



NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

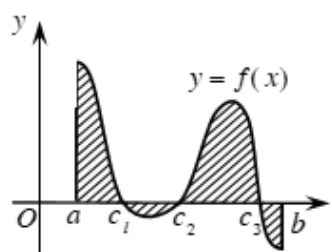


LÝ THUYẾT.

1. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẶNG

a) Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của một hàm số, trục hoành, hai đường thẳng $x = a$, $x = b$

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục, trục hoành và 2 đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$) được tính bởi công thức $S = \int_a^b |f(x)| dx$

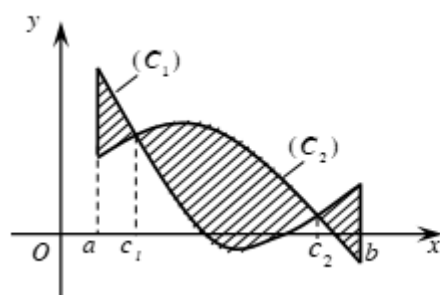


$$(H) \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

b) Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính bởi công thức: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$



$$(H) \begin{cases} (C_1) : y = f_1(x) \\ (C_2) : y = f_2(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$$

Chú ý: Nếu hiệu $f(x) - g(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a; b]$ thì:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

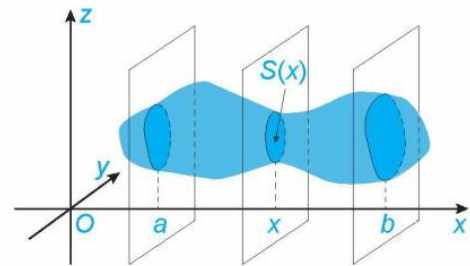


2. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ

a) Tính thể tích vật thể

Cho một vật thể trong không gian Oxyz. Gọi $\mathcal{B}$ là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm có hoành độ $x = a$, $x = b$. Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích là $S(x)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó thể tích V của phần vật thể $\mathcal{B}$ được tính bởi công thức

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$



Hình 4.21

b) Thể tích khối tròn xoay

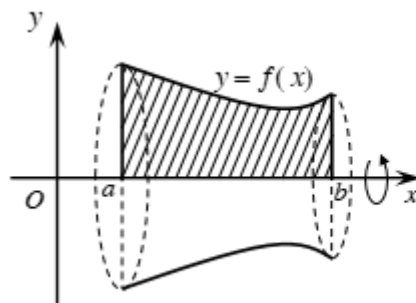
Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục, không âm trên $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$

Quay D quanh trục Ox ta được một hình khối gọi là *khối tròn xoay*.

Cắt khối tròn xoay trên bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x với $x \in [a; b]$ ta được mặt cắt là một hình tròn có bán kính $f(x)$ và diện tích $S(x) = \pi f^2(x)$

Vậy khối tròn có thể tích là:

$$V_N = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$



$$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

Dạng 1: Ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x)$, Ox, $x = a$, $x = b$.

Phương pháp Giải theo phương pháp tự luận: Sử dụng tính chất cơ bản của tích phân để tính tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối.

+) Tính chất: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên K và a, b, c là ba số bất kỳ thuộc K. Khi đó, ta có

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Phương pháp trắc nghiệm:

- Xác định các yếu tố cần thiết như công thức $y = f(x)$, Ox, $x = a$, $x = b$.
- Sử dụng chức năng tính tích phân có sẵn trong máy tính Casio để tính.



Chú ý: Nếu đề bài chưa cho $x=a, x=b$ thì ta cần giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x)=0$ để tìm cận tích phân.

