



NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. TÍCH PHÂN



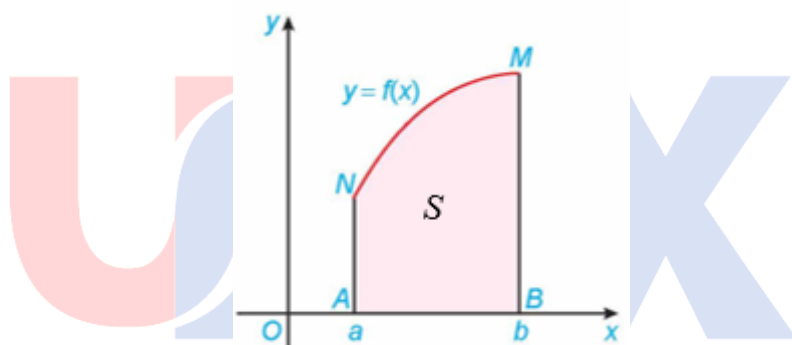
LÝ THUYẾT.

1) KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN

a) Diện tích hình thang cong:

Định lý 1:

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$, thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là $S = F(b) - F(a)$, trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.



b) Định nghĩa tích phân: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ thì hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân của hàm số $f(x)$ từ a đến b và kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

Ta gọi: a là cận dưới, b là cận trên, f là hàm số dưới dấu tích phân, $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân, x biến số lấy tích phân.

Chú ý:

a) Hiệu số $F(b) - F(a)$ còn được kí hiệu là $F(x)|_a^b$. Khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

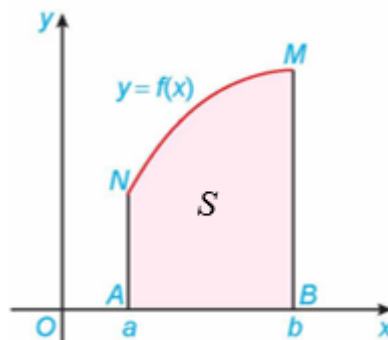
b) Nếu $a < b$ thì ta gọi $\int_a^b f(x)dx$ là tích phân của f trên đoạn $[a; b]$.

c) Trong trường hợp $a = b$ hoặc $a > b$ ta quy ước: $\int_a^a f(x)dx = 0$; $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$



d) Tích phân **không phụ thuộc và cách kí hiệu biến** (điều này sẽ mang lại lợi ích cho ta để tính một số tích phân đặc biệt), tức là $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots = F(b) - F(a)$.

Ý nghĩa hình học của tích phân:



Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng

$$x = a, x = b. \text{ Vậy } S = \int_a^b f(x)dx$$

2. TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên $[a; b]$. Khi đó ta có:

$$1) \int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

$$2) \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$3) \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

$$4) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (a < c < b) \quad (\text{chèn cận } c)$$

Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ được định nghĩa là

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN

Câu 1: Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^3 3x^2 dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$

c) $\int_1^{e^2} \frac{1}{u} du$

Lời giải

a) $\int_0^3 3x^2 dx = x^3 \Big|_0^3 = 3^3 - 0^3 = 27$



$$b) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos 0\right) = \frac{1}{2}$$

$$c) \int_1^{e^2} \frac{1}{u} du = \ln |u| \Big|_1^{e^2} = \ln e^2 - \ln 1 = 2$$

Câu 2: Tính các tích phân sau:

$$a) I = \int_0^1 3x^2 dx \quad b) I = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad c) I = \int_0^{\ln 2} 2^x dx \quad d) I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$$

Lời giải

$$a) I = \int_0^1 3x^2 dx = x^3 \Big|_0^1 = 1 - 0 = 1.$$

$$b) I = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_1^4 = 2(2 - 1) = 2.$$

$$c) I = \int_0^1 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^1 = \frac{1}{\ln 2} (2^1 - 2^0) = \frac{1}{\ln 2}.$$

$$d) I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 3: Tính các tích phân sau:

$$a) \int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \quad b) \int_1^2 \frac{1}{x} dx \quad c) \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \quad d) \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx \quad e) \int_1^2 \frac{1}{3x^2} dx$$

