



NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN

BÀI ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

DẠNG 1: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH

Câu 1: Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^3 f(x)dx = F(3) - G(0) + a, (a > 0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x), y = G(x), x = 0, x = 3$. Khi $S = 15$ thì a bằng

Lời giải

Trả lời: 5

Do $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $G(x) = F(x) + C, \forall x \in \mathbb{R}$, với C là hằng số.

$$\text{Mặt khác } \int_0^3 f(x)dx = F(3) - F(0)$$

$$\text{Lại có } \int_0^3 f(x)dx = F(3) - G(0) + a, \text{ suy ra } G(0) = F(0) + a.$$

$$\text{Do đó } a = C \Rightarrow G(x) = F(x) + a, \forall x \in \mathbb{R}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x), y = G(x), x = 0, x = 3$.

$$S = \int_0^3 |G(x) - F(x)|dx \Leftrightarrow 15 = \int_0^3 |a|dx \stackrel{a>0}{\Leftrightarrow} 15 = 3a \Leftrightarrow a = 5.$$

Câu 2: Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^5 f(x)dx = F(5) - G(0) + a$ ($a > 0$). Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x), y = G(x), x = 0$ và $x = 5$. Khi $S = 20$ thì a bằng

Lời giải

Trả lời: 4

Vì $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên

$$\int_0^5 f(x)dx = F(5) - F(0) = G(5) - G(0) = F(5) - G(0) + a \Rightarrow \begin{cases} F(0) = G(0) - a \\ F(5) = G(5) - a \end{cases}$$

$$\text{Do đó } F(x) = G(x) - a \Leftrightarrow F(x) - G(x) = -a$$

S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x), y = G(x), x = 0$ và $x = 5$ nên



$$S = \int_0^5 |F(x) - G(x)| dx = \int_0^5 |-a| dx = \int_0^5 |a| dx = \int_0^5 a dx = ax \Big|_0^5 = 5a \quad (a > 0).$$

Mà $S = 20$ nên $5a = 20 \Leftrightarrow a = 4$.

Câu 3: Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^4 f(x) dx = F(4) - G(0) + a \quad (a > 0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x), y = G(x), x = 0$ và $x = 4$. Khi $S = 8$ thì a bằng

Lời giải

Trả lời: 2

$F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $\int_0^4 f(x) dx = F(4) - F(0)$.

Mà $\int_0^4 f(x) dx = F(4) - G(0) + a \quad (a > 0)$ nên

$$F(4) - F(0) = F(4) - G(0) + a \Leftrightarrow G(0) = F(0) + a.$$

Lại có $G(x)$ cũng là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $G(x) = F(x) + a \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = F(x), y = G(x), x = 0$ và $x = 4$ là

$$S = \int_0^4 |F(x) - G(x)| dx = \int_0^4 a dx = 4a = 8 \Rightarrow a = 2.$$

Câu 4: Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 f(x) dx = F(2) - G(0) + a \quad (a > 0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x), y = G(x), x = 0$ và $x = 2$. Khi $S = 6$ thì a bằng

Lời giải

Trả lời: 3

Do $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $F(x) - G(x) = C$ với C là hằng số.

$$\text{Ta có } S = \int_0^2 |F(x) - G(x)| dx = \int_0^2 |C| dx = |C| \cdot \int_0^2 1 dx = 2|C| = 6 \Rightarrow |C| = 3 \quad (*).$$

$$\text{Ta lại có: } F(0) - G(0) = C \Leftrightarrow F(0) = G(0) + C$$

Theo đề bài:

$$\int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0) = F(2) - (G(0) + C) = F(2) - G(0) - C = F(2) - G(0) + a.$$

Suy ra: $a = -C$ mà $a > 0$ nên $C < 0 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra: $C = -3 \Rightarrow a = -C = 3$.

Vậy: $a = 3$.

Câu 5: Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^4 f(x) dx = F(4) - G(0) + 2m \quad (m > 0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x), y = G(x), x = 0$ và $x = 4$. Khi $S = 8$ thì m bằng:



Lời giải

Trả lời: 1

Vì $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên giả sử trên $\mathbb{R}$, ta có:

$$G(x) = F(x) + C \text{ suy ra } G(0) = F(0) + C$$

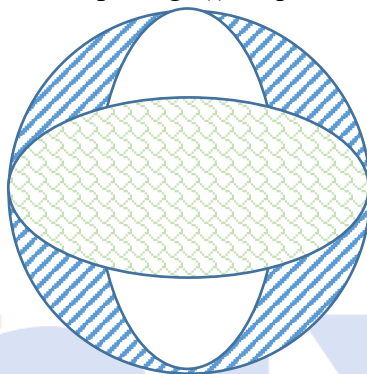
$$\int_0^4 f(x)dx = F(4) - G(0) + 2m \Leftrightarrow F(4) - F(0) = F(4) - F(0) - C + 2m \Leftrightarrow C = 2m$$

Vậy $G(x) = F(x) + 2m$ trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } S = \int_0^4 |F(x) - G(x)|dx = \int_0^4 2m dx = 2mx \Big|_0^4 = 8m,$$

Mà $S = 8$ nên $m = 1$.

Câu 6: Cho đường tròn có đường kính bằng 4 và 2 Elip lần lượt nhận 2 đường kính vuông góc nhau của đường tròn làm trục lớn, trục bé của mỗi Elip đều bằng 1. Diện tích S phần hình phẳng ở bên trong đường tròn và bên ngoài 2 Elip bằng. ((kết quả làm tròn đến hàng phần mười))



Lời giải

Trả lời: 3,7

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

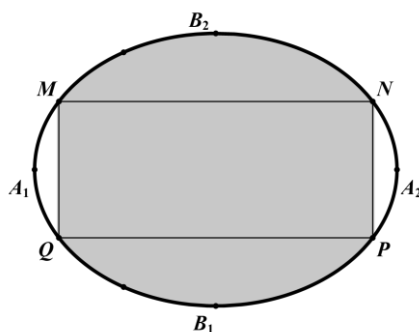
Hai Elip lần lượt có phương trình: $(E_1): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ và $(E_2): \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$

Tọa độ giao điểm của hai Elip trong góc phần tư thứ nhất là nghiệm phương trình:

$$x^2 + \frac{1 - \frac{x^2}{4}}{4} = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

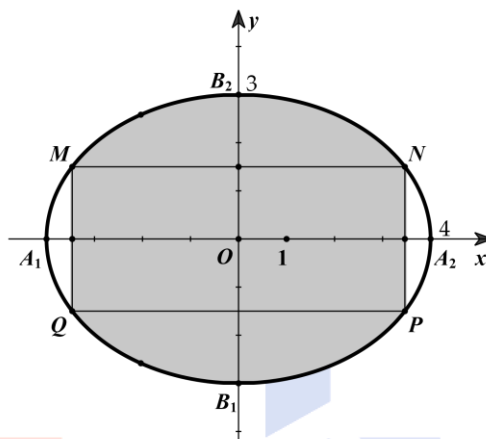
$$\text{Diện tích hình phẳng cần tìm: } S = \pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 2 \cdot 1 - 4 \int_0^{\frac{2\sqrt{5}}{5}} \left(2\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \right) dx = 3,71$$

Câu 7: Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 VNĐ / m² và phần còn lại 100.000 VNĐ / m². Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8\text{m}$, $B_1B_2 = 6\text{m}$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3\text{m}$? (đơn vị nghìn đồng)



Lời giải

Trả lời: 7322



Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\text{Với } \begin{cases} A_1A_2 = 8 = 2a \\ B_1B_2 = 6 = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \rightarrow (E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{3}{4} \sqrt{16 - x^2}.$$

Suy ra diện tích của hình elip là $S_{(E)} = \pi a.b = 12\pi \text{ (m}^2\text{)}$.

Vì $MNPQ$ là hình chữ nhật và $MQ = 3 \rightarrow M\left(x; \frac{3}{2}\right) \in (E)$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow x^2 = 12 \rightarrow M\left(-2\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right); N\left(2\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right)$$

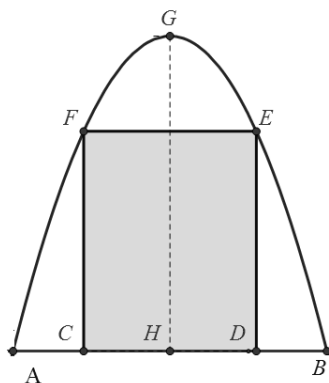
Gọi $S_1; S_2$ lần lượt là diện tích phần bị tô màu và không bị tô màu

$$\text{Ta có: } S_2 = 4 \cdot \frac{3}{4} \int_{2\sqrt{3}}^4 \sqrt{16 - x^2} dx = 3 \int_{2\sqrt{3}}^4 \sqrt{16 - x^2} dx \xrightarrow{x=4\sin t} S_2 = 4\pi - 6\sqrt{3} \text{ (m}^2\text{)}$$

Suy ra: $S_1 = S_{(E)} - S_2 = 8\pi + 6\sqrt{3}$. Gọi T là tổng chi phí. Khi đó ta có

$$T = (4\pi - 6\sqrt{3}) \cdot 100 + (8\pi + 6\sqrt{3}) \cdot 200 \approx 7.322.000.$$

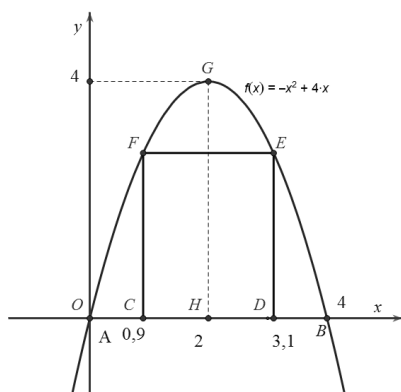
Câu 8: Cho Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau. Chiều cao $GH = 4m$, chiều rộng $AB = 4m$, $AC = BD = 0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1200000 đồng/ m^2 , còn các phần để trống thì trang trí hoa có giá là 900000 đồng/ m^2 . Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên bằng bao nhiêu? (đơn vị nghìn đồng)



Lời giải

Trả lời: 11441

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho AB trùng Ox , A trùng với gốc O . Khi đó parabol có đỉnh $G(2;4)$ và đi qua gốc tọa độ.



Giả sử phương trình của parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Vì parabol có đỉnh là $G(2;4)$ và đi qua điểm $O(0;0)$ nên ta có

$$\begin{cases} c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0 \end{cases}$$

Suy ra phương trình parabol là $y = f(x) = -x^2 + 4x$.

$$\text{Diện tích của cả công là } S = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3} \text{ (m}^2\text{)}.$$

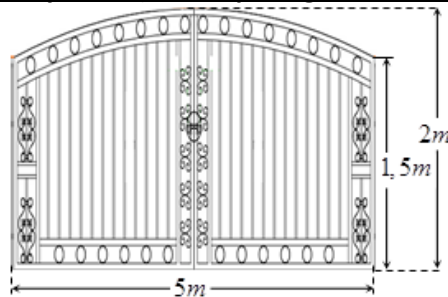
$$\text{Mặt khác chiều cao } CF = DE = f(0,9) = 2,79 \text{ (m)}; \quad CD = 4 - 2 \cdot 0,9 = 2,2 \text{ (m)}.$$

$$\text{Diện tích hai cánh công là } S_{CDEF} = CD \cdot CF = 6,138 \text{ (m}^2\text{)}.$$

$$\text{Diện tích phần để trống là } S_1 = S - S_{CDEF} = \frac{32}{3} - 6,138 = \frac{6793}{1500} \text{ (m}^2\text{)}.$$

$$\text{Vậy tổng số tiền để làm công là } 6,138 \cdot 1200000 + \frac{6793}{1500} \cdot 900000 = 11441400 \text{ đồng.}$$

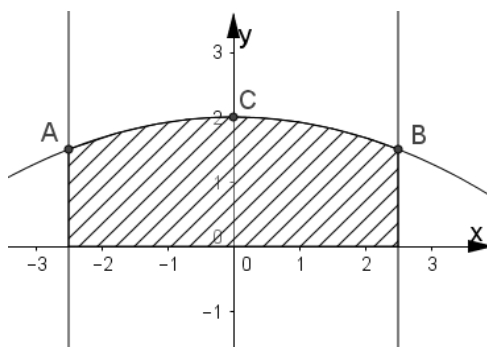
Câu 9: Bác Bình muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá 1m^2 của rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi bác Bình phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy. (đơn vị nghìn đồng) (làm tròn đến hàng nghìn)



Lời giải

Trả lời: 6416

Ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Trong đó $A(-2,5;1,5)$, $B(2,5;1,5)$, $C(0;2)$.