Câu 1: Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^4$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1, x=3$

Lời giải

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $S = \int_{-1}^3 |x^4| dx = \int_{-1}^3 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^3 = \frac{3^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = \frac{244}{5}$

Giải theo phương pháp trắc nghiệm

Sử dụng máy tính Casio tính tích phân $S = \int_{-1}^3 |x^4| dx = \frac{244}{5}$

Câu 2: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=1-\frac{1}{x^2}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=\frac{1}{2}, x=2$ có diện tích là

Lời giải

Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left| 1 - \frac{1}{x^2} \right| dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{x^2 - 1}{x^2} dx = -\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{x^2 - 1}{x^2} dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{x^2 - 1}{x^2} dx$$

$$= -\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) dx = -\left(x + \frac{1}{x} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 + \left(x + \frac{1}{x} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = 1$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D

Giải theo phương pháp trắc nghiệm

Sử dụng máy tính Casio tính tích phân $S = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left| 1 - \frac{1}{x^2} \right| dx = 1$

Câu 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2x^2-x^4$ và trục hoành

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành là:

$$2x^2 - x^4 = 0 \Leftrightarrow x^2(2 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_{-\sqrt{2}}^0 |2x^2 - x^4| dx + \int_0^{\sqrt{2}} |2x^2 - x^4| dx = \int_{-\sqrt{2}}^0 (2x^2 - x^4) dx + \int_0^{\sqrt{2}} (2x^2 - x^4) dx$$

$$= \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-\sqrt{2}}^0 + \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{15}$$

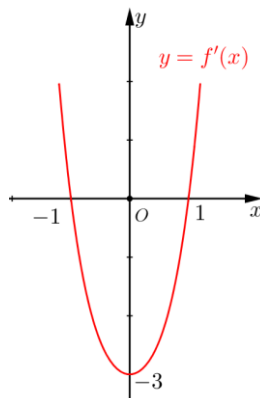
Giải theo phương pháp trắc nghiệm

+)Tìm hoành độ giao điểm tương tự như trên

+) Sử dụng máy tính Casio tính tích phân $S = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} |2x^2 - x^4| dx$



Câu 4: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có đồ thị (C) . Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây:



Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành.

Lời giải

Từ đồ thị suy ra $f'(x) = 3x^2 - 3$.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2 - 3) dx = x^3 - 3x + C.$$

Do (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ x_0 âm nên

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1.$$

$$\text{Suy ra } f(-1) = 4 \Leftrightarrow C = 2 \Rightarrow (C): y = x^3 - 3x + 2$$

$$\text{Xét phương trình } x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Diện tích hình phẳng cần tìm là: } \int_{-2}^1 |x^3 - 3x + 2| dx = \frac{27}{4}.$$

Câu 5: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \cos^2 x$, trục hoành, đường thẳng $x = 0$ và $x = \pi$ là.

Lời giải

$$\text{Diện tích } S \text{ cần tìm: } S = \int_0^\pi \cos^2 x dx = \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^\pi + \frac{\sin 2x}{4} \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Câu 6: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x$, trục hoành, đường thẳng $x = -2$ và $x = 4$ là

Lời giải

$$\text{Diện tích cần tìm } S = \int_{-2}^4 |x^3 - 4x| dx$$

$$\text{Ta có: } x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } S &= \int_{-2}^0 |x^3 - 4x| dx + \int_0^2 |x^3 - 4x| dx + \int_2^4 |x^3 - 4x| dx \\ &= \left| \left(\frac{x^4}{4} - 4 \frac{x^2}{2} \right) \right|_{-2}^0 + \left| \left(\frac{x^4}{4} - 4 \frac{x^2}{2} \right) \right|_0^2 + \left| \left(\frac{x^4}{4} - 4 \frac{x^2}{2} \right) \right|_2^4 = 44. \end{aligned}$$



Câu 7: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x}$, trục hoành, hai đường thẳng $x=1$ và $x=2$ là.

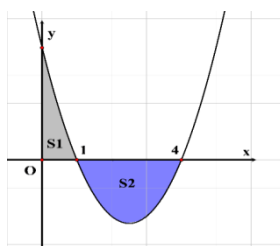
Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow x=1$

$$\text{Suy ra } S = \int_1^2 \left| \frac{x-1}{x} \right| dx = \int_1^2 \frac{x-1}{x} dx = \left| \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) dx \right| = \left| \left(x - \ln x \right) \Big|_1^2 \right| = 1 - \ln 2.$$