Lời giải

$$a) \int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} \Big|_1^2 = \sqrt{2} - 1$$

$$b) \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln |x| \Big|_1^2 = \ln 2$$

$$c) \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \int_1^2 x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_1^2 = -\frac{1}{x} \Big|_1^2 = \frac{1}{2}$$

$$d) \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx = \int_1^2 x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{2}{2}}}{\frac{2}{2}} \Big|_1^2 = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{2}} \Big|_1^2 = \frac{3}{2} (2^{\frac{2}{2}} - 1)$$

$$e) \int_1^2 \frac{1}{3x^2} dx = \frac{1}{3} \int_1^2 x^{-2} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_1^2 = -\frac{1}{3x} \Big|_1^2 = \frac{1}{6}$$

Câu 4: Tính các tích phân sau:

$$a) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x} dx \quad b) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx \quad c) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx \quad d) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (2\cos x + 1) dx \quad e) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (2\sin x - 3) dx$$

Lời giải



$$a) \int_{\frac{\rho}{4}}^{\frac{\rho}{3}} \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x \Big|_{\frac{\rho}{4}}^{\frac{\rho}{3}} = -\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$b) \int_{\frac{\rho}{4}}^{\frac{\rho}{3}} \cos x dx = \sin x \Big|_{\frac{\rho}{4}}^{\frac{\rho}{3}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$$

$$c) \int_{\frac{\rho}{4}}^{\frac{\rho}{3}} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\frac{\rho}{4}}^{\frac{\rho}{3}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$

$$d) \int_{\frac{\rho}{4}}^{\frac{\rho}{3}} (2\cos x + 1) dx = 2 \int_{\frac{\rho}{4}}^{\frac{\rho}{3}} \cos x dx + \int_{\frac{\rho}{4}}^{\frac{\rho}{3}} 1 dx = 2 \sin x \Big|_{\frac{\rho}{4}}^{\frac{\rho}{3}} + x \Big|_{\frac{\rho}{4}}^{\frac{\rho}{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{2} + \frac{\rho}{12}$$

$$e) \int_{\frac{\rho}{4}}^{\frac{\rho}{3}} (2\sin x - 3) dx = 2 \int_{\frac{\rho}{4}}^{\frac{\rho}{3}} \sin x dx - \int_{\frac{\rho}{4}}^{\frac{\rho}{3}} 3 dx = -2 \cos x \Big|_{\frac{\rho}{4}}^{\frac{\rho}{3}} - 3x \Big|_{\frac{\rho}{4}}^{\frac{\rho}{3}} = \sqrt{2} - 1 - \frac{\rho}{4}$$

Câu 5: Cho tích phân $I = \int_1^3 \frac{1}{2 \cdot 3^{-x+3}} dx = \frac{4}{a \ln 3}$. Tính giá trị của $a + 20$.

Lời giải

$$\text{Ta có } I = \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{1}{3^{-x} \cdot 3^3} dx = \frac{1}{54} \int_1^3 3^x dx = \frac{1}{54} \cdot \frac{3^x}{\ln 3} \Big|_1^3 = \frac{1}{54} \cdot \frac{3^3 - 3^1}{\ln 3} = \frac{4}{9 \ln 3}$$

Do đó $a = 9$. Suy ra $a + 20 = 29$.

Câu 6: Tính tích phân $\int_4^9 \frac{5}{3\sqrt{x}} dx$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_4^9 \frac{5}{3\sqrt{x}} dx = \frac{10}{3} \int_4^9 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{10}{3} \sqrt{x} \Big|_4^9 = \frac{10}{3} (3 - 2) = \frac{10}{3}.$$

Câu 7: Cho tích phân $\int_4^9 f(x) dx = 7, \int_4^9 g(x) dx = 10$. Tính $\int_4^9 [f(x) + g(x)] dx$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_4^9 [f(x) + g(x)] dx = \int_4^9 f(x) dx + \int_4^9 g(x) dx = 7 + 10 = 17.$$

Câu 8: Tính tích phân $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2e^x + \sin x) dx$.

Lời giải

Ta có



$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2e^x + \sin x) dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2e^x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\ &= 2e^x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \cos x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2e^{\frac{\pi}{2}} - 2e^{\frac{\pi}{4}} - \left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 2e^{\frac{\pi}{2}} - 2e^{\frac{\pi}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Câu 9: Cho tích phân $\int_{-3}^5 f(x) dx = -2$, $\int_{-3}^5 g(x) dx = 8$. Tính $\int_{-3}^5 [f(x) - g(x)] dx$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int_{-3}^5 [f(x) - g(x)] dx = \int_{-3}^5 f(x) dx - \int_{-3}^5 g(x) dx = -2 - 8 = -10.$$

Câu 10: Cho $\int_1^2 f(x) dx = 3$ và $\int_2^3 f(x) dx = -\frac{1}{2}$. Tính $\int_1^3 f(x) dx$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = 3 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}.$$

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{khi } x \geq 1 \\ x+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tính phân $I = \int_0^2 x^2 f(x) dx$.

