu di tích vào ngày lễ hội hàng năm, tốc độ thay đổi lượng khách tham quan được biểu diễn bằng hàm số $Q'(t) = 4t^3 - 72t^2 + 288t$, trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 13$), $Q'(t)$ tính bằng khách/giờ. Sau 2 giờ đã có 500 người có mặt.

- a) Lượng khách tham quan được biểu diễn bởi hàm số $Q(t) = t^4 - 24t^3 + 144t^2$.
 b) Sau 5 giờ lượng khách tham quan là 1325 người.
 c) Lượng khách tham quan lớn nhất là 1296 người.
 d) Tốc độ thay đổi lượng khách tham quan lớn nhất tại thời điểm $t = 6$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
--------	---------	--------	--------

- Ta có: $Q(t) = \int Q'(t)dt = \int (4t^3 - 72t^2 + 288t)dt = t^4 - 24t^3 + 144t^2 + C$.

Mà sau 2 giờ đã có 500 người nên ta có $Q(2) = 500$ suy ra $C = 100$.

Vậy $Q(t) = t^4 - 24t^3 + 144t^2 + 100$.

- Lượng khách tham quan sau 5 giờ là $Q(5) = 1325$ người.

- Ta tìm GTLN của hàm số $Q(t)$ trên đoạn $[0;13]$.

Ta có $Q'(t) = 0$ khi $t = 0, t = 6$ và $t = 12$. Mà $Q(0) = 100, Q(6) = 1396, Q(12) = 100, Q(13) = 269$.
 . Nên lượng khách tham quan lớn nhất là 1396 người.

- Ta khảo sát hàm số $Q'(t) = 4t^3 - 72t^2 + 288t$ trên đoạn $[0;13]$.

Ta có $Q''(t) = 0 \Leftrightarrow 12t^2 - 144t + 288 = 0 \Leftrightarrow t = 6 - 2\sqrt{3}$ hoặc $t = 6 + 2\sqrt{3}$.

$Q''(t) = 0 \Leftrightarrow 12t^2 - 144t + 288 = 0 \Leftrightarrow t = 6 - 2\sqrt{3} \vee t = 6 + 2\sqrt{3}$.

Bảng biến thiên của hàm số $Q'(t)$ như sau:

t	0	$6-2\sqrt{3}$	$6+2\sqrt{3}$	13	
$Q''(t)$	+	0	-	0	+
$Q'(t)$	0	$Q'(6-2\sqrt{3})$	$Q'(6+2\sqrt{3})$	364	

Với $Q'(6 - 2\sqrt{3}) \approx 332,6$ và $Q'(6 + 2\sqrt{3}) \approx -332,6$.

Vậy tốc độ thay đổi lượng khách tham quan lớn nhất tại thời điểm $t = 13$.

Câu 17: Một xe ô tô đang chạy với tốc độ 72 km/h thì người lái xe bất ngờ phát hiện chướng ngại vật trên đường cách đó 50 m . Người lái xe phản ứng một giây, sau đó đạp phanh khẩn cấp. Kể từ thời điểm này, ô tô chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t) = -10t + 20 \text{ (m/s)}$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong t kể từ lúc đạp phanh.

- a) Quãng đường $s(t)$ mà xe ô tô đi được trong thời gian t là một nguyên hàm của hàm số $v(t)$.
 b) $s(t) = -5t^2 + 20t$.
 c) Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi xe ô tô dừng hẳn là 20 giây.
 d) Xe ô tô đó không va vào chướng ngại vật ở trên đường.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------



- Do $s'(t) = v(t)$ nên quãng đường $s(t)$ mà xe ô tô đi được trong thời gian t là một nguyên hàm của hàm số $v(t)$. Ta có: $\int (-10t + 20)dt = -5t^2 + 20t + C$ với C là hằng số. Khi đó, ta gọi hàm số $s(t) = -5t^2 + 20t + C$.

- Do $s(0) = 0$ nên $C = 0$. Suy ra $s(t) = -5t^2 + 20t$.

- Xe ô tô dừng hẳn khi $v(t) = 0$ hay $-10t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 2$. Vậy thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi xe ô tô dừng hẳn là 2 giây.

- Ta có xe ô tô đang chạy với tốc độ $72 \text{ km/h} \approx 20 \text{ m/s}$.