Câu 8: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ như hình vẽ và có diện tích $S_1 = \frac{11}{6}$, $S_2 = \frac{9}{2}$. Tính

$$\text{tích phân } I = \int_0^4 f(x) dx$$

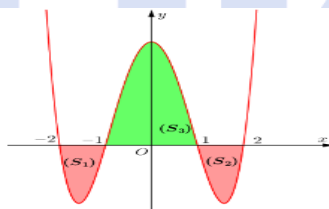


Lời giải

$$\text{Dựa vào đồ thị ta có } I = \int_0^4 f(x) dx = S_1 - S_2 = \frac{11}{6} - \frac{9}{2} = -\frac{8}{3}.$$

Câu 9: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$ như hình vẽ ở bên và có diện tích

$$S_1 = S_2 = \frac{22}{15}, S_3 = \frac{76}{15}. \text{ Tính tích phân } I = \int_{-2}^2 f(x) dx$$



Lời giải

$$\text{Ta có } I = \int_{-2}^2 f(x) dx = S_3 - S_1 - S_2 = \frac{76}{15} - 2 \cdot \frac{22}{15} = \frac{32}{15}.$$

Câu 10: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 3$ là.

Lời giải

$$\text{Ta thấy } x^2 \geq 0 \quad \forall x \text{ nên diện tích } S \text{ cần tìm bằng } S = \int_{-1}^3 |x^2| dx = \int_{-1}^0 x^2 dx + \int_0^3 x^2 dx = \frac{28}{3}.$$

Câu 11: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$ và $x = \frac{7\pi}{6}$ là.

Lời giải



Ta thấy $\sin x + 1 \geq 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{7\pi}{6}\right)$ nên diện tích S cần tìm bằng:

$$S = \int_0^{\frac{7\pi}{6}} |\sin x + 1| dx = \int_0^{\frac{7\pi}{6}} (\sin x + 1) dx = \left(-\cos \frac{7\pi}{6} + \frac{7\pi}{6}\right) - (-\cos 0 + 0) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7\pi}{6} + 1.$$

Câu 12: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục Ox , trục Oy và đường thẳng $x = 2$ là.

Lời giải

Ta có: $e^x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Vậy $S = \int_0^2 |e^x| dx = |e^x|_0^2 = e^2 - 1$.

Câu 13: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ và trục Ox

Lời giải

PT hoành độ giao điểm đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ và trục Ox là $x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Suy ra diện tích hình phẳng cần tính bằng $S = \int_{-1}^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx = \frac{16}{15}$.

Câu 14: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2$ và trục hoành là.

Lời giải

Đặt $(C): y = -x^3 + 3x^2$. Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

$$\text{Khi đó: } S = \int_0^3 |-x^3 + 3x^2| dx = \int_0^3 (-x^3 + 3x^2) dx = \left| \left(-\frac{x^4}{4} + x^3 \right) \right|_0^3 = \frac{27}{4}.$$

Câu 15: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = -x^2 + 2x$ và trục hoành là:

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$$\text{Ta có: } S = \int_0^2 |-x^2 + 2x| dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

Câu 16: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y^2 + x - 5 = 0$, $x + y - 3 = 0$

Lời giải

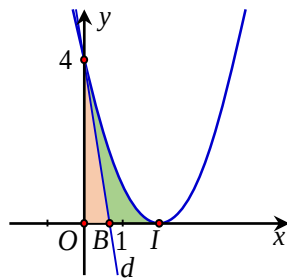
Hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} y^2 + x - 5 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y^2 \\ x = 3 - y \end{cases}$

Xét phương trình: $5 - y^2 = 3 - y \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

$$\text{Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là: } S = \int_{-1}^2 |y^2 - y - 2| dy = \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} - 2y \right) \Big|_{-1}^2 = 4,5$$

Câu 17: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số: $y = x^2 - 4x + 4$, trục tung và trục hoành. Xác định k để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0; 4)$ có hệ số góc k chia thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Lời giải



Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 4$ và trục hoành là:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số: $y = x^2 - 4x + 4$, trục tung và trục hoành

$$\text{là: } S = \int_0^2 |x^2 - 4x + 4| dx = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0; 4)$ có hệ số góc k có dạng: $y = kx + 4$.

Gọi B là giao điểm của (d) và trục hoành. Khi đó $B\left(-\frac{4}{k}; 0\right)$.