Lời giải

$$\text{Ta có } I = \int_0^2 x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 (x+1) dx + \int_1^2 x^2 \cdot \frac{2}{x} dx = \frac{43}{12}.$$

Câu 12: Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x$. Tính $F(2\ln 2) - F(\ln 2)$.

Lời giải

Vì hàm số $f(x) = e^x$ liên tục trên đoạn $[\ln 2; 2\ln 2]$ nên ta có:

$$F(\ln 4) - F(\ln 2) = \int_{\ln 2}^{\ln 4} f(x) dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} e^x dx = e^x \Big|_{\ln 2}^{\ln 4} = 2.$$

Câu 13: Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ thỏa điều kiện $F(1) = 2$. Tính $F(e)$.

Lời giải

Vì hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ liên tục trên đoạn $[1; e]$ nên ta có:

$$F(e) - F(1) = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln |x| \Big|_1^e = 1.$$

$$\text{Suy ra: } F(e) = 1 + F(1) = 1 + 2 = 3.$$



Câu 14: Chứng minh $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Từ đó tính

tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.

Lời giải

Ta có:

$$F'(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})'}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = f(x).$$

Do đó:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \Big|_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

DẠNG 2: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT TÍCH PHÂN

Câu 15: Tính các tích phân sau:

$$I = \int_0^1 (4x^3 - e^x) dx$$

$$b) I = \int_1^2 \left(3^x - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$c) I = \int_0^\pi (\sin x + 2 \cos x) dx$$

Lời giải

$$a) I = \int_0^1 (4x^3 - e^x) dx = x^4 \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = 1 - (e - 1) = 2 - e.$$

$$b) I = \int_1^2 \left(3^x - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{3^x}{\ln 3} \Big|_1^2 - \ln|x| \Big|_1^2 = \frac{1}{\ln 3} (9 - 3) - \ln 2 = \frac{6}{\ln 3} - \ln 2.$$

$$c) I = \int_0^\pi (\sin x + 2 \cos x) dx = -\cos x \Big|_0^\pi + 2 \sin x \Big|_0^\pi = 2.$$

Câu 16: Tính $I = \int_1^2 e^x \ln x dx + \int_1^2 e^t (1 - \ln t) dt$.

Lời giải

$$I = \int_1^2 e^x \ln x dx + \int_1^2 e^x (1 - \ln x) dx = \int_1^2 e^x dx = e^2 - e.$$

DẠNG 3: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CHÈN CẬN ĐỂ TÍNH TÍCH PHÂN

Tích phân của hàm chứa dấu trị tuyệt đối

a) **Yêu cầu:** Tính tích phân $I = \int_a^b |f(x)| dx$

b) **Phương pháp:**

+ Bước 1: Xét dấu của $f(x)$ trên khoảng $(a; b)$

- Giải phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_i \in (a; b)$

- Lập bảng xét dấu của $f(x)$ trên khoảng $(a; b)$

+ Bước 2: Chèn cận x_i và đồng thời bỏ dấu $| |$ (căn cứ vào BXD) ta được các tích phân cơ bản

$$I = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^{x_i} |f(x)| dx + \int_{x_i}^b |f(x)| dx$$



Chú ý: Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a; b]$ thì $I = \int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$

Câu 17: Tính các tích phân:

a) $I = \int_0^2 |x-1| dx$ b) $I = \int_0^3 |x^2 - x| dx$ c) $\int_{-4}^2 |x^2 + 2x - 3| dx$ d) $\int_{-2}^2 |2x - |x+1|| dx$

Lời giải

a) $I = \int_0^2 |x-1| dx = \int_0^1 |x-1| dx + \int_1^2 |x-1| dx = -\int_0^1 (x-1) dx + \int_1^2 (x-1) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

b) Xét trên khoảng $(0; 3)$ ta có: $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$.

BXD:

x	0	1	3
$x^2 - x$	-	0	+

Suy ra:

$$I = -\int_0^1 (x^2 - x) dx + \int_1^3 (x^2 - x) dx = \frac{1}{6} + \frac{14}{3} = \frac{29}{6}.$$

c) Xét trên khoảng $(-2; 2)$ ta có: $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=1 \end{cases}$.