Do đó, quãng đường xe ô tô còn di chuyển được kể từ lúc đạp phanh đến khi xe dừng hẳn là: $s(2) = -5 \cdot 2^2 + 20 \cdot 2 = 20 \text{ (m)}$.

Vậy quãng đường xe ô tô đã di chuyển kể từ lúc người lái xe phát hiện chướng ngại vật trên đường đến khi xe ô tô dừng hẳn là: $20 + 20 \approx 40 \text{ (m)}$.

Do $40 < 50$ nên xe ô tô đã dừng hẳn trước khi va chạm với chướng ngại vật trên đường.

Câu 18: Vào năm 2014, dân số nước ta khoảng 90,7 triệu người. Giả sử, dân số nước ta sau t năm được xác định bởi hàm số $S(t)$, trong đó tốc độ gia tăng dân số được cho bởi $S'(t) = 1,2698e^{0,014t}$, với t là số năm kể từ năm 2014, $S'(t)$ tính bằng triệu người/năm.

a) $S(t)$ là một nguyên hàm của $S'(t)$.

b) $S(t) = 90,7e^{0,014t} + 90,7$.

c) Theo công thức trên, tốc độ tăng dân số nước ta năm 2034 khoảng 1,7 triệu người/năm.

d) Theo công thức trên, dân số nước ta năm 2034 là khoảng 120 triệu người.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

Ta có $S(t)$ là một nguyên hàm của $S'(t)$ và

$$\begin{aligned} \int S'(t)dt &= \int 1,2698e^{0,014t} dt = 1,2698 \int (e^{0,014})^t dt \\ &= \frac{1,2698e^{0,014t}}{0,014} = 90,7e^{0,014t} + C. \end{aligned}$$

Vì $S(0) = 90,7$ nên $C = 0$. Suy ra $S(t) = 90,7e^{0,014t}$.

Tốc độ tăng dân số ở nước ta năm 2034 là:

$$S'(20) = 1,2698e^{0,014 \cdot 20} \approx 1,7$$

Dân số nước ta năm 2034 là: $S(20) = 90,7e^{0,014 \cdot 20} \approx 120$.

Câu 19: Tại một lễ hội dân gian, tốc độ thay đổi lượng khách tham dự được biểu diễn bằng hàm số $B'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t$, trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 15$), $B'(t)$ tính bằng khách/giờ. Biết sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội.

a) Công thức của hàm số $B(t)$ biểu diễn số lượng khách tham dự lễ hội với $0 \leq t \leq 15$ là $B(t) = 5t^4 - 100t^3 + 500t^2 + 95$

b) Sau 3 giờ sẽ có 2310 khách tham dự lễ hội

c) Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là 28220 khách sau 15 giờ.

d) Tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất tại thời điểm 15 giờ.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

a) Ta có $B(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $B'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t$.



Do $\int (20t^3 - 300t^2 + 1000t) dt = 5 \int 4t^3 dt - 100 \int 3t^2 dt + 500 \int 2t dt = 5t^4 - 100t^3 + 500t^2 + C$

nên $B(t) = 5t^4 - 100t^3 + 500t^2 + C$.

Vì sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội nên $B(1) = 405 + C = 500$.

Suy ra $C = 95$. Vậy $B(t) = 5t^4 - 100t^3 + 500t^2 + 95$ với $0 \leq t \leq 15$.

b) Số khách tham dự lễ hội sau 3 giờ là:

$$B(3) = 5 \cdot 3^4 - 100 \cdot 3^3 + 500 \cdot 3^2 + 95 = 2300 \text{ (khách)}.$$

c) Ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số $B(t)$ trên đoạn $[0;15]$. Ta có:

$B'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t = 20t(t^2 - 15t + 50) = 20t(t-5)(t-10)$. Suy ra $B'(t) = 0$ khi t bằng 0,5 hoặc 10.

Ta có: $B(0) = 95, B(5) = 3220, B(10) = 95, B(15) = 28220$.

Khi đó, giá trị lớn nhất của hàm số $B(t)$ trên đoạn $[0;15]$ bằng 28220 tại $t = 15$.