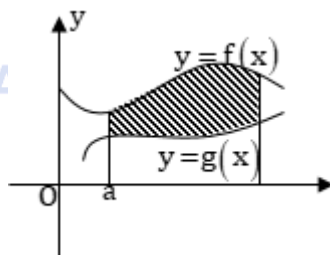
Đường thẳng (d) chia (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau khi $B \in OI$ và

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} S = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < -\frac{4}{k} < 2 \\ S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{-4}{k} = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < -2 \\ k = -6 \end{cases} \Leftrightarrow k = -6.$$

2. Dạng 2: Ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

$$y = f(x), y = g(x), x = a, x = b.$$

Phương pháp giải:



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị: $(C_1): y = f(x)$ $(C_2): y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được xác định bởi công thức: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

Chú ý: Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

* Giải phương trình: $f(x) = g(x)$ tìm nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$, $(x_1 < x_2 < \dots < x_n)$.

$$\begin{aligned} \text{Tính: } S &= \int_a^{x_1} |f(x) - g(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)| dx + \dots + \int_{x_n}^b |f(x) - g(x)| dx \\ &= \left| \int_a^{x_1} (f(x) - g(x)) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b (f(x) - g(x)) dx \right|. \end{aligned}$$

Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để khử dấu giá trị tuyệt đối.

Câu 18: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x^2$ và $y = x$ và các đường thẳng $x = -2, x = 1$

Lời giải



$$\text{Diện tích hình phẳng } S = \int_{-2}^1 |-x^2 - x + 2| dx = \left| \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx \right| = \frac{9}{2}$$

Câu 19: . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^3 + x$; $y = 2x$ và các đường thẳng $x = -1, x = 1$ được xác định bởi công thức.

Lời giải

Giải theo phương pháp tự luận: GPT hoành độ giao điểm của hai đồ thị: $x - x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

$$S = \int_{-1}^1 |x - x^3| dx = \int_{-1}^0 |x - x^3| dx + \int_0^1 |x - x^3| dx = \left| \int_{-1}^0 (x - x^3) dx \right| + \left| \int_0^1 (x - x^3) dx \right| = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x - x^3) dx$$

Câu 20: Hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 2x + 3$ và hai đường $x = 0$, $x = 2$. Công thức nào sau đây tính diện tích hình phẳng (H) ?

Lời giải

Áp dụng lý thuyết: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị: (C_1): $y = f(x)$,

(C_2): $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được xác định bởi công thức:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Khi đó diện tích hình phẳng $H = \int_0^2 |x^2 - 2x - 3| dx$

Câu 21: Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = x^3$, $y = 2 - x^2$, $x = 0$.

Lời giải

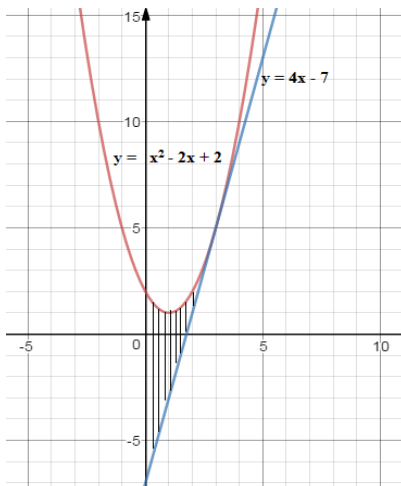
Ta có $x^3 = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$$\Rightarrow S = \int_0^1 |x^3 + x^2 - 2| dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x \right) \Big|_0^1 = \frac{17}{12}.$$

Câu 22: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (P): $y = x^2 - 2x + 2$, trục tung, tiếp tuyến của (P) tại $M(3;5)$ là:

Lời giải

Ta có $y' = 2x - 2 \Rightarrow y'(3) = 4$



Phương trình tiếp tuyến tại M là: $y - 5 = 4(x - 3)$ hay $y = 4x - 7$



Diện tích cần tìm là: $S = \int_0^3 [(x-2x+2)-(4x-7)]dx$
 $= \int_0^3 (x^2 - 6x + 9)dx = \int_0^3 (x-3)^2 dx = \frac{(x-3)^3}{3} \Big|_0^3 = 9.$