Giả sử đường cong phía trên là một Parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$, với $a; b; c \in \mathbb{R}$.

Do Parabol đi qua các điểm $A(-2,5;1,5)$, $B(2,5;1,5)$, $C(0;2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a(-2,5)^2 + b(-2,5) + c = 1,5 \\ a(2,5)^2 + b(2,5) + c = 1,5 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{25} \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Khi đó phương trình Parabol là $y = -\frac{2}{25}x^2 + 2$.

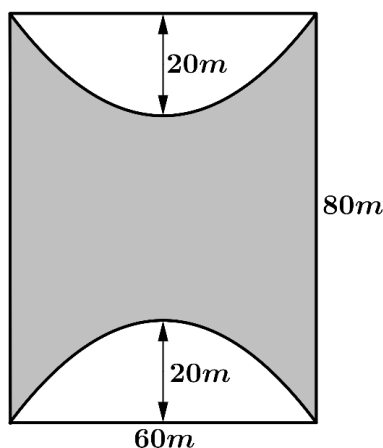
Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -\frac{2}{25}x^2 + 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2,5$; $x = 2,5$.

$$\text{Ta có } S = \int_{-2,5}^{2,5} \left(-\frac{2}{25}x^2 + 2 \right) dx = \left(-\frac{2}{25} \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-2,5}^{2,5} = \frac{55}{6}.$$

Vậy bác Bình phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là

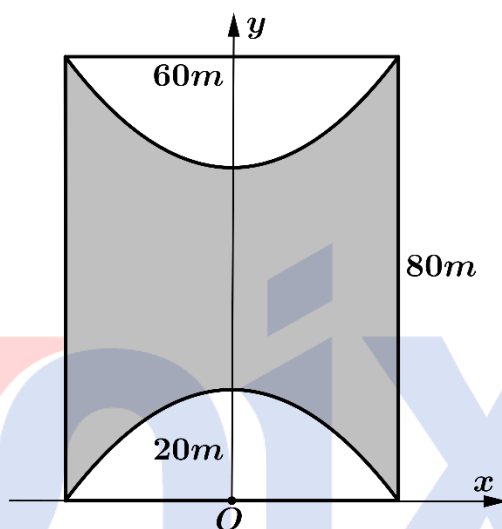
$$S \times 700000 = \frac{55}{6} \times 700000 \approx 6.417.000.$$

Câu 10: Kiến trúc sư thiết kế một khu sinh hoạt cộng đồng có dạng hình chữ nhật với chiều rộng và chiều dài lần lượt là 60m và 80m. Trong đó, phần được tô màu đậm là sân chơi, phần còn lại để trồng hoa. Mỗi phần trồng hoa có đường biên cong là một phần của parabol với đỉnh thuộc một trục đối xứng của hình chữ nhật và khoảng cách từ đỉnh đó đến trung điểm cạnh tương ứng của hình chữ nhật bằng 20m (xem hình minh họa).



Diện tích của phần sân chơi là bao nhiêu mét vuông?

Lời giải



Diện tích của phần sân chơi bằng diện tích của hình chữ nhật trừ đi diện tích của hai phần trồng hoa.

Diện tích của hình chữ nhật là: $60 \cdot 80 = 4800 \text{ m}^2$.

Diện tích của mỗi phần trồng hoa bằng diện tích của một parabol.

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

Phương trình parabol bên dưới có dạng: $y = ax^2 + b$ (vì đỉnh parabol thuộc trục tung).

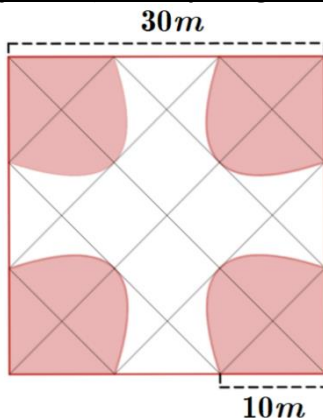
$$\text{Ta có } \begin{cases} y(0) = 20 \\ y(30) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 20 \\ a \cdot 30^2 + 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{45} \\ b = 20 \end{cases}$$

Phương trình Parabol dưới là $y = -\frac{1}{45}x^2 + 20$

$$\text{Diện tích của mỗi phần trồng hoa bằng: } \int_{-30}^{30} \left(-\frac{1}{45}x^2 + 20 \right) dx = 800 \text{ (m}^2\text{)}$$

Diện tích của phần sân chơi là: $4800 - 2 \cdot 800 = 3200 \text{ (m}^2\text{)}$.

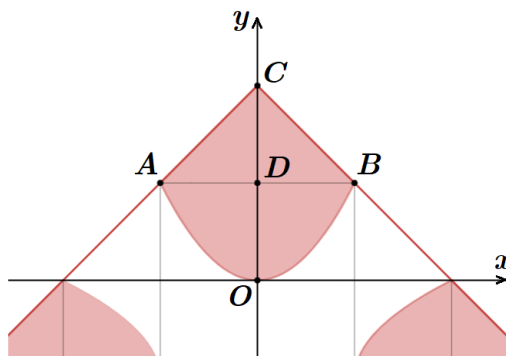
Câu 11: Tại trung tâm của công viên người xây một khu vườn với phần không tô màu biểu thị là đường đi và phần tô màu biểu thị biểu thị phần trồng hoa. Tham khảo kích thước ở hình vẽ bên dưới.



Diện tích phần đường đi của khu vườn bằng bao nhiêu mét vuông.

Lời giải

Trả lời: 433



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó ta có $DB = \frac{CB}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$.

Suy ra $B(5\sqrt{2}; 5\sqrt{2})$.

Gọi (P) là đường parabol biểu diễn viền của phần trồng hoa.

Do parabol qua gốc tọa độ và nhận Oy làm trục đối xứng nên $(P): y = ax^2$.

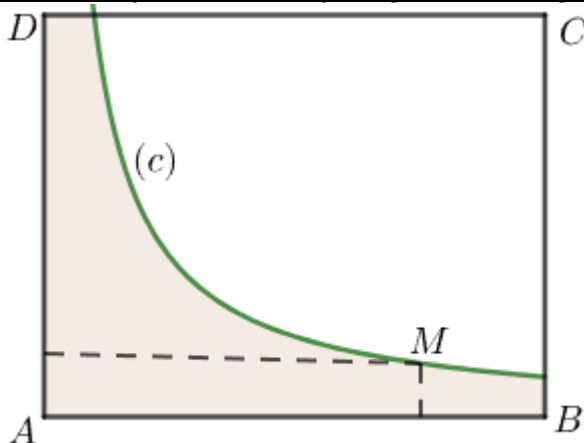
Mà (P) qua $B(5\sqrt{2}; 5\sqrt{2})$ nên $(P): y = \frac{\sqrt{2}x^2}{10}$.

Diện tích phần trồng hoa được giới hạn bởi parabol (P) và đoạn thẳng AB là

$$\int_{-5\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}} \left| 5\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}x^2}{10} \right| dx = \frac{200}{3}.$$

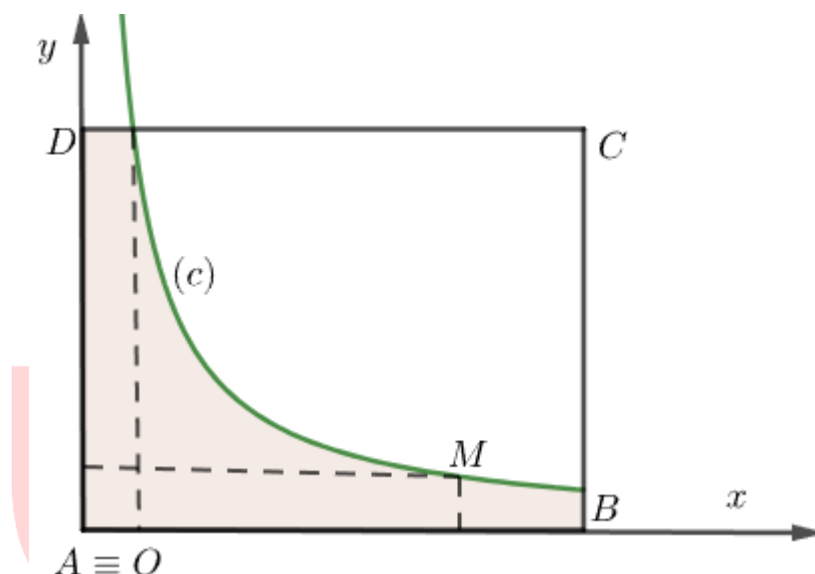
Vậy diện tích phần đường đi của khu vườn là $30^2 - 4 \cdot \left(\frac{200}{3} + \frac{10^2}{2} \right) = \frac{1400}{3} \approx 433 (m^2)$.

Câu 12: Một hộ gia đình thiết kế một khu vui chơi lớn cho gia đình có dạng hình chữ nhật với chiều rộng và chiều dài lần lượt là $AD = 40 m$ và $AB = 50 m$. Trong đó, phần được tô màu đậm làm nơi trồng hoa, phần còn lại để làm sân chơi. Mỗi phần trồng hoa có đường biên cong là đường cong (C) và các cạnh của hình chữ nhật. Biết mỗi điểm M trên đường cong (C) luôn có tích khoảng cách đến các cạnh AB, AD bằng $20 m$. Số tiền chi phí để trồng hoa là 200.000 đ trên một mét vuông, số tiền làm sân chơi là 350.000 đ trên một mét vuông. Số tiền hộ gia đình cần dùng để làm sân chơi là bao nhiêu triệu đồng ?



Lời giải:

Trả lời: 683



Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, mỗi đơn vị tương ứng với $1m$. Gọi $M(x, y)$ theo bài ra ta có

$$x \cdot y = 20 \Rightarrow y = \frac{20}{x}, (x > 0)$$

Phương trình đường $DC: y = 40$

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{20}{x} = 40 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

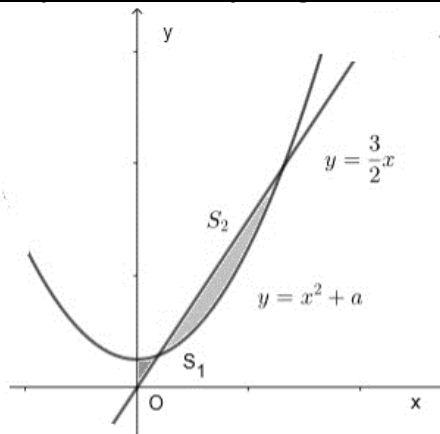
Diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ là $S = 40 \cdot 50 = 2000 (m^2)$.

Diện tích phần sân chơi là $S_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{50} \left| 40 - \frac{20}{x} \right| dx \approx 1888 (m^2)$.

Diện tích phần trồng hoa là $S_2 = S - S_1 = 112 (m^2)$.

Chi phí cần để làm khu vui chơi lớn là $T = 112 \cdot 200000 + 1888 \cdot 350000 = 683.200.000$.

Câu 13: Cho đường thẳng $y = \frac{3}{2}x$ và parabol $y = x^2 + a$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 0,4

Giải toán:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + a = \frac{3}{2}x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 2a = 0$

Để phương trình có 2 nghiệm dương thì $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a < \frac{9}{16} \end{cases}$.

Gọi hai nghiệm đó là $0 < x_1 < x_2$ thì $x_2 = \frac{3 + \sqrt{9 - 16a}}{4}$.