Vậy số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là 28220 khách sau 15 giờ.

d) Ta tìm t để hàm số $B'(t)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;15]$. Ta có:

$$B''(t) = 60t^2 - 600t + 1000. \text{ Suy ra } B''(t) = 0 \text{ khi } t \text{ bằng } \frac{15-5\sqrt{3}}{3} \text{ hoặc } \frac{15+5\sqrt{3}}{3}.$$

Ta có: $B'(0) = 0; B'\left(\frac{15-5\sqrt{3}}{3}\right) \approx 962,25; B'\left(\frac{15+5\sqrt{3}}{3}\right) \approx -962,25; B'(15) = 15000$.

Khi đó, giá trị lớn nhất của hàm số $B'(t)$ trên đoạn $[0;15]$ bằng 15000 tại $t = 15$. Vậy tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất tại thời điểm 15 giờ.

Câu 20: Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số $v(t) = -0,1t^3 + t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng centimét/tuần. Gọi $h(t)$ là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t .

a) Công thức xác định hàm số $h(t), (t \geq 0)$ là $h(t) = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + 5, t \geq 0$

b) Giai đoạn tăng trưởng của cây kéo dài 10 tuần.

c) Chiều cao tối đa của cây cà chua đó là $\frac{265}{3}$.

d) Thời điểm cây cà chua đó phát triển nhanh nhất thì cây cà chua cao 52cm.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
----------------	----------------	----------------	---------------

a) Ta có: $\int (-0,1t^3 + t^2) dt = \int -0,1t^3 dt + \int t^2 dt = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + C$.

Do $h(t)$ là một nguyên hàm của $v(t)$ nên $h(t) = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + C$

Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm nên $h(0) = 5$, suy ra $C = 5$.

Vậy $h(t) = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + 5, t \geq 0$.

b) Cây tăng trưởng khi $v(t) > 0$. Xét bất phương trình $-0,1t^3 + t^2 > 0$.

Ta có: $t^2(-0,1t + 1) > 0$, suy ra $-0,1t + 1 > 0$ nên $t < 10$.

Vậy giai đoạn tăng trưởng của cây kéo dài 10 tuần.



c) Ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của $h(t) = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + 5$ với $t \in [0;10]$.

Ta có: $h'(t) = \frac{-t^3}{10} + t^2 = \frac{t^2}{10}(-t+10)$, suy ra $h'(t) = 0$ khi t bằng 0 hoặc 10.

Ta thấy $h(0) = 5, h(10) = \frac{265}{3}$. Khi đó, $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{265}{3}$ trên đoạn $[0;10]$.

Vậy chiều cao tối đa của cây cà chua đó là $\frac{265}{3} \approx 88,3$.

d) Ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của hàm số $v(t) = -0,1t^3 + t^2$ với $t \in [0;10]$.

Ta có: $v'(t) = -0,3t^2 + 2t = -0,3t\left(t - \frac{20}{3}\right)$, suy ra $v'(t) = 0$ khi t bằng 0 hoặc $\frac{20}{3}$.

Ta thấy $v(0) = 0, v\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{400}{27}, v(10) = 0$. Khi đó, $v(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{400}{27}$ trên đoạn

$[0;10]$ tại $t = \frac{20}{3}$. Ta có: $h\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{4405}{81} \approx 54,4$.

Vậy vào thời điểm cây cà chua đó phát triển nhanh nhất thì cây cà chua cao $54,4\text{cm}$.

Câu 21: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t) = 4\cos t \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tại thời điểm bắt đầu chuyển động vật có vận tốc bằng 0.

a) Vận tốc của vật được biểu diễn bởi hàm số $v(t) = 4\cos t \text{ (m/s)}$.

b) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}$ là 2 (m/s)

c) Tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4} \text{ (s)}$ sau khi xuất phát thì vận tốc của vật là $\sqrt{2} \text{ (m/s)}$

d) Gia tốc của vật tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4} \text{ (s)}$ là $2\sqrt{2} \text{ (m/s}^2\text{)}$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) Sai: Ta có $v(t) = \int a(t)dt = \int 4\cos t dt = 4\sin t + C$. Mà tại thời điểm bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc bằng 0 nên ta có $v(0) = 0$ hay $C = 0$.