BXD:

x	-4	-3	1	2	
x^2+2x-3	+	0	-	0	+

Suy ra:

$$I = \int_{-4}^{-3} (x^2 + 2x - 3) dx - \int_{-3}^1 (x^2 + 2x - 3) dx + \int_1^2 (x^2 + 2x - 3) dx = \frac{7}{3} + \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = \frac{46}{3}.$$

d) Xét trên khoảng $(-2; 2)$ ta có: $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

BXD:

x	-2	-1	2
$x+1$	-	0	+

Suy ra:

$$I = \int_{-2}^1 |2x + x + 1| dx + \int_1^2 |2x - x - 1| dx = \int_{-2}^1 |3x + 1| dx + \int_1^2 |x - 1| dx = I_1 + I_2$$

Ta có:

$$I_1 = \int_{-2}^1 |3x+1| dx = -\int_{-2}^{-\frac{1}{3}} (3x+1) dx + \int_{-\frac{1}{3}}^1 (3x+1) dx = \frac{41}{6}.$$

$$I_2 = \int_1^2 |x-1| dx = \int_1^2 (x-1) dx = \frac{1}{2}.$$

Vậy: $I = \frac{41}{6} + \frac{1}{2} = \frac{22}{3}.$

Câu 18: Tính các tích phân



$$1) I = \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx. \quad 2) \int_0^4 |x^2 - 9| dx \quad 3) \int_1^4 |x^2 - 2x - 3| dx \quad 4) \int_{-2}^0 |x^2 - 4x - 5| dx$$

Lời giải

$$1) I = \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx.$$

Ta có: $f(x) = x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = -1; x = 1 \Rightarrow f(x) \geq 0 \forall x \in [-3; -1] \cup [1; 3]; f(x) \leq 0, \forall x \in [-1; 1]$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_{-3}^{-1} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx + \int_1^3 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 - x \right) \Big|_{-3}^{-1} + \left(x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{1}{3} x^3 - x \right) \Big|_1^3 \\ &= \frac{20}{3} + \frac{4}{3} + \frac{16}{3} = \frac{40}{3}. \end{aligned}$$

$$2) \int_0^4 |x^2 - 9| dx$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \int_0^4 |x^2 - 9| dx &= \int_0^3 |x^2 - 9| dx + \int_3^4 |x^2 - 9| dx \\ &= \int_0^3 (-x^2 + 9) dx + \int_3^4 (x^2 - 9) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 9x \right) \Big|_0^3 + \left(\frac{x^3}{3} - 9x \right) \Big|_3^4 = \frac{64}{3} \end{aligned}$$

$$3) \int_1^4 |x^2 - 2x - 3| dx$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \int_1^4 |x^2 - 2x - 3| dx &= \int_1^3 |x^2 - 2x - 3| dx + \int_3^4 |x^2 - 2x - 3| dx \\ &= \int_1^3 (-x^2 + 2x + 3) dx + \int_3^4 (x^2 - 2x - 3) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \Big|_1^3 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right) \Big|_3^4 = \frac{23}{3} \end{aligned}$$

$$4) \int_{-2}^0 |x^2 - 4x - 5| dx$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \int_{-2}^0 |x^2 - 4x - 5| dx &= \int_{-2}^{-1} |x^2 - 4x - 5| dx + \int_{-1}^0 |x^2 - 4x - 5| dx \\ &= \int_{-2}^{-1} (x^2 - 4x - 5) dx + \int_{-1}^0 (-x^2 + 4x + 5) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x \right) \Big|_{-2}^{-1} + \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x \right) \Big|_{-1}^0 = 2 \end{aligned}$$

Câu 19: Tính tích phân sau $\int_0^{\pi} |\cos x| dx$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int_0^{\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x| dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos x| dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\sin x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2$$



Câu 20: Tính tích phân sau $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |2 \sin x - 1| dx$

Lời giải

Ta có:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |2 \sin x - 1| dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} |2 \sin x - 1| dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} |2 \sin x - 1| dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (-2 \sin x + 1) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x - 1) dx = (2 \cos x + x) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + (-2 \cos x - x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{3} - 2 - \frac{\pi}{6}$$

Câu 21: Tính tích phân sau $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |2 \cos x - 1| dx$

Lời giải

Ta có:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |2 \cos x - 1| dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} |2 \cos x - 1| dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} |2 \cos x - 1| dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 \cos x - 1) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (-2 \cos x + 1) dx = (2 \sin x - x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + (-2 \sin x + x) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{3} - 2 - \frac{\pi}{6}$$

Câu 22: Tính $I = \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$.