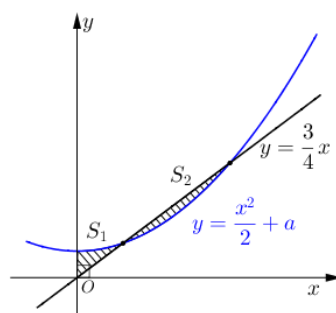
Để $S_1 = S_2$ khi và chỉ khi $\int_0^{x_2} \left(x^2 + a - \frac{3}{2}x \right) dx = 0$

Ta có: $\int_0^{x_2} \left(x^2 + a - \frac{3}{2}x \right) dx = 0 \Leftrightarrow \frac{x_2^3}{3} + ax_2 - \frac{3}{4}x_2^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{3 + \sqrt{9 - 16a}}{4} \right)^3}{3} + a \cdot \frac{3 + \sqrt{9 - 16a}}{4} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 16a}}{4} \right)^2 = 0$$

Giải nhanh bằng máy tính cho kết quả $x = 0,421875 \approx 0,4$.

Câu 14: Cho đường thẳng $y = \frac{3}{4}x$ và parabol $y = \frac{1}{2}x^2 + a$, (a là tham số thực dương). Gọi S_1 , S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 0,2



Ta có phương trình hoành độ giao điểm $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 4a = 0$.

Theo đề bài phương trình có hai nghiệm $0 < x_1 < x_2$ thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3}{2} & (*) \\ x_1 x_2 = 2a & (**) \end{cases}$.

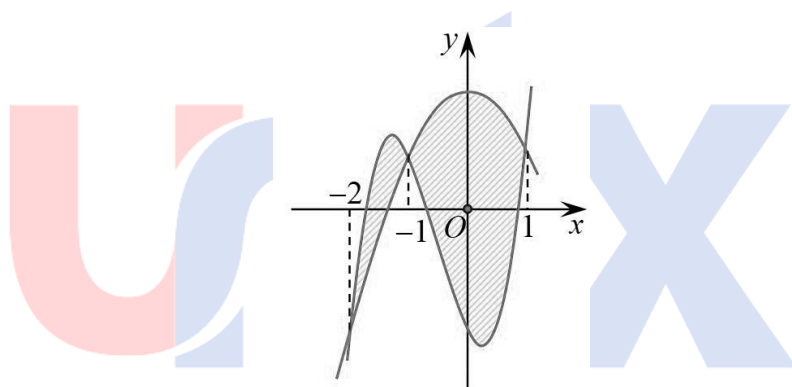
$$S_1 - S_2 = 0 \Leftrightarrow \int_0^{x_1} \left| \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a \right| dx + \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a \right| dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^{x_2} \left| \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a \right| dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + ax \right|_0^{x_2} = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{6}x_2^3 - \frac{3}{8}x_2^2 + ax_2 \right| = 0 \Rightarrow a = -\frac{x_2^2}{6} + \frac{3x_2}{8} \quad (***)$$

$$\text{Từ } (*) \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} - x_2, \text{ thay vào } (**) \Rightarrow \left(\frac{3}{2} - x_2 \right) x_2 = -\frac{x_2^2}{3} + \frac{3x_2}{4} \Leftrightarrow \frac{2x_2^2}{3} - \frac{3x_2}{4} = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{9}{8}$$

$$\xrightarrow{(***)} a = \frac{27}{128} \approx 0,2.$$

Câu 15: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2 ; -1 ; 1 .



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 6,2

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f(x)$ và $g(x)$ là

$$ax^3 + bx^2 + cx - 2 = dx^2 + ex + 2 \Leftrightarrow a.x^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 4 = 0. \quad (*)$$

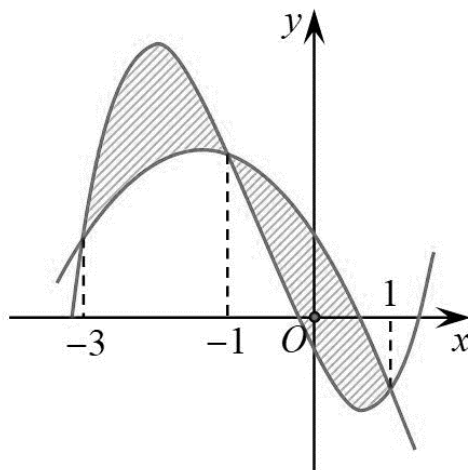
Do đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại ba điểm suy ra phương trình $(*)$ có ba nghiệm $x = -2$; $x = -1$; $x = 1$. Ta được

$$ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 4 = k(x+2)(x+1)(x-1).$$

Khi đó $-4 = -2k \Rightarrow k = 2$.

$$\text{Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là } \int_{-2}^1 |2(x+2)(x+1)(x-1)| dx = \frac{37}{6}.$$

Câu 16: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là -3 ; -1 ; 1 . Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng



Lời giải

Trả lời: 4

Cách 1:

Xét phương trình $ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2} = dx^2 + ex + 1 \Leftrightarrow ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2} = 0$ có 3

nghiệm lần lượt là $-3; -1; 1$ nên suy ra
$$\begin{cases} -27a + 9(b-d) - 3(c-e) - \frac{3}{2} = 0 \\ -a + (b-d) - (c-e) - \frac{3}{2} = 0 \\ a + (b-d) + (c-e) - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-d = \frac{3}{2} \\ a = \frac{1}{2} \\ c-e = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $f(x) - g(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng

$$S = \int_{-3}^{-1} (f(x) - g(x)) dx + \int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx$$

$$\Leftrightarrow S = \int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \right) dx - \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \right) dx = 2 + 2 = 4.$$

Cách 2:

Ta có: $f(x) - g(x) = a(x+3)(x+1)(x-1)$.

Suy ra $a(x+3)(x+1)(x-1) = ax^3 + (b-d)x^2 + (c-d)x - \frac{3}{2}$

Xét hệ số tự do suy ra: $-3a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Do đó: $f(x) - g(x) = \frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1)$.

Diện tích bằng: $S = \int_{-3}^{-1} [f(x) - g(x)] dx + \int_{-1}^1 [g(x) - f(x)] dx$

$\Leftrightarrow S = \frac{1}{2} \int_{-3}^{-1} (x+3)(x+1)(x-1) dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x+3)(x+1)(x-1) dx = 4.$

Câu 17: Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển



động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng $a \text{ (m/s}^2\text{)}$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

Lời giải

Trả lời: 25

Ta có $v_B(t) = \int a \cdot dt = at + C$, $v_B(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow v_B(t) = at$.

Quãng đường chất điểm A đi được trong 25 giây là

$$S_A = \int_0^{25} \left(\frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t \right) dt = \left(\frac{1}{300}t^3 + \frac{13}{60}t^2 \right) \Big|_0^{25} = \frac{375}{2}.$$

Quãng đường chất điểm B đi được trong 15 giây là

$$S_B = \int_0^{15} at \cdot dt = \frac{at^2}{2} \Big|_0^{15} = \frac{225a}{2}.$$

$$\text{Ta có } \frac{375}{2} = \frac{225a}{2} \Leftrightarrow a = \frac{5}{3}.$$

Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A là $v_B(15) = \frac{5}{3} \cdot 15 = 25 \text{ (m/s)}$.

Câu 18: Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}t \text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a \text{ (m/s}^2\text{)}$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

Lời giải

Trả lời: 30

Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t) = \int a dt = at + C$ mà $v_B(0) = 0$ nên $v_B(t) = at$.

Do từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi chất điểm B đuổi kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được bằng nhau. Do đó

$$\int_0^{18} \left(\frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}t \right) dt = \int_0^{15} at dt \Leftrightarrow 225 = a \cdot \frac{225}{2} \Leftrightarrow a = 2$$

Vậy, vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(t) = 2 \cdot 15 = 30 \text{ (m/s)}$.

Câu 19: Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

Lời giải

Trả lời: 10

Xét phương trình $-5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2$. Do vậy, kể từ lúc người lái đạp phanh thì sau 2s ô tô dừng hẳn.

Quãng đường ô tô đi được kể từ lúc người lái đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn là



$$s = \int_0^2 (-5t + 10) dt = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 10t \right) \Big|_0^2 = 10m.$$

Câu 20: Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a (m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

Lời giải

Trả lời: 16

Quãng đường chất điểm A đi từ đầu đến khi B đuổi kịp là $S = \int_0^{15} \left(\frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t \right) dt = 96(m)$.

Vận tốc của chất điểm B là $v_B(t) = \int a dt = at + C$.

Tại thời điểm $t = 3$ vật B bắt đầu từ trạng thái nghỉ nên $v_B(3) = 0 \Leftrightarrow C = -3a$.

Lại có quãng đường chất điểm B đi được đến khi gặp A là

$$S_2 = \int_3^{15} (at - 3a) dt = \left(\frac{at^2}{2} - 3at \right) \Big|_3^{15} = 72a(m).$$

$$\text{Vậy } 72a = 96 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3} (m/s^2).$$

Tại thời điểm đuổi kịp A thì vận tốc của B là $v_B(15) = 16(m/s)$.

Câu 21: Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng $a (m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

Lời giải

Trả lời: 15

Thời gian tính từ khi A xuất phát đến khi bị B đuổi kịp là 15 giây, suy ra quãng đường đi được

$$\text{tới lúc đó là } \int_0^{15} v(t) dt = \int_0^{15} \left(\frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t \right) dt = \left(\frac{1}{540}t^3 + \frac{11}{36}t^2 \right) \Big|_0^{15} = 75(m).$$

Vận tốc của chất điểm B là $y(t) = \int a dt = at + C$ (C là hằng số); do B xuất phát từ trạng thái nghỉ nên có $y(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0$;

Quãng đường của B từ khi xuất phát đến khi đuổi kịp A là

$$\int_0^{10} y(t) dt = 75 \Leftrightarrow \int_0^{10} at dt = 75 \Leftrightarrow \frac{a.t^2}{2} \Big|_0^{10} = 75 \Leftrightarrow 50a = 75 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

Vậy có $y(t) = \frac{3t}{2}$; suy ra vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $y(10) = 15(m/s)$.



Câu 22: Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật đó bắt đầu chuyển động và $s(m)$ là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 108

Vận tốc của vật chuyển động là $v = s' = -\frac{3}{2}t^2 + 12t = f(t)$

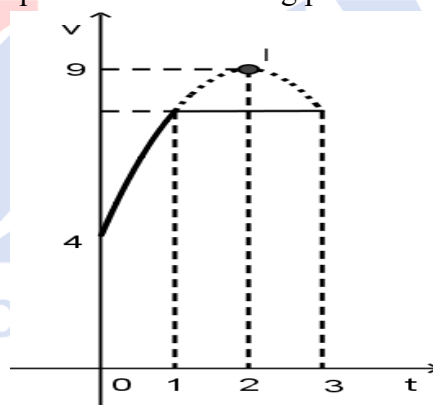
Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[0;6]$

Ta có $f'(t) = -3t + 12 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \in [0;6]$

$f(0) = 0; f(4) = 24; f(6) = 18$

Vậy vận tốc lớn nhất là $24(m/s)$.

Câu 23: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 21,6

Gọi phương trình của parabol $v = at^2 + bt + c$ ta có hệ như sau:
$$\begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ c = 4 \\ a = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

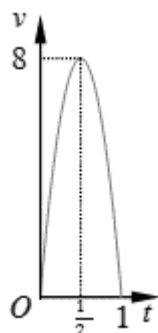
Với $t = 1$ ta có $v = \frac{31}{4}$.

Vậy quãng đường vật chuyển động được là $s = \int_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4\right) dt + \int_1^3 \frac{31}{4} dt = \frac{259}{12} \approx 21,583$

Câu 24: Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v phụ thuộc vào thời gian t có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng

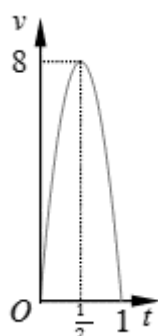


đường s người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 4,5



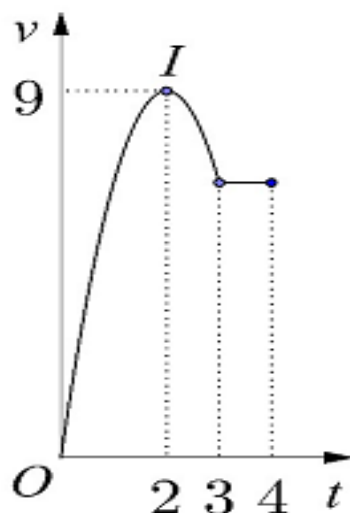
Gọi parabol là $(P): y = ax^2 + bx + c$. Từ hình vẽ ta có (P) đi qua $O(0; 0)$, $A(1; 0)$ và điểm $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$.