Vậy $v(t) = 4\sin t$.

b) Đúng: Vận tốc của vật tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}$ là $v\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4\sin \frac{\pi}{6} = 2 \text{ (m/s)}$.

c) Sai: Vận tốc của vật tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4}$ là $v\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\sin \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} \text{ (m/s)}$

d) Đúng: Gia tốc của vật tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4} \text{ (s)}$ là: $a\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\cos \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} \text{ (m/s}^2\text{)}$

Câu 22: Một chiếc xe đang chuyển động đều với tốc độ $v_0 = 15\text{m/s}$ thì gặp chướng ngại vật rồi phanh gấp với gia tốc không đổi là $a = -3\text{m/s}^2$. Kí hiệu $v(t)$ là tốc độ của xe, $a(t)$ là gia tốc xe, $s(t)$ là quãng đường xe đi được cho đến thời điểm t giây kể từ lúc phanh xe.

a) $v(t) = a'(t)$.



- b) $a(t) = s''(t)$.
- c) Tính từ lúc phanh xe, sau 4 giây thì xe dừng hẳn.
- d) Quãng đường xe đi được tính từ lúc phanh xe đến khi dừng hẳn nằm trong khoảng từ 35 mét đến 40 mét.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

a) Sai: $v(t) = \int a(t) dt$

b) Đúng: $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

c) Sai: $v(t) = \int a(t) dt = \int -3 dt = -3t + C$.

$v(0) = -3.0 + C = 15 \Rightarrow C = 15$. Suy ra $v(t) = -3t + 15$.

Xe dừng hẳn khi $v(t) = 0 \Rightarrow -3t + 15 = 0 \Rightarrow t = 5$ giây.

d) Đúng: $s(t) = \int v(t) dt = \int -3t + 15 dt = -\frac{3}{2}t^2 + 15t + C$.

$s(0) = -\frac{3}{2}0^2 + 15.0 + C = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow s(5) = 37,5$ mét.

Câu 23: Một quả cầu lông được đánh lên từ độ cao $2,2m$ với vận tốc được tính bởi công thức sau đây $v(t) = -0,8t + 4,16 (m/s)$.

a) Công thức tính độ cao của quả cầu theo t là $h(t) = -0,4t^2 + 4,16t + 2,2(m)$.

b) Quả cầu đạt độ cao cao nhất tại thời điểm $t = 5,2(s)$.

c) Độ cao cao nhất của quả cầu bằng $13,016(m)$.

d) Thời điểm quả cầu chạm đất là $t = 10,5(s)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
----------------	----------------	----------------	---------------

a) Đúng: $h(t) = \int v(t) dt = \int (-0,8t + 4,16) dt = -0,4t^2 + 4,16t + C$.

Mà $h(0) = 2,2$ nên $C = 2,2$ nên $h(t) = -0,4t^2 + 4,16t + 2,2(m)$.

b) Đúng: Quả cầu đạt độ cao cao nhất tại thời điểm $t = -\frac{4,16}{2.(-0,4)} = 5,2(s)$.

c) Đúng: Độ cao cao nhất của quả cầu bằng $h(5,2) = 13,016(m)$.

d) Sai: Quả cầu chạm đất khi $h(t) = 0 \Leftrightarrow -0,4t^2 + 4,16t + 2,2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 10,9 \\ t \approx -0,5 \end{cases}$.

Vì $t > 0$ nên chọn $t \approx 10,9(s)$.

Câu 24: Cây KEO LAI là một trong các loài cây không chỉ là nguyên liệu giấy quan trọng mà còn là loài cây cung cấp gỗ nguyên liệu cho các ngành khác như chế biến ván nhân tạo, chế biến đồ mộc xuất khẩu, gỗ bao bì, gỗ xây dựng. Cây phát triển với tốc độ nhanh. Kí hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao $8m$. Trong 10 năm tiếp theo

cây phát triển với tốc độ $h'(x) = \frac{9}{x}$.

a) Biểu thức của $h(x)$ là: $h(x) = 9\ln(x) + C$.



- b) Sau 3 năm cây cao $20m$.
 c) Tốc độ phát triển của cây trong 10 năm đầu sẽ giảm dần.
 d). Người ta thường thu hoạch cây KEO LAI khi nó có độ cao trong khoảng từ 26 đến 28 mét.
 Vậy đó là 8 hoặc 9 năm sau khi trồng.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

a) Đúng: $h'(x) = \frac{9}{x} \Rightarrow h(x) = \int \frac{9}{x} dx = 9\ln|x| + C = 9\ln(x) + C$

b) Sai: Vì sau năm đầu tiên cây cao $8m$ nên $h(1) = 8 \Rightarrow 9\ln(1) + C = 8 \Rightarrow C = 8$