Lời giải

$$I = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} dx = \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = 1 + 1 = 2.$$

Câu 23: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - \sin 2x}{2}} dx$.

Lời giải

Ta có:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right| dx.$$

Xét trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có: $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

BXD:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	-	0	+

Suy ra:



$$I = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 - \sqrt{2}.$$

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Biết hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Tính $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$.

Lời giải

Ta có:

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} (2x-1)^3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2^x - 1 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$. Biết hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Tính $I = \int_{-2}^3 f(x) dx$.

Lời giải

Ta có:

$$I = \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = \int_{-2}^1 (2^x - 1) dx + \int_1^3 (2x-1)^3 dx = \frac{7}{2 \ln 2} + 78.$$

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} -2(x+1) & \text{khi } x \leq 0 \\ k(1-x^2) & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$. Xác định k để $\int_{-1}^1 f(x) dx = 1$.

Lời giải

Ta có:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 -2(x+1) dx + \int_0^1 k(1-x^2) dx$$

$$\Leftrightarrow 1 = -1 + k \frac{2}{3} \Leftrightarrow k = 3.$$

Câu 27: Cho $\int_1^2 f(x) dx = 3, \int_2^5 f(x) dx = 4$. Tính $I = \int_1^5 f(x) dx$.

Lời giải

$$I = \int_1^5 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx = 3 + 4 = 7.$$

Câu 28: Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Biết $\int_0^3 f(x) dx = 12, \int_1^3 f(x) dx = 2$ và $F(2) = 7$. Tính $F(0)$.

Lời giải

Ta có:



$$F(2) - F(0) = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx + \int_3^2 f(x) dx$$

$$= \int_0^3 f(x) dx - \int_2^3 f(x) dx = 12 - 2 = 10.$$

Suy ra:

$$F(0) = F(2) - 10 = 7 - 10 = -3.$$

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x) dx = 7$; $\int_2^6 f(x) dx = 3$. Tính giá trị

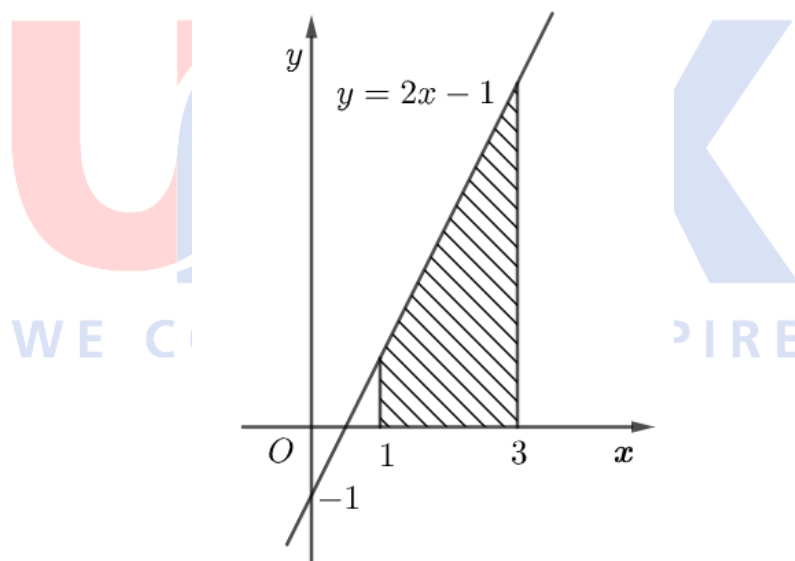
của biểu thức $P = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx$.

Lời giải

$$\int_0^{10} f(x) dx = 7 \Leftrightarrow 7 = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx \Leftrightarrow 7 = P + 3 \Leftrightarrow P = 4.$$

DẠNG 4: DIỆN TÍCH HÌNH THANG CONG

Câu 30: Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = 2x - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 3$ (Hình vẽ bên).