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -32 \\ b = 32 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Suy ra $(P): y = -32x^2 + 32x$.

Vậy quãng đường người đó đi được là $s = \int_0^{\frac{3}{4}} (-32x^2 + 32x) dx = 4,5$.

Câu 25: Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v phụ thuộc thời gian t có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.



Lời giải

Trả lời: 27

Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$.

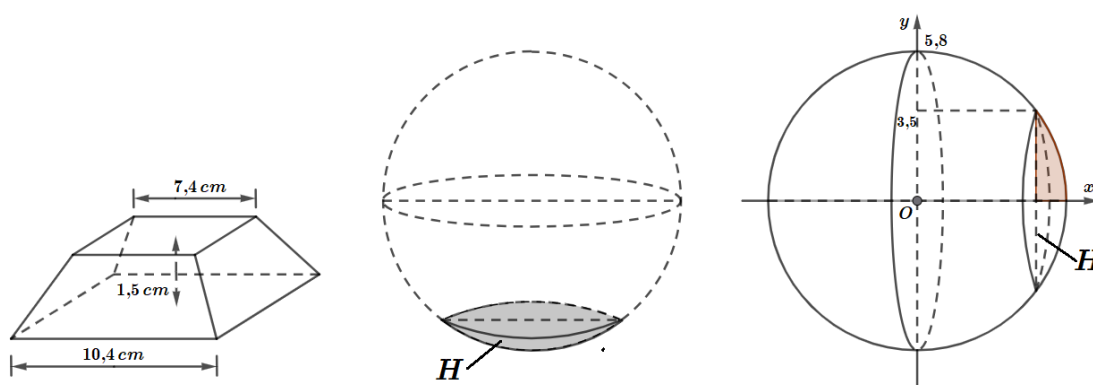
Vì (P) qua $O(0;0)$ và có đỉnh $I(2;9)$ nên dễ tìm được phương trình là $y = \frac{-9}{4}x^2 + 9x$.

Ngoài ra tại $x = 3$ ta có $y = \frac{27}{4}$

Vậy quãng đường cần tìm là: $S = \int_0^3 \left(\frac{-9}{4}x^2 + 9x \right) dx + \int_3^4 \frac{27}{4} dx = 27 \text{ (km)}$.

DẠNG 2: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH THỂ TÍCH

Câu 26: (TNTHPT-2025-MĐ-0101) Để đặt được một vật trang trí trên mặt bàn, người ta thiết kế một chân đế như sau. Lấy một khối gỗ có dạng khối chóp cắt tứ giác đều với độ dài hai cạnh đáy lần lượt bằng $7,4\text{cm}$ và $10,4\text{cm}$, bề dày của khối gỗ bằng $1,5\text{cm}$. Sau đó khoét bỏ đi một phần của khối gỗ sao cho phần đó có dạng vật thể H , ở đó H nhận được bằng cách cắt khối cầu bán kính $5,8\text{cm}$ bởi một mặt phẳng cắt mà mặt cắt là hình tròn bán kính $3,5\text{cm}$ (xem hình dưới).



Thể tích của khối chân đế bằng bao nhiêu centimet khối (không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần mười)?

Lời giải

Trả lời: 96,5

Thể tích của hình chóp cắt đều là $\frac{1}{3} \cdot 1,5 \cdot (10,4^2 + 7,4^2 + 10,4 \cdot 7,4) = \frac{5997}{50}$.

Xét phương trình đường tròn $x^2 + y^2 = 5,8^2$.



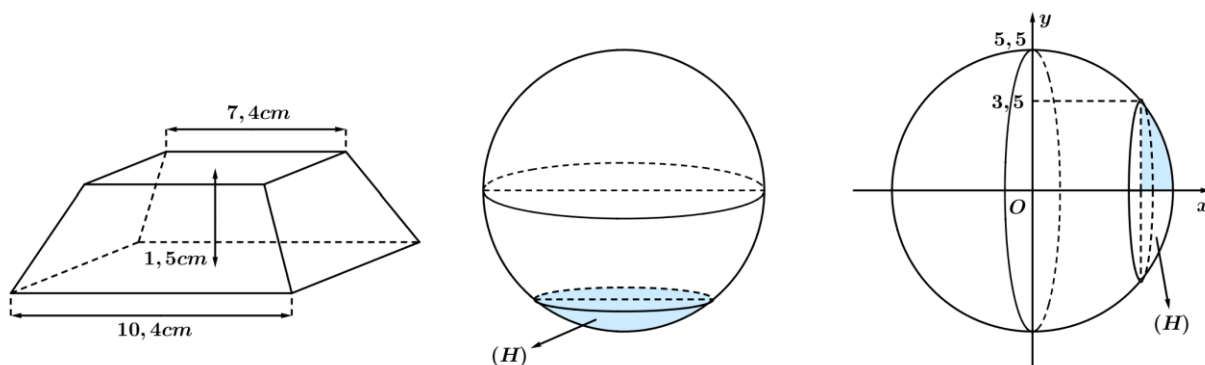
Khi đó cung trên của đường tròn có phương trình là $y = \sqrt{5,8^2 - x^2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{5,8^2 - x^2} = 3,5 \Rightarrow x \approx 4,625$.

Khi đó, thể tích của phần chỏm cầu là $\pi \int_{4,625}^{5,8} (\sqrt{5,8^2 - x^2})^2 dx$.

Vậy thể tích của chân đế là $V = \frac{5997}{50} - \pi \int_{4,625}^{5,8} (\sqrt{5,8^2 - x^2})^2 dx \approx 96,5$.

Câu 27: (TNTHPT-2025-MĐ-0102) Để đặt được một vật trang trí trên mặt bàn, người ta thiết kế một chân đế như sau. Lấy một khối gỗ có dạng khối chóp cụt tứ giác đều với độ dài hai cạnh đáy lần lượt bằng $7,4cm$ và $10,4cm$, bề dày khối gỗ bằng $1,5cm$. Sau đó khoét bỏ đi một phần của khối gỗ sao cho phần đó có dạng vật thể H , ở đó H nhận được bằng cách cắt khối cầu bán kính $5,5cm$ bởi một mặt phẳng cắt mà mặt cắt là hình tròn bán kính $3,5cm$ (xem hình dưới)



Thể tích của khối chân đế bằng bao nhiêu centimet khối (không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 94,7.

Xét trên mặt phẳng tọa độ Oxy có đường tròn tâm gốc tọa độ O , bán kính $5,5cm$ là đường tròn thiết diện lớn nhất cắt khối cầu đề cho. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua tâm O của khối cầu và (Q) là mặt phẳng song song với (P) sao cho cách khối cầu 1 khoảng là a và biết rằng đường tròn giao tuyến tạo bởi (Q) có bán kính bằng $3,5cm$.

Khi ấy a là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm giữa đường tròn

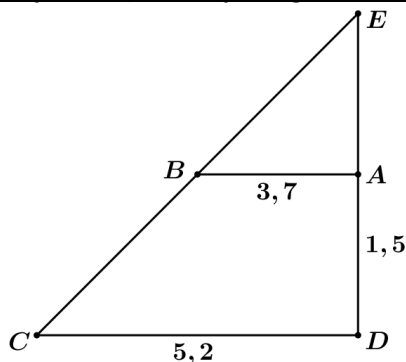
$(C): y = \sqrt{5,5^2 - x^2}$ và đường thẳng $y = 3,5$. Tức ta có phương trình sau:

$$\sqrt{5,5^2 - x^2} = 3,5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5,5^2 - 3,5^2} = 3\sqrt{2}$$

Nhận thấy vật thể H để khoét vào khối chóp cụt có dạng là chỏm cầu có bán kính bằng $3,5cm$, khi ấy chiều cao của chỏm này chính bằng $h = 5,5 - a = 5,5 - 3\sqrt{2} (cm) < 1,5cm$ (hợp lệ)

Khi ấy thể tích (H) là: $V_a = \pi \int_{3\sqrt{2}}^{5,5} (\sqrt{5,5^2 - x^2})^2 dx = A (cm^3)$ (1)

Tại khối chóp cụt, ta thực hiện cắt một mặt phẳng qua đường cao khối chóp và vuông góc với hai đáy, khi ấy ta mô hình hóa được mặt cắt là hình thang vuông $ABCD$ như hình vẽ dưới (trong đó A, D lần lượt là tâm mặt đáy bé và đáy lớn của chóp cụt)



Gọi $E = AD \cap BC$,

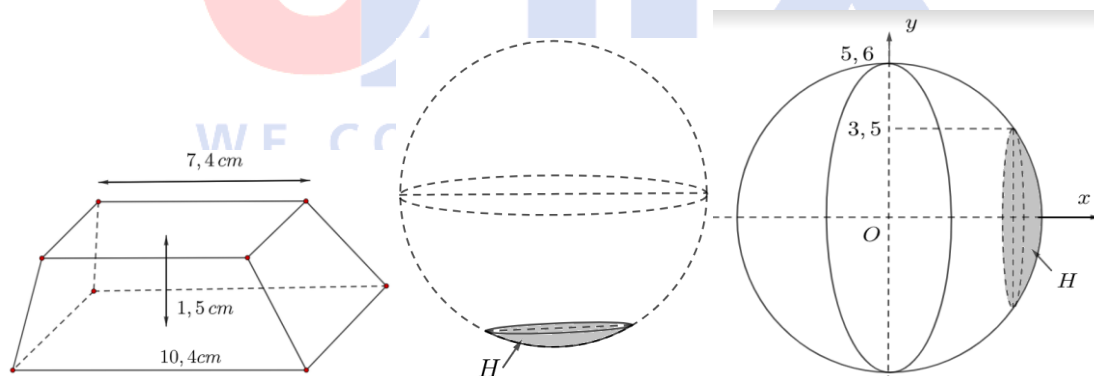
theo định lí Thales ta có: $\frac{EA}{ED} = \frac{AB}{CD} \Leftrightarrow \frac{EA}{EA+1,5} = \frac{3,7}{5,2} \Leftrightarrow EA = 3,7(cm)$

Suy ra $ED = EA + AD = 5,2cm$. Gọi V_1 là thể tích khối chóp đều đáy là hình vuông cạnh $7,4cm$ và đường cao $EA = 3,7cm$ và V_2 là thể tích khối chóp đều đáy là hình vuông cạnh $10,4cm$ và đường cao $ED = 5,2cm$ thì khi ấy thể tích khối chóp cắt bằng:

$$V_b = V_2 - V_1 = \frac{1}{3} \left((10,4)^2 \cdot 5,2 - (7,4)^2 \cdot 3,7 \right) = 119,94 (cm^3) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra thể tích khối chân đế là $V_a - V_b = 119,94 - A = 94,7 (cm^3)$

Câu 28: (TNTHPT-2025-MĐ-0103) Để đặt được một vật trang trí trên mặt bàn, người ta thiết kế một chân đế như sau. Lấy một khối gỗ có dạng khối chóp tứ giác đều với độ dài hai cạnh đáy lần lượt bằng $7,4cm$ và $10,4cm$, bề dày của khối gỗ bằng $1,5cm$. Sau đó khoét bỏ đi một phần của khối gỗ sao cho phần đó có dạng vật thể H , ở đó H nhận được bằng cách cắt khối cầu bán kính $5,6cm$ bởi một mặt phẳng cắt mà mặt cắt là hình tròn bán kính $3,5cm$ (xem hình dưới).



Thể tích của khối chân đế bằng bao nhiêu centimet khối (không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần mười)?

Lời giải

Trả lời: 95,3

Cách 1:

$$\text{Thể tích khối gỗ là } V_1 = \frac{1}{3} \cdot 1,5 \cdot \left(10,4^2 + \sqrt{10,4^2 \cdot 7,4^2} + 7,4^2 \right).$$

Phương trình đường tròn tâm O bán kính $R = 5,6$ là: $x^2 + y^2 = 5,6^2 \Rightarrow y^2 = 5,6^2 - x^2$.

$$\text{Ta có: } OH = \sqrt{5,6^2 - 3,5^2} = \frac{7\sqrt{39}}{10}$$



Thể tích chỏm cầu là $V_H = \pi \cdot \int_{\frac{7\sqrt{39}}{10}}^{5,6} (5,6^2 - x^2) dx$.