$\Rightarrow h(x) = 9\ln(x) + 8 \Rightarrow h(3) = 9\ln(3) + 8 \approx 17,89(m)$. Vậy sau 3 năm cây cao khoảng $17,89m$.

c) Đúng: Ta có tốc độ phát triển của cây là hàm số $h'(x) = \frac{9}{x} \Rightarrow h''(x) = \frac{-9}{x^2} < 0$ nên $h'(x)$ là hàm nghịch biến. Do đó tốc độ phát triển của cây sẽ giảm dần trong 10 năm đầu.

d) Đúng: Ta có $26 \leq h(x) \leq 28 \Rightarrow 26 \leq 9\ln(x) + 8 \leq 28 \Rightarrow 7,39 \leq x \leq 9,23$

Vậy sau 8 hoặc 9 năm sau khi trồng.

Câu 25: Một quả bóng được ném lên từ độ cao $24,5$ m với vận tốc được tính theo công thức $v(t) = -9,8t + 19,6$ (m/s).

a) Gọi $h(t)$ là độ cao của quả bóng tại thời điểm t thì $h(t)$ là một nguyên hàm của $v(t)$.

b) Công thức tính độ cao quả bóng theo thời gian t là $h(t) = -4,9t^2 + 19,6t + C$ với $C \in \mathbb{R}$.

c) Khi quả bóng chạm đất thì $v(t) = 0$.

d) Sau 5 giây kể từ khi được ném lên thì quả bóng chạm đất.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
----------------	----------------	---------------	----------------

a) Đúng. Gọi $h(t)$ là độ cao của quả bóng tại thời điểm t thì $h(t)$ là một nguyên hàm của $v(t)$.

b) Đúng. Ta có $\int v(t)dt = \int (-9,8t + 19,6)dt = -4,9t^2 + 19,6t + C$.

Do đó $h(t) = -4,9t^2 + 19,6t + C$.

Mà quả bóng được ném lên từ độ cao $24,5$ m tức là tại thời điểm $t = 0$ thì $h(t) = 24,5$ nên $h(0) = 24,5 \Leftrightarrow C = 24,5$.

Vậy công thức tính độ cao $h(t)$ của quả bóng theo thời gian t là:

$h(t) = -4,9t^2 + 19,6t + 24,5$ (m).

c) Sai. Khi quả bóng chạm đất thì $h(t) = 0$.

d) Đúng. Ta có

$$-4,9t^2 + 19,6t + 24,5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 5. \end{cases}$$

Mà $t > 0$ nên $t = 5$.

Vậy sau 5 giây kể từ khi được ném lên thì quả bóng chạm đất.

Câu 26: Tại một lễ hội dân gian, tốc độ thay đổi lượng khách tham dự được biểu diễn bằng hàm số $A'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t$ ($0 \leq t \leq 15$) trong đó t tính bằng giờ và $A'(t)$ tính bằng khách/ giờ. Sau một giờ, 500 người có mặt tại lễ hội.



- a) Công thức biểu diễn số lượng khách tham dự lễ hội là
 $A(t) = 5t^4 - 100t^3 + 500t^2 + 95 \quad (0 \leq t \leq 15)$.
- b) Sau 3 giờ số lượng khách tham dự là 2205 người.
- c) Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là 28220 người.
- d) Tại thời điểm $t = 2$ giờ thì tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng: Ta có $A(t) = \int A'(t) dt = \int (20t^3 - 300t^2 + 1000t) dt = 5t^4 - 100t^3 + 500t^2 + C$

Mà $F(1) = 500 \Rightarrow C = 95$.

b) Sai: Sau 3 giờ số lượng khách tham dự là $A(3) = 2300$ người.

c) Đúng: Ta có $A'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 5; t = 10 \in [1; 15]$

$A(1) = 500; A(5) = 3220; A(10) = 95; A(15) = 28220$

Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là 28220 người.

d) Sai: Ta có $A''(t) = 60t^2 - 600t + 1000 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{15 \pm 5\sqrt{3}}{3} \in [1; 15]$

$A'(1) = 720; A'(15) = 15000; A'\left(\frac{15+5\sqrt{3}}{3}\right) = -962,25; A'\left(\frac{15-5\sqrt{3}}{3}\right) = 962,25$

Tại thời điểm $t = 15$ giờ thì tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất.