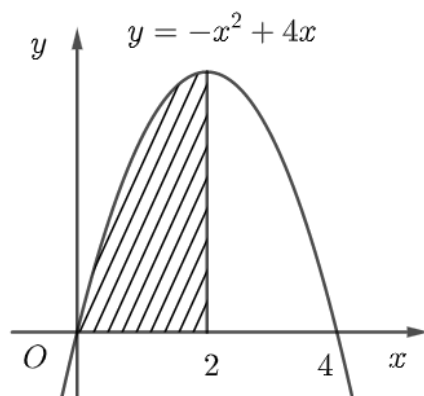


Lời giải

Hàm số $y = f(x) = 2x - 1$ liên tục, dương trên đoạn $[1;3]$ và có một nguyên hàm $F(x) = x^2 - x$.

Do đó, diện tích hình thang cong cần tìm là $S = F(3) - F(1) = (3^2 - 3) - (1^2 - 1) = 6$.

Câu 31: Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = -x^2 + 4x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2$ (Hình vẽ bên).



Lời giải

Hàm số $y = f(x) = -x^2 + 4x$ liên tục, không âm trên đoạn $[0; 2]$ và có một nguyên hàm

$$F(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2.$$

Do đó, diện tích hình thang cong cần tìm là $S = F(2) - F(0) = \left(-\frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2^2\right) - \left(-\frac{0^3}{3} + 2 \cdot 0^2\right) = \frac{16}{3}$.

Câu 32: Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 3; x = 5$.

Lời giải

Hàm số $y = x^2 - 2x$ liên tục và dương trên đoạn $[3; 5]$ và có một nguyên hàm là

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$$

Do đó diện tích hình thang cong cần tìm là: $S = F(5) - F(3) = \left(\frac{5^3}{3} - 5^2\right) - \left(\frac{3^3}{3} - 3^2\right) = \frac{50}{3}$

Câu 33: Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 2; x = 5$

Lời giải

Hàm số $y = \frac{1}{x^2}$ liên tục và dương trên đoạn $[2; 5]$ và có một nguyên hàm là $F(x) = -\frac{1}{x}$

Do đó diện tích hình thang cong cần tìm là: $S = F(5) - F(2) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

Câu 34: Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = (x+2)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$.

Lời giải

Hàm số $y = f(x) = (x+2)^2 - 1 = x^2 + 4x + 3$ liên tục và không âm trên đoạn $[1; 2]$ và có một

nguyên hàm $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x$

Ta có diện tích hình thang cong cần tìm là



$$S = F(2) - F(1) = \left(\frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1\right) = \frac{34}{3}$$

Câu 35: Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$.

Lời giải

Hàm số $y = f(x) = 3^x$ liên tục và không âm trên đoạn $[0; 2]$ và có một nguyên hàm $F(x) = \frac{3^x}{\ln 3}$

Ta có diện tích hình thang cong cần tìm là

$$S = F(2) - F(0) = \left(\frac{3^2}{\ln 3} - \frac{3^0}{\ln 3}\right) = \frac{8}{\ln 3}$$

Câu 36: Một chiếc xe đang chuyển động thẳng đều với vận tốc 30 m/s thì người lái đạp phanh khiến vận tốc của xe thay đổi theo thời gian t (giây) được tính theo công thức $v(t) = 30 - 5t$ ($0 \leq t \leq 6$). Tính quãng đường di chuyển của xe trong khoảng thời gian tính từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn.

Lời giải

$$\text{Quãng đường di chuyển của xe là: } s = \int_0^6 v(t) dt = \int_0^6 (30 - 5t) dt = \left(30t - \frac{5t^2}{2}\right) \Big|_0^6 = 90 \text{ (m)}$$

Câu 37: Biết rằng nhiệt độ tại thời điểm t giờ trong khoảng thời gian từ 5 giờ sáng đến 12 giờ trưa ở thành phố A vào một ngày mùa hạ được xác định bởi hàm số $N(t) = 20 + 1,7(t - 5)$, $5 \leq t \leq 12$. Tính nhiệt độ trung bình vào ngày đó trong khoảng thời gian từ 5 giờ sáng đến 12 giờ trưa (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Nhiệt độ trung bình cần tìm là giá trị trung bình của hàm số $N(t)$ trên đoạn $[5; 12]$.

Vậy ta có nhiệt độ trung bình cần tìm là:

$$\frac{1}{12-5} \int_5^{12} [20 + 1,7(t-5)] dt = \frac{1}{7} \int_5^{12} (11,5 + 1,7t) dt = \frac{1}{7} \left(11,5t + \frac{1,7t^2}{2}\right) \Big|_5^{12} \approx 26^\circ$$