Vậy thể tích của chân đế là

$$V = V_1 - V_H = \frac{1}{3} \cdot 1,5 \cdot \left(10,4^2 + \sqrt{10,4^2 \cdot 7,4^2} + 7,4^2 \right) - \pi \cdot \int_{\frac{7\sqrt{39}}{10}}^{5,6} (5,6^2 - x^2) dx \approx 95,3$$

Cách 2:

Thể tích khối gỗ là $V_1 = \frac{1}{3} \cdot 1,5 \cdot \left(10,4^2 + \sqrt{10,4^2 \cdot 7,4^2} + 7,4^2 \right)$.

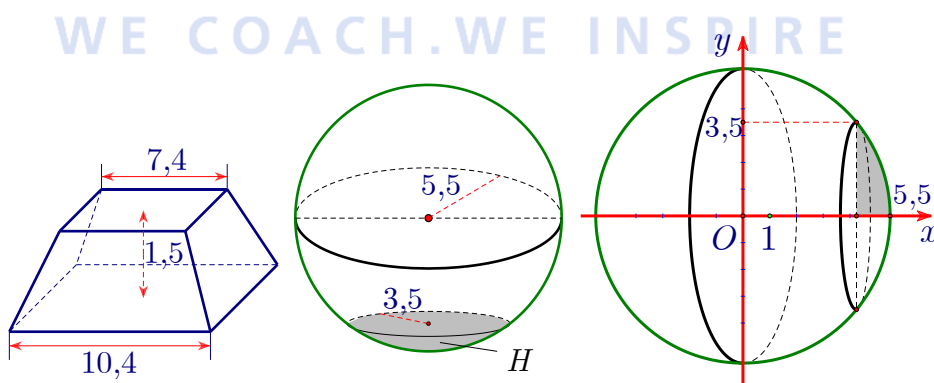
Ta có: $OH = \sqrt{5,6^2 - 3,5^2} = \frac{7\sqrt{39}}{10}$ suy ra chiều cao của chỏm cầu (H) là $h = 5,6 - \frac{7\sqrt{39}}{10}$.

$$\text{Thể tích chỏm cầu là } V_H = \pi \cdot \left(5,6 - \frac{7\sqrt{39}}{10} \right)^2 \cdot \left(5,6 - \frac{5,6 - \frac{7\sqrt{39}}{10}}{3} \right).$$

Vậy thể tích của chân đế là

$$V = V_1 - V_H = \frac{1}{3} \cdot 1,5 \cdot \left(10,4^2 + \sqrt{10,4^2 \cdot 7,4^2} + 7,4^2 \right) - \pi \cdot \left(5,6 - \frac{7\sqrt{39}}{10} \right)^2 \cdot \left(5,6 - \frac{5,6 - \frac{7\sqrt{39}}{10}}{3} \right) \approx 95,3$$

Câu 29: (TNTHPT-2025-MĐ-0104) Để đặt được một vật trang trí trên mặt bàn, người ta thiết kế một chân đế như sau. Lấy một khối gỗ có dạng khối chóp cụt tứ giác đều với độ dài hai cạnh đáy lần lượt bằng 7,4 cm và 10,4 cm, bề dày của khối gỗ bằng 1,5 cm. Sau đó khoét bỏ đi một phần của khối gỗ sao cho phần đó có dạng vật thể H , ở đó H nhận được bằng cách cắt khối cầu bán kính 5,5 cm bởi một mặt phẳng cắt mà mặt cắt là hình tròn bán kính 3,5 cm (xem hình dưới).



Thể tích của khối chân đế bằng bao nhiêu centimet khối (không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần mười)?

Lời giải

Trả lời: 94,7

Thể tích khối chân đế chưa khoét là:

$$V_1 = \frac{h}{3} (B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 B_2}) = \frac{1,5}{3} (10,4^2 + 7,4^2 + \sqrt{10,4^2 \cdot 7,4^2}) = \frac{5997}{50} \text{ cm}^3.$$

Gọi (C) là đường tròn lớn nằm trong mặt phẳng Oxy .

Khi đó, (C): $x^2 + y^2 = 5,5^2 \Rightarrow y^2 = 5,5^2 - x^2$.

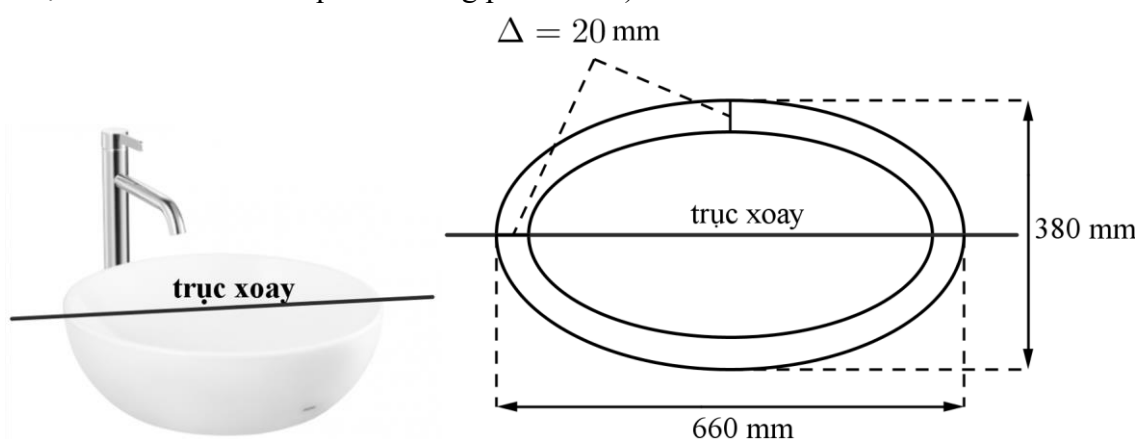


Bán kính mặt cắt bằng 3,5 cm suy ra mặt cắt cắt trục Ox tại $x = \sqrt{5,5^2 - 3,5^2} = 3\sqrt{2}$.

$$\text{Thể tích của khối chỏm cầu: } V_2 = \pi \int_{3\sqrt{2}}^{5,5} y^2 dx = \pi \int_{3\sqrt{2}}^{5,5} (5,5^2 - x^2) dx \approx 25,235 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Vậy thể tích khối chân đế là: } V = V_1 - V_2 = \frac{5997}{50} - 25,235 \approx 94,7 \text{ cm}^3.$$

Câu 30: Hình elip được ứng dụng nhiều trong thực tiễn, đặc biệt là kiến trúc, xây dựng, thiết bị nội thất. Mặt trong (lọt lòng) và ngoài (phủ bì) của một bồn rửa (lavabo) bằng sứ có hình dạng là một nửa khối tròn xoay khi quay quanh một trục của 2 elip có chung các trục đối xứng (hình minh họa). Thông số kĩ thuật mặt trên của bồn rửa: dài $\times$ rộng là 660×380 mm (phủ bì) và elip (lọt lòng) có trục lớn, trục nhỏ ít hơn elip phủ bì một khoảng 40 mm. Tính thể tích chứa nước của bồn rửa (Đơn vị: lít và làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



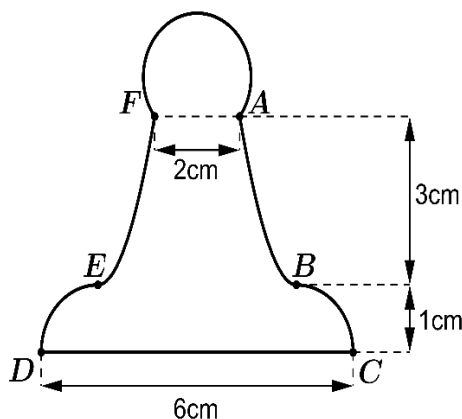
Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy thích hợp với đơn vị trên trục là decimet.

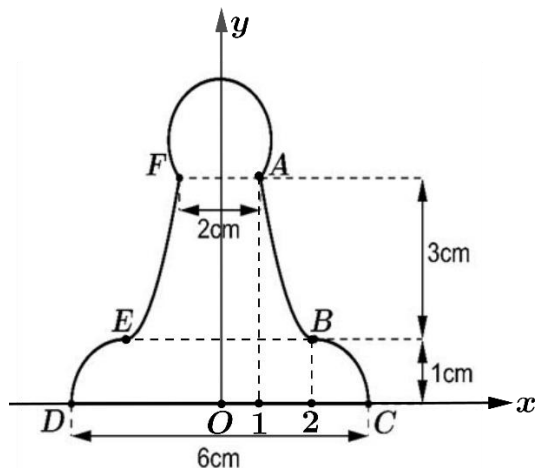
$$\text{Phương trình elip lọt lòng: } (E): \frac{x^2}{3,1^2} + \frac{y^2}{1,7^2} = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1,7 \sqrt{1 - \frac{x^2}{3,1^2}}.$$

$$\text{Thể tích chứa nước của bồn rửa: } V = \frac{1}{2} \cdot \pi \int_{-3,1}^{3,1} 1,7^2 \left(1 - \frac{x^2}{3,1^2} \right) dx \approx 18,8 \text{ lít}.$$

Câu 31: Mô hình của quân tốt trong bàn cờ vua là một khối tròn xoay với mặt cắt qua trục như sau: đầu của quân cờ là một phần của hình cầu có bán kính bằng $\sqrt{2}$ (cm); đường cong AB và EF là một phần của parabol đỉnh B và đỉnh E ; DE và BC là một góc phần tư của đường tròn có bán kính 1cm. Tính thể tích của mô hình quân tốt (đơn vị cm^3 và kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ:

Thiết diện mặt cắt chòm cầu là diện tích hình tròn có bán kính $r = \sqrt{2-x^2} \Rightarrow S = \pi(2-x^2)$

Thể tích của một phần hình cầu (chòm cầu): $V_1 = \pi \int_{-\sqrt{2}}^1 (2-x^2) dx$

Gọi phương trình parabol $(P): ax^2 + bx + c$ đi qua $A(1;4)$ suy ra $4a + b = 0$

(P) đi qua điểm $B(2;1)$ suy ra $4a + 2b + c = 1$ và ta có $-\frac{b}{2a} = 2 \Leftrightarrow 4a + b = 0$

Từ ba phương trình ta tìm được $a = 3; b = -12; c = 13$ nên $(P): y = 3x^2 - 12x + 13 = 3(x-2)^2 + 1$

Khi đó suy ra $x = 2 - \sqrt{\frac{y-1}{3}}$ nên thể tích phần thân quân tốt là: $V_2 = \pi \int_1^4 \left(2 - \sqrt{\frac{y-1}{3}}\right)^2 dy$

Phương trình đường tròn bán kính 1cm là: $(x-2)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1-y^2} + 2$

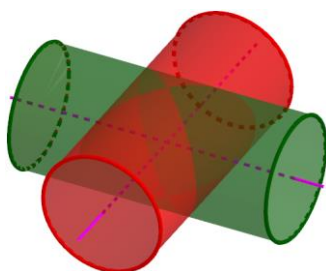
Thể tích của phần đáy là: $V_3 = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{1-y^2} + 2\right)^2 dy$

Do tính chất tích phân không phụ thuộc vào biến nên ta có thể tích của quân tốt là:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \pi \int_{-\sqrt{2}}^1 (2-x^2) dx + \pi \int_1^4 \left(2 - \sqrt{\frac{y-1}{3}}\right)^2 dy + \pi \int_0^1 \left(\sqrt{1-y^2} + 2\right)^2 dy = 52,96896 \approx 53$$

Vậy thể tích của mô hình quân tốt cờ vua bằng 53 cm^3 .