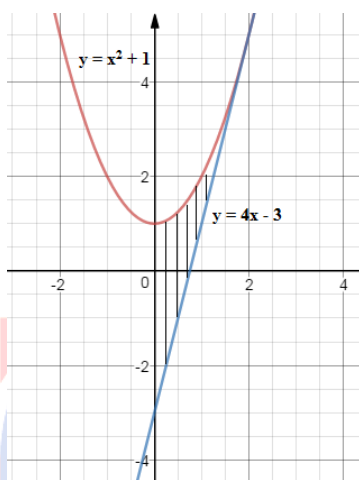
Câu 23: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol: $y = x^2 + 1$, tiếp tuyến với đường này tại điểm $M(2;5)$ và trục Oy .

Lời giải

$$y' = f'(x) = 2x \Rightarrow f'(2) = 4$$

Phương trình tiếp tuyến tại tiếp điểm $M(2;5) \in (P)$ là: $y-5=4(x-2) \Leftrightarrow y=4x-3$

$$S = \int_0^2 (x^2 + 1 - 4x + 3)dx = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4)dx = \int_0^2 (x-2)^2 dx$$



Đặt $u = x-2 \Rightarrow du = dx$

Đổi cận $x=2 \Rightarrow u=0$; $x=0 \Rightarrow u=-2$

Do đó: $S = \int_{-2}^0 u^2 du = \frac{u^3}{3} \Big|_{-2}^0 = \frac{8}{3}$ đvdt.

3. Dạng 3: Ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x), y = g(x)$.

Phương pháp giải:

Dạng: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích hình phẳng

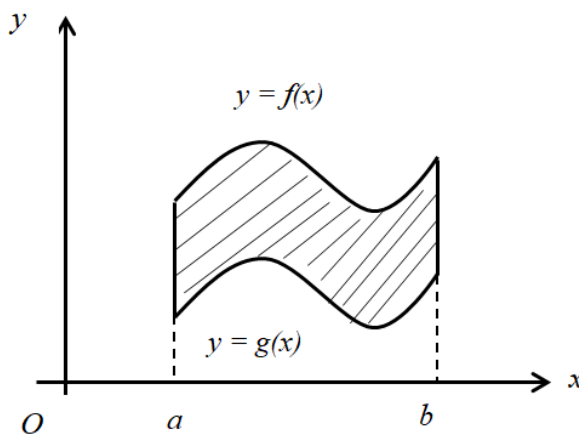
giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$. Trong đó α, β là

ng nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình $f(x) = g(x)$ ($a \leq \alpha < \beta \leq b$)

Cách giải:

Bước 1: Giải phương trình $f(x) = g(x)$ tìm các giá trị α, β .

Bước 2: Tính $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$.



Chú ý: Nếu $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a; b]$ thì $S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$

Câu 24: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$; $y = x + 2$ bằng?

Lời giải

$$\text{Ta có } x^2 = x + 2 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } S = \int_{-1}^2 |x^2 - x - 2| dx = \int_{-1}^2 (2 + x - x^2) dx = \frac{9}{2}$$

Câu 25: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $P: y = x^2 - 4x + 5$ và hai tiếp tuyến của (P) tại các điểm $A(1; 2)$, $B(4; 5)$ là:

Lời giải

Phương trình tiếp tuyến với (P) tại $A(1; 2)$ là $y = -2x + 4$

Phương trình tiếp tuyến với (P) tại $B(4; 5)$ là $y = 4x - 11$

Giao của hai tiếp tuyến có hoành độ $x = \frac{5}{2}$

$$\text{Xét phương trình } x^2 - 4x + 5 = -2x + 4 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{Xét phương trình } x^2 - 4x + 5 = 4x - 11 \Rightarrow x = 4$$

$$\text{Do đó: } S = \int_1^{\frac{5}{2}} |x^2 - 4x + 5 + 2x - 4| dx + \int_{\frac{5}{2}}^4 |x^2 - 4x + 5 - 4x + 11| dx = \frac{9}{4}$$

Câu 26: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x + 3, y = x^2 - 4x + 3$ là:

Lời giải

$$\text{Ta có: } x + 3 = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } S = \int_0^5 |x^2 - 5x| dx = \left(\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^5 = \frac{125}{6}$$

Câu 27: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^3, y = 4x$ là:

Lời giải

$$\text{Ta có: } x^3 = 4x \Leftrightarrow x = -2, x = 0, x = 2$$



Suy ra: $S = \left| \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx \right| + \left| \int_0^2 (x^3 - 4x) dx \right| = 8$

Nếu trong đoạn $[\alpha; \beta]$ phương trình $f(x) = g(x)$ không còn nghiệm nào nữa thì ta có thể dùng công thức $S = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx = \left| \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)] dx \right|$.

Câu 28: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 - 12x$ và $y = x^2$ là:

Lời giải

Ta có: $x^3 - 12x = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \\ x = 4 \end{cases}$

Do đó: $S = \int_{-3}^4 |x^3 - 12x - x^2| dx = \int_{-3}^0 |x^3 - 12x - x^2| dx + \int_0^4 |x^3 - 12x - x^2| dx$
 $= \left| \int_{-3}^0 (x^3 - 12x - x^2) dx \right| + \left| \int_0^4 (x^3 - 12x - x^2) dx \right| = \frac{937}{12}.$

Câu 29: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + x - 1, y = x^4 + x - 1$ là:

Lời giải

Ta có: $x^2 + x - 1 = x^4 + x - 1 \Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Do đó: $S = \int_{-1}^1 |x^4 - x^2| dx = \left| 2 \int_0^1 (x^4 - x^2) dx \right| = \left| 2 \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right) \right|_0^1 = \frac{4}{15}.$

Câu 30: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y^2 = 2x, y = 2x - 2$ là:

Lời giải

Ta có: $(2x - 2)^2 = 2x \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

Do đó: $S = 2 \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{2x} dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 [\sqrt{2x} - 2x + 2] dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} \sqrt[3]{x} \Big|_{\frac{1}{2}}^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{x^3} - x^2 + 2x \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{9}{4}.$

Câu 31: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y^2 - 2y + x = 0, x + y = 0$ là:

Lời giải

Biến đổi về hàm số theo biến số y là: $x = -y^2 + 2y, x = -y$

Ta có: $-y^2 + 2y - (-y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 3 \end{cases}$

Do đó: $S = \int_0^3 |-y^2 + 3y| dy = \int_0^3 (-y^2 + 3y) dy = \frac{9}{2}.$



Câu 32: Gọi S là diện tích mặt phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 + 2x - 3$ và đường thẳng $y = kx + 1$ với k là tham số thực. Tìm k để S nhỏ nhất.

Lời giải

$$\text{Ta có } x^2 + 2x - 3 = kx + 1 \Leftrightarrow x^2 - (k-2)x - 4 = 0$$

Do $ac = -4 < 0$ PT trên luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = k-2 \\ x_1 \cdot x_2 = -4 \end{cases}$

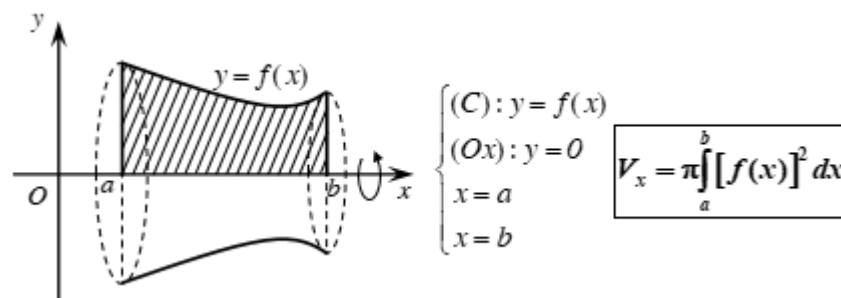
$$\begin{aligned} \text{Giả sử } x_1 < x_2 \Rightarrow S &= \left| \int_{x_1}^{x_2} (x^2 - (k-2)x - 4) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{k-2}{2}x^2 - 4x \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \right| \\ &= \left| \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3) - \frac{k-2}{2}(x_2^2 - x_1^2) - 4(x_2 - x_1) \right| = \left| (x_2 - x_1) \left[\frac{1}{3}(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - \frac{k-2}{2}(x_1 + x_2) - 4 \right] \right| \\ &= \sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2} \left| \frac{1}{3}[(x_2 + x_1)^2 - x_1x_2] - \frac{k-2}{2}(x_1 + x_2) - 4 \right| = \sqrt{(k-2)^2 + 16} \left| \frac{(k-2)^2}{6} + \frac{8}{3} \right| \end{aligned}$$

Vậy S nhỏ nhất khi $k = 2$.

THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY

Dạng 1: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quanh trục Ox :

Phương pháp giải:



Câu 33: Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x - x^2$ và $y = 0$. Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra bởi hình phẳng đó khi nó quay quanh trục Ox .

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 2x - x^2 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx \\ &= \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \pi \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{16\pi}{15} \end{aligned}$$

Câu 34: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2; y = 0; x = 2$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục Ox .

Lời giải

$$\text{Thể tích cần tính là } V = \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5}$$

Câu 35: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = 4 - x^2, y = 0$. Tính thể tích V của khối tròn xoay hình thành khi cho (H) quay xung quanh Ox

Lời giải



PT hoành độ giao điểm các đồ thị là $4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

Suy ra thể tích cần tính bằng $V = \pi \int_{-2}^2 (4 - x^2)^2 dx = \frac{512\pi}{15} \text{ (vtt)}$

Câu 36: Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 1, x = a (a > 1)$ quay xung quanh trục Ox

Lời giải

Ta có: $V = \pi \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = -\pi \frac{1}{x} \Big|_1^a = \pi \left(1 - \frac{1}{a} \right)$.

Câu 37: Cho hình phẳng (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^{\frac{x}{2}}$ trục Ox và hai đường thẳng $x = 0, x = 1$. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay khi quay hình (D) quay quanh trục Ox .

Lời giải

Thể tích của khối tròn xoay: $V = \pi \int_0^1 \left(e^{\frac{x}{2}} \right)^2 dx = \pi \int_0^1 e^x dx$.

Câu 38: Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x, y = 0, x = 0$ và $x = 1$.

Lời giải

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 - 2x)^2 dx = \frac{8\pi}{15}.$$

Dạng 2. Thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = g(x),$

$x = a, x = b$ khi quay quanh trục Ox được tính bởi công thức: $V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$.

(chú ý là đồ thị của 2 hàm số $y = f(x), y = g(x)$ nằm về cùng 1 phía đối với trục hoành)

Câu 39: Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x$ quay xung quanh trục Ox bằng:

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = 2x \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Do $2x \geq x^2$ với $x \in (0; 2)$ nên $V = V_1 - V_2$ trong đó V_1 là thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $d: y = 2x$, trục Ox , đường thẳng $x = 2$ và trục Ox quay quanh trục Ox ; V_2 là thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi Parabol (P) , trục Ox , đường thẳng $x = 2$ và trục Ox quay quanh trục Ox .

Câu 40: Tính thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^2 - 2x$ và $y = -x^2$ quay quanh trục Ox .

Lời giải

Xét $x^2 - 2x = -x^2 \Rightarrow x = 0; x = 1$. $V_1 = \pi \int_0^1 (x^2 - 2x)^2 dx = \frac{8\pi}{15}$



$$V_2 = \pi \int_0^1 (-x^2)^2 dx = \frac{1}{5} \pi .$$

$$V = \frac{8\pi}{15} - \frac{1}{5} \pi = \frac{\pi}{3} .$$

$$\text{Hoặc sử dụng trực tiếp } V = \pi \int_0^1 \left[(x^2 - 2x)^2 - (-x^2)^2 \right] dx = \frac{8\pi}{15} - \frac{1}{5} \pi = \frac{\pi}{3}$$

Câu 41: Thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục hoành phần hình phẳng giới hạn bởi 2 đường $y = x^2$ và $y = \sqrt{x}$ là:

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay là thể tích được tạo bởi hình phẳng có diện tích là phần gạch chéo trong hình bên khi quay quanh trục hoành.

$$\text{Khi đó: } V = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \frac{3\pi}{10} .$$