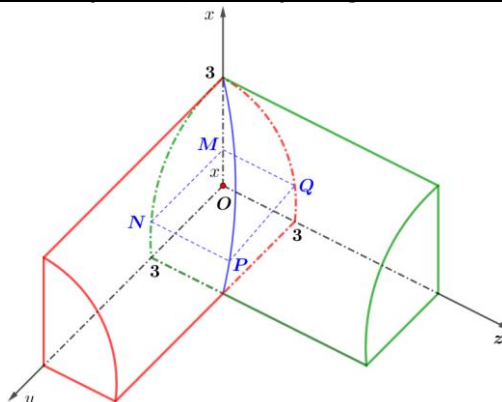
Câu 32: Cho hai khối trụ có bán kính đáy bằng 3 và có trục là hai đường thẳng cắt nhau, vuông góc với nhau (hình vẽ bên dưới). Gọi (H) là phần giao nhau của hai khối trụ đó. Tính thể tích của (H) .



Lời giải

Đáp án: 144

Ta cắt một phần từ mỗi khối trụ và gọi (D) là phần giao nhau của chúng như hình vẽ bên dưới
Hình vẽ



Khi đó $V_{(H)} = 8 \cdot V_{(D)}$.

Đặt hệ trục toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ.

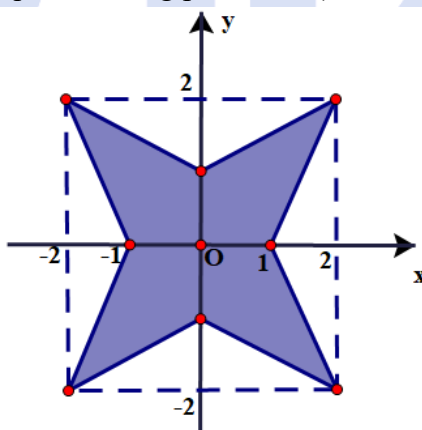
Khi đó mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (Oyz) và cách mặt phẳng (Oyz) một khoảng là x , $0 \leq x \leq 3$, cắt (D) theo thiết diện là hình tứ giác $MNPQ$.

Ta có $MN = NP = PQ = QM = \sqrt{9 - x^2}$ và $MN \perp MQ$ nên tứ giác $MNPQ$ là hình vuông cạnh $\sqrt{9 - x^2}$ và $S_{MNPQ} = 9 - x^2$ (đvdt).

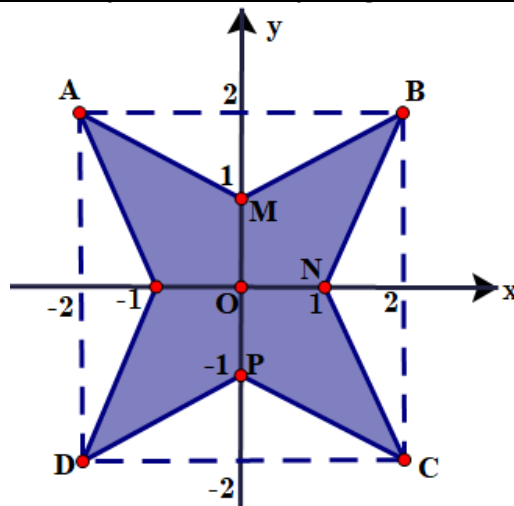
Thể tích $V_{(D)} = \int_0^3 (9 - x^2) dx = 18$ (đvtt).

Suy ra $V_{(H)} = 8 \cdot V_{(D)} = 8 \cdot 18 = 144$ (đvtt).

Câu 33: Bên trong hình vuông cạnh 4, dựng hình sao bốn cánh đều như hình vẽ bên (các kích thước cần thiết cho như ở trong hình bên). Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình sao đó quanh trục Ox (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Ta kí hiệu các điểm như hình vẽ.



Ta có khối tròn xoay đó được tạo thành khi quay hình phẳng $QAMBN$ quanh trục (Ox) .

Mà $S_{OQAM} = S_{ONBM}$ nên thể tích của khối tròn xoay đó sẽ $= 2$ lần thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng $ONBM$ quanh trục (Ox) .

$$\text{Suy ra ta có thể tích } V = 2 \left(\pi \int_0^2 MB^2 dx - \pi \int_1^2 NB^2 dx \right)$$

+) Viết phương trình đường thẳng $MB: M(0;1), B(2;2)$

Có vector chỉ phương $\overrightarrow{MB} = (2;1)$ suy ra một vector pháp tuyến của đường thẳng là $\overrightarrow{n_1} = (-1;2)$

$$\text{Suy ra } MB: -1(x-0) + 2(y-1) = 0 \Leftrightarrow MB: -x + 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$$

+) Tương tự, ta viết được phương trình đường thẳng NB là $-2 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-0) = 0$
 $\Leftrightarrow -2x + y + 2 = 0$

$$\Rightarrow y = 2x - 2. \Rightarrow V = 2 \left(\pi \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x + 1 \right)^2 dx - \pi \int_1^2 (2x - 2)^2 dx \right) = \frac{20}{3} \pi \approx 20,9.$$

Câu 34: Một thủy điện có 9 đập tràn, mỗi đập có thể xả nước với tốc độ tối đa là $500 m^3/s$. Do mưa liên tục nên mực nước trong hồ cao đến mức báo động và cần phải xả lũ khẩn cấp. Khi có lệnh xả lũ, người ta mở trước 5 đập tràn và sau đó 5 phút mở tiếp 4 đập tràn còn lại. Biết rằng tốc độ lưu lượng nước qua mỗi đập tại thời điểm t (giây) là $v(t) = kt (m^3/s)$ cho đến khi đạt tốc độ tối đa, trong đó t là thời gian tính từ lúc đập đó được mở và k là một hằng số. Giả sử sau 30 phút từ khi có lệnh bắt đầu mở đập xả lũ, lưu lượng nước qua mỗi đập đều ở tốc độ tối đa và hồ thủy điện xả được $7387500 m^3$ nước. Khi đó hằng số k bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần mười nếu kết quả không là số nguyên).

Lời giải

Trả lời: 10

$$\text{Từ giả thiết bước đầu ta có được: } v(t) = kt = 500 \Rightarrow t = \frac{500}{k}$$

$$\text{Suy ra hàm số vận tốc của mỗi 9 đập tràn là: } v(t) = \begin{cases} kt, 0 < t < \frac{500}{k} \\ 500, t \geq \frac{500}{k} \end{cases}$$

Khi ấy ta có chi tiết các mốc thời gian như sau:



- $t: 0(s) \rightarrow \frac{500}{k}(s)$: thời điểm tốc độ lưu lượng chưa max.
- $t: \frac{500}{k}(s) \rightarrow 30p = 1800(s)$: thời điểm từ lúc $v(t)$ max đến hết 30 phút xả 5 đập tràn trước
- $t: \frac{500}{k}(s) \rightarrow 30p - 5p = 1500(s)$: thời điểm từ lúc $v(t)$ max cho tới hết 25 phút xả 4 đập tràn

sau (vì 4 đập tràn này mở sau 5 phút kể từ khi 5 đập kia mở).

Khi ấy ta có số lượng nước xả lũ khi mở 5 đập tràn trước là: (1)

$$V_1 = 5 \int_0^{1800} v(t) dt = 5 \left[\int_0^{\frac{500}{k}} (kt) dt + \int_{\frac{500}{k}}^{1800} 500 dt \right] = 5 \left(\frac{125000}{k} + 900000 - \frac{500^2}{k} \right)$$

Và số lượng nước xả lũ khi mở 4 đập tràn sau là: (2)

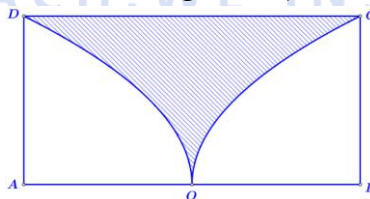
$$V_2 = 4 \int_0^{1500} v(t) dt = 4 \left[\int_0^{\frac{500}{k}} (kt) dt + \int_{\frac{500}{k}}^{1500} 500 dt \right] = 4 \left(\frac{125000}{k} + 750000 - \frac{500^2}{k} \right)$$

Do giả thiết cho rằng sau 30 phút xả tổng 9 đập tràn thì lưu lượng nước qua mỗi đập đều ở tốc độ tối đa và hồ thủy điện xả được $7387500m^3$ nước nên ta có phương trình sau:

$$V_1 + V_2 = 5 \left(\frac{125000}{k} + 900000 - \frac{500^2}{k} \right) + 4 \left(\frac{125000}{k} + 750000 - \frac{500^2}{k} \right) = 7387500$$

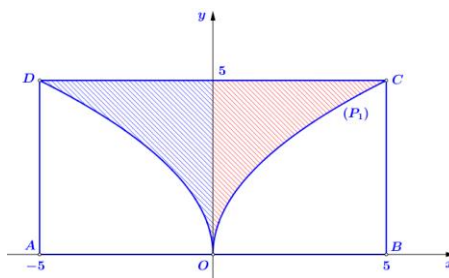
Từ đó giải ra được: $k = 10$.

Câu 35: Từ hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 10$ cm và chiều rộng $BC = 5$ cm; Người ta cắt bỏ miền (R) được giới hạn bởi cạnh CD của hình chữ nhật và hai nửa đường parabol có chung đỉnh là trung điểm của cạnh AB , chúng lần lượt đi qua hai đầu mút C, D của hình chữ nhật đó. Phần còn lại cho quay quanh trục AB để tạo nên một đồ vật làm trang trí, thể tích của vật trang trí đó bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Trả lời: 393



Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục AB ta được khối trụ có

- Bán kính đáy $r = BC = 5$ cm.
- Chiều cao $h = AB = 10$ cm.

Do đó thể tích khối trụ này có thể tích $V_1 = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 250\pi (\text{cm}^3)$



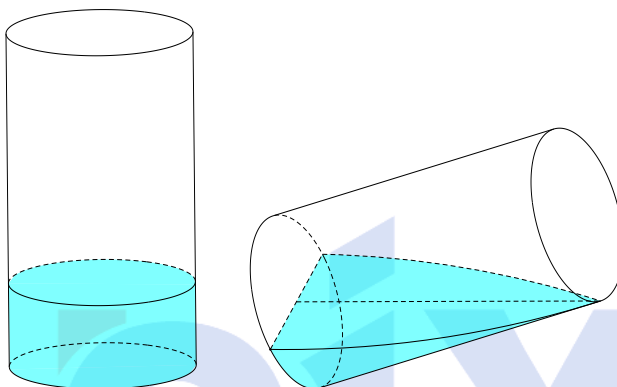
Mặt khác, chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ thì $C(5;5)$ và parabol bên phải trục Ox có dạng $(P_1): y^2 = 2px$.

Ta có $C \in (P_1) \Leftrightarrow p = \frac{5}{2} \Rightarrow (P_1): y^2 = 5x$ hay $y = \sqrt{5x}$.

Khi đó miền (R) khi quay quanh trục Ox có thể tích $V_2 = 2\pi \int_0^5 [5^2 - 5x] dx = 2\pi \left(25x - \frac{5}{2}x^2 \right) \Big|_0^5 = 125\pi$

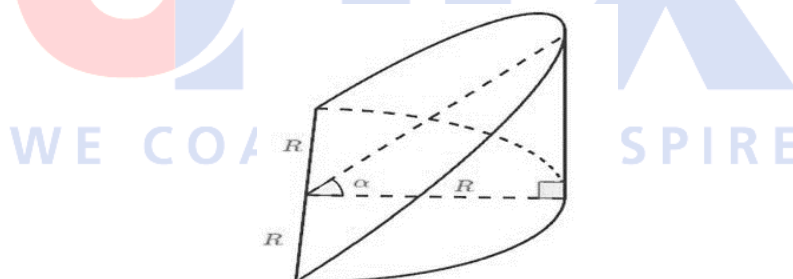
Vậy thể tích phần còn lại là $V = V_1 - V_2 = 125\pi (\text{cm}^3) \approx 393 (\text{cm}^3)$.

Câu 36: Có một cốc nước thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 6cm, chiều cao lòng cốc là 10cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



Lời giải

Trả lời: 240



Xét thiết diện cắt cốc thủy tinh vuông góc với đường kính tại vị trí bất kỳ có:

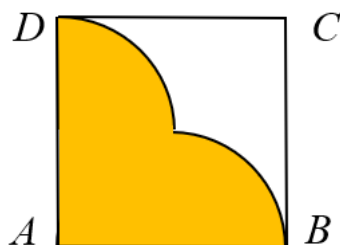
$$S(x) = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \tan \alpha \Rightarrow S(x) = \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \tan \alpha.$$

Thể tích hình cái nêm là: $V = \frac{1}{2} \tan \alpha \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha.$

Thể tích khối nước tạo thành khi nguyên cốc có hình dạng cái nêm nên $V_{kn} = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha.$

$$\Rightarrow V_{kn} = \frac{2}{3} R^3 \cdot \frac{h}{R} = 240 \text{ cm}^3.$$

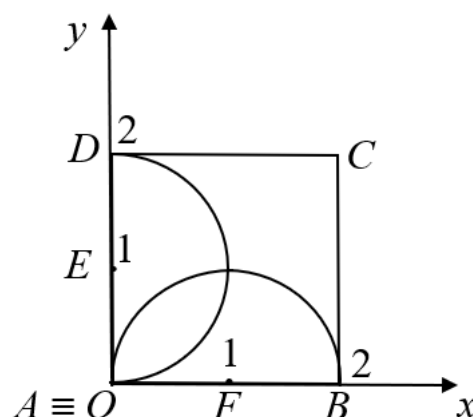
Câu 37: Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) quanh trục AB . Miền (R) được giới hạn bởi các cạnh AB , AD của hình vuông $ABCD$ và các cung phân tư của các đường tròn bán kính bằng 1 cm với tâm lần lượt là trung điểm của các cạnh AD , AB .



Tính thể tích của vật trang trí đó. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 12,3



Chọn trục Ox chứa điểm B , trục Oy chứa điểm D , và gốc tọa độ O trùng điểm A .

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, AB . Khi đó $E(0; 1), F(1; 0)$.

*Phương trình đường tròn có tâm $E(0; 1)$ và đường kính $AD = 2$ là: $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Suy ra phương trình cung trên của đường tròn tâm E là: $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$

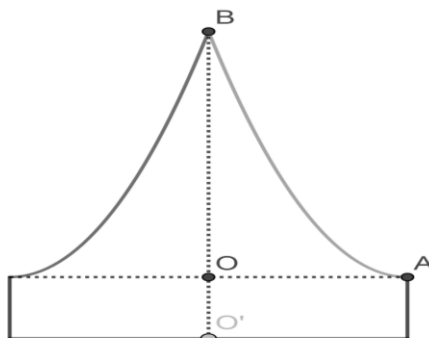
*Phương trình đường tròn có tâm $F(1; 0)$ và đường kính $AB = 2$ là: $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

Suy ra phương trình cung trên của đường tròn tâm F là: $y = \sqrt{1 - (x - 1)^2}$

Vậy, thể tích vật trang trí là:

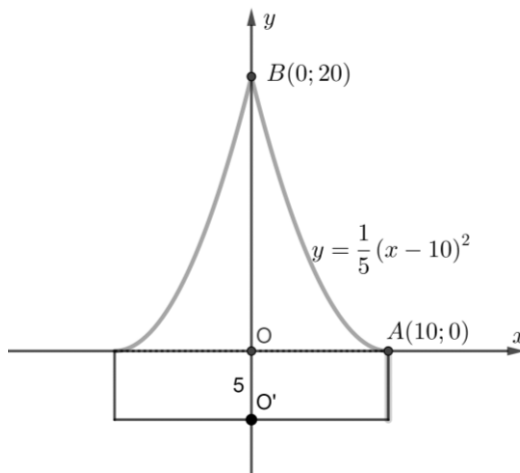
$$V = \pi \int_0^1 (1 + \sqrt{1 - x^2})^2 \cdot dx + \pi \int_1^2 (1 - (x - 1)^2) \cdot dx \approx 12,3 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Câu 38: Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ “cách điệu” cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO' = 5$ cm, $OA = 10$ cm, $OB = 20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A . Thể tích của chiếc mũ bằng (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Trả lời: 2618



Ta gọi thể tích của chiếc mũ là V .

Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA = 10$ cm và đường cao $OO' = 5$ cm là V_1 .

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong AB và hai trục tọa độ quanh trục Oy là V_2 .

Ta có $V = V_1 + V_2$

$$V_1 = 5 \cdot 10^2 \pi = 500\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Do parabol có đỉnh A nên nó có phương trình dạng $(P): y = a(x-10)^2$.

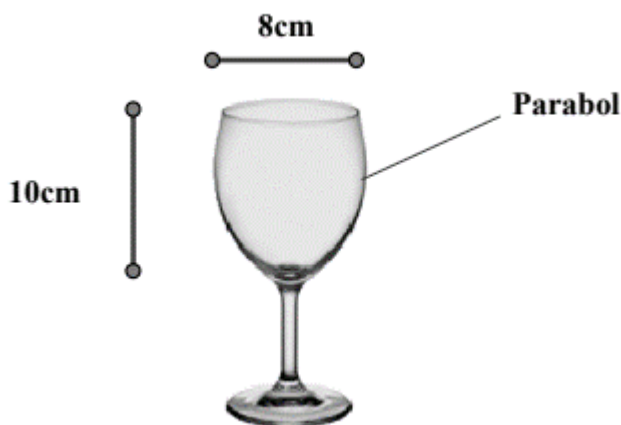
Vì (P) qua điểm $B(0; 20)$ nên $a = \frac{1}{5}$.

Do đó, $(P): y = \frac{1}{5}(x-10)^2$. Từ đó suy ra $x = 10 - \sqrt{5y}$.

$$\text{Suy ra } V_2 = \pi \int_0^{20} (10 - \sqrt{5y})^2 dy = \pi \left(3000 - \frac{8000}{3} \right) = \frac{1000}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

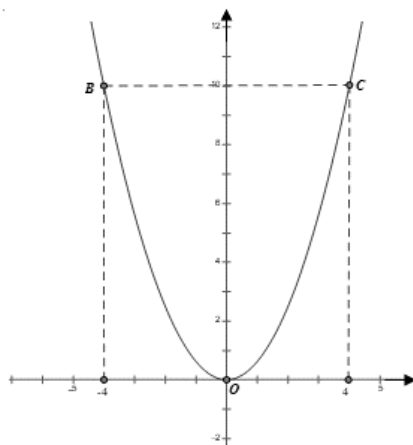
$$\text{Do đó } V = V_1 + V_2 = \frac{1000}{3} \pi + 500\pi = \frac{2500}{3} \pi \approx 2618 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Câu 39: Một cốc rượu có hình dạng tròn xoay và kích thước như hình vẽ, thiết diện dọc của cốc là một đường Parabol. Tính thể tích tối đa mà cốc có thể chứa được. (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

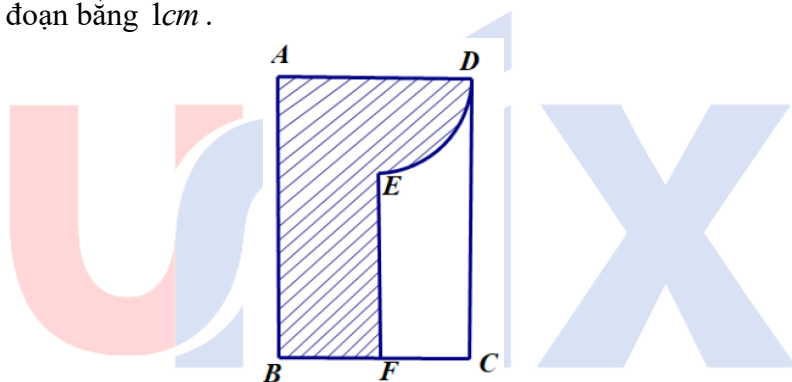
Trả lời: 251



Parabol có phương trình $y = \frac{5}{8}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{5}y$

Thể tích tối đa cốc $V = \pi \int_0^{10} \left(\frac{8}{5}y \right) dy \approx 251$.

Câu 40: Một vật trang trí có dạng khối tròn xoay tạo thành khi quay miền (R) quay xung quanh trục AB . Biết $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = 3cm$, $AD = 2cm$; F là trung điểm của BC ; điểm E cách AD một đoạn bằng $1cm$.



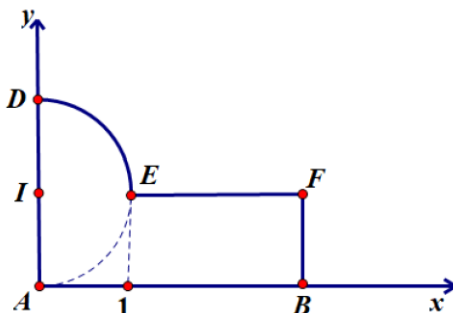
Thể tích của vật thể trang trí trên là (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 16,5

Chọn hệ trục Oxy có $O \equiv A$; $B \in Ox$; $D \in Oy$.

Ta có: $A(0;0)$; $D(0;2)$; $B(3;0)$; $E(1;1)$



Đường tròn tâm $I(0;1)$ chứa cung ED có phương trình là: $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

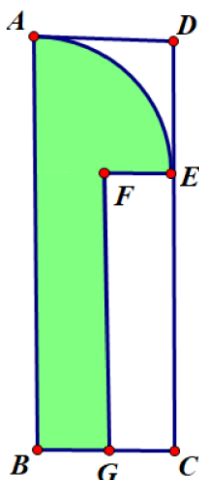
Nên cung trên của đường tròn tâm I là: $y = 1 + \sqrt{1-x^2}$.

Thể tích của vật thể trang trí là:

$$V = \pi \int_0^1 \left(1 + \sqrt{1-x^2} \right)^2 dx + \pi \int_1^3 1^2 dx \approx 16,5 (cm^3).$$



Câu 41: Một chiếc đỉnh tán có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi cho phần tô đậm quay xung quanh cạnh AB . Biết $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 20mm$, $AD = 6mm$, cung AE là cung một phần tư của đường tròn có bán kính bằng $6mm$, điểm F cách AB một đoạn bằng $3mm$

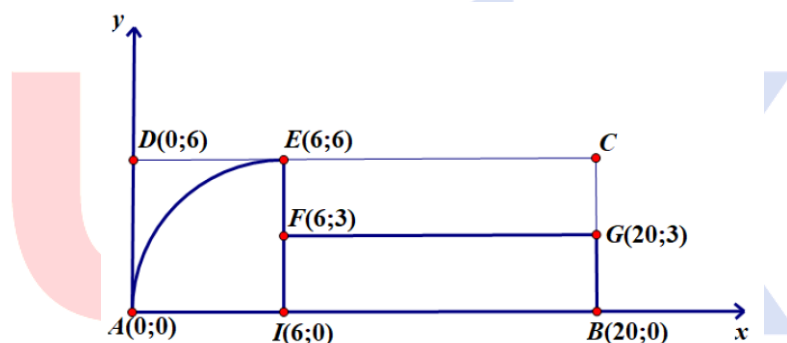


Thể tích của đỉnh tán là (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 848

Chọn hệ trục Oxy có $A \equiv O$; $B(20;0)$; $D(0;6)$.



Khi đó: F là trung điểm của EI và $I(6;0)$; $E(6;6)$; $F(6;3)$; $G(20;3)$.

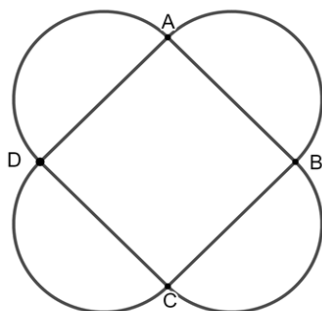
+ Đường tròn tâm $I(6;0)$ bán kính bằng 6 có phương trình là: $(x-6)^2 + y^2 = 36$.

Nên nửa cung phía trên của trục Ox có phương trình là: $y = \sqrt{36 - (x-6)^2}$.

+ Phương trình đường thẳng FG là: $y = 3$.

Vậy thể tích của đỉnh tán là: $V = \pi \int_0^6 [36 - (x-6)^2] dx + \pi \int_6^{20} 3^2 dx \approx 848,2 \text{ (mm}^3\text{)}$

Câu 42: Trong mặt phẳng cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2\sqrt{2}$, phía ngoài hình vuông vẽ thêm bốn nửa đường tròn nhận các cạnh của hình vuông làm đường kính.

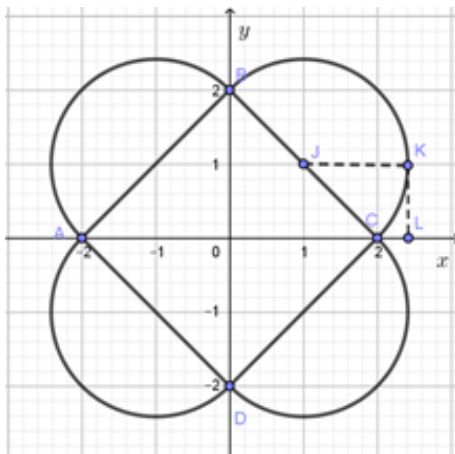




Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình trên quanh đường thẳng AC là (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 73



• Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Ta có: $J(1;1), K(\sqrt{2}+1;1), L(\sqrt{2}+1;0), C(2;0)$.

Phương trình đường tròn tâm $J(1;1)$ bán kính $JB = \sqrt{2}$ là

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2 - (x-1)^2} + 1 = 1 + \sqrt{1 + 2x - x^2}, & \text{khi } y \geq 1 \\ y = -\sqrt{2 - (x-1)^2} + 1 = 1 - \sqrt{1 + 2x - x^2}, & \text{khi } y < 1 \end{cases}$$

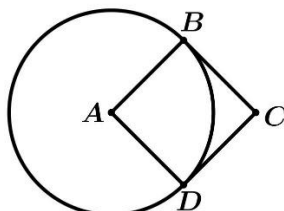
• Gọi (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = 1 + \sqrt{1 + 2x - x^2}$, trục hoành, hai đường thẳng $x = 0, x = 1 + \sqrt{2}$.

Gọi (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = 1 - \sqrt{1 + 2x - x^2}$, trục hoành, hai đường thẳng $x = 2, x = 1 + \sqrt{2}$.

• Thể tích khối tròn xoay cần tính là:

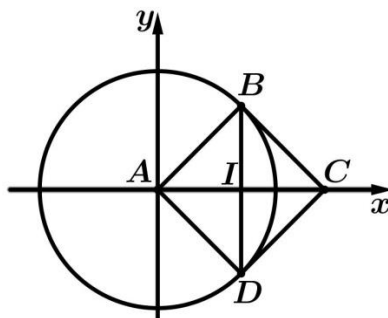
$$V = 2[V_{(H_1)} - V_{(H_2)}] = 2 \left[\pi \int_0^{1+\sqrt{2}} (1 + \sqrt{1 + 2x - x^2})^2 dx - \pi \int_2^{1+\sqrt{2}} (1 - \sqrt{1 + 2x - x^2})^2 dx \right] \approx 72,989 \approx 73.$$

Câu 43: Trên một mảnh giấy vẽ hình tròn có bán kính bằng 2, vẽ chồng lên trên đó một hình vuông có 1 đỉnh là tâm của hình tròn và 2 đỉnh khác nằm trên đường tròn. Tính thể tích khối tròn xoay tạo ra khi quay hình đó quanh trục đối xứng của nó. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 34,5



Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Phương trình đường tròn là $x^2 + y^2 = 4$.

Thể tích khối tròn xoay khi quay phần hình bên trái BD quanh trục đối xứng của nó là

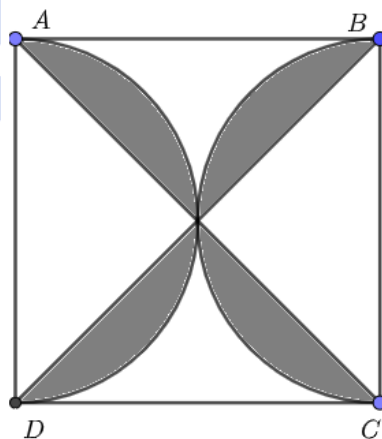
$$V_1 = \pi \int_{-2}^{\sqrt{2}} (4 - x^2) dx = \frac{(16 + 10\sqrt{2})\pi}{3}$$

Thể tích khối tròn xoay khi quay phần hình bên phải BD quanh trục đối xứng của nó là

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi (\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$$

Thể tích cần tìm là $V = V_1 + V_2 = \frac{(16 + 12\sqrt{2})\pi}{3} \approx 34,5$.

Câu 44: Từ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ cạnh $4cm$ vẽ hai đường chéo và hai nửa đường tròn đường kính là hai cạnh AD, BC cắt nhau tạo thành 4 hình cánh quạt như hình vẽ. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay 4 cánh quạt này quanh cạnh CD . (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 28,7

Đặt hệ trục tọa độ Oxy với gốc O là đỉnh D , hai tia Ox, Oy tương ứng là các tia DC, DA .

Phương trình đường tròn đường kính AD là $x^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Phương trình đường tròn đường kính BC là $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Phương trình $AC: x + y - 4 = 0$, $BD: x - y = 0$.

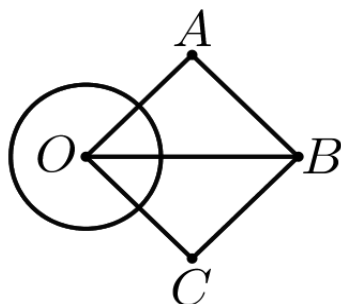
Thể tích cánh quạt đỉnh D quay quanh DC là $V_1 = \pi \int_0^2 x^2 dx - \pi \int_0^2 (2 - \sqrt{4 - x^2})^2 dx$.

Thể tích cánh quạt đỉnh A quay quanh DC là $V_2 = \pi \int_0^2 (2 + \sqrt{4 - x^2})^2 dx - \pi \int_0^2 (4 - x)^2 dx$.



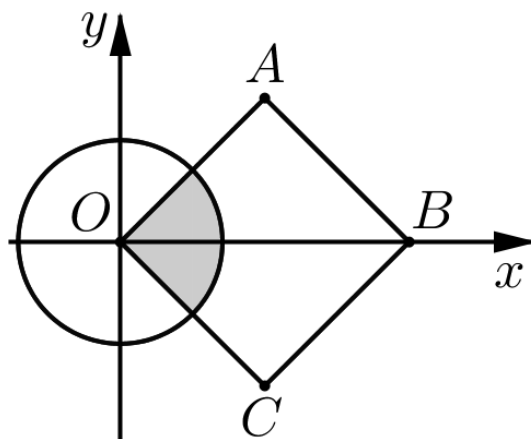
Thể tích cần tìm là $V = 2(V_1 + V_2) = 28,7 \text{ cm}^3$.

Câu 45: Cho hình tròn tâm O có bán kính $R = 2$ và hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình bên xung quanh trục là đường thẳng OB . (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Trả lời: 76



Chọn hệ trục tọa độ Oxy có gốc tọa độ trùng O , tia Ox có giá là OB và tia Oy song song AC .

Khi đó đường tròn (O) có phương trình $x^2 + y^2 = 4$ và đường thẳng OA có phương trình $y = x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng OA và đường tròn (C) là:

$$\sqrt{4 - x^2} = x \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$$

Thể tích vật thể tròn xoay khi quay phần tô đen quanh Ox là:

$$V_1 = \pi \int_0^{\sqrt{2}} x^2 dx + \pi \cdot \int_{\sqrt{2}}^2 (4 - x^2) dx = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} + \frac{(16 - 10\sqrt{2})\pi}{3} = \frac{(16 - 8\sqrt{2})\pi}{3}.$$

Thể tích khối tròn xoay khi quay (O) quanh Ox là khối cầu có $V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{32}{3}\pi$.

Thể tích khối tròn xoay khi quay $OABC$ quanh Ox là

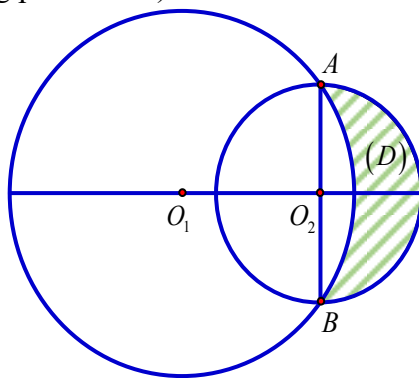
$$V_3 = 2 \times \left[\frac{1}{3}\pi \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot 2\sqrt{2} \right] = \frac{32\sqrt{2}\pi}{3}.$$

$$\text{Vậy thể tích cần tính: } V = V_2 + V_3 - V_1 = \frac{16 + 40\sqrt{2}}{3}\pi = \frac{8\pi(2 + 5\sqrt{2})}{3} \approx 76.$$

Câu 46: Cho hai đường tròn $(O_1; 5)$ và $(O_2; 3)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn (O_2) . Gọi (D) là hình phẳng được giới hạn bởi hai đường tròn. Quay (D)



quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

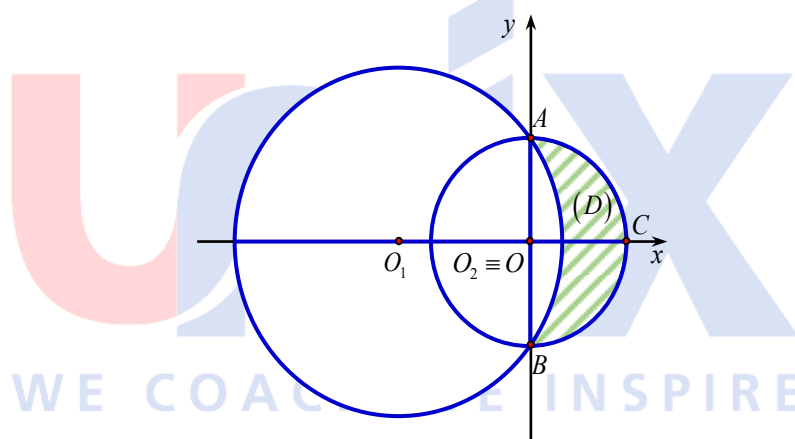
Trả lời: 41,9

Chọn hệ tọa độ Oxy với $O_2 \equiv O$, $O_2C \equiv Ox$, $O_2A \equiv Oy$.

Đoạn $O_1O_2 = \sqrt{O_1A^2 - O_2A^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow (O_1): (x+4)^2 + y^2 = 25$.

Kí hiệu (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $(O_1): (x+4)^2 + y^2 = 25$, $Oy: x=0$, $x \geq 0$.

Kí hiệu (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $(O_2): x^2 + y^2 = 9$, $Oy: x=0$, $x \geq 0$.



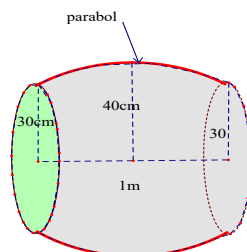
Khi đó thể tích V cần tìm chính bằng thể tích V_2 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_2) xung quanh trục Ox trừ đi thể tích V_1 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_1) xung quanh trục Ox .

Ta có $V_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot 3^3 = 18\pi$.

Lại có $V_1 = \pi \int_0^1 y^2 dx = \pi \int_0^1 [25 - (x+4)^2] dx = \pi \left[25x - \frac{(x+4)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{14\pi}{3}$.

Do đó $V = V_2 - V_1 = 18\pi - \frac{14\pi}{3} = \frac{40\pi}{3} \approx 41,9$.

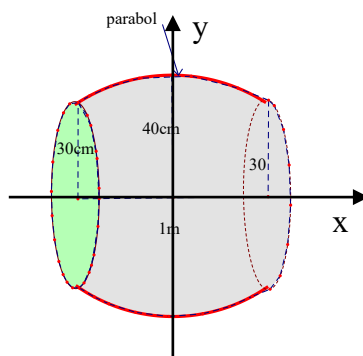
Câu 47: Một cái trống trường có bán kính các đáy là 30 cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có diện tích là $1600\pi (cm^2)$, chiều dài của trống là 1m. Biết rằng mặt phẳng chứa trục cắt mặt xung quanh của trống là các đường Parabol. Hỏi thể tích của cái trống là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Trả lời: 425

Ta có chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy là hình tròn.

có bán kính r có diện tích là $1600\pi (cm^2)$, nên.

$$r^2\pi = 1600\pi \Rightarrow r = 40cm.$$

Ta có: Parabol có đỉnh $I(0; 40)$ và qua $A(50; 30)$.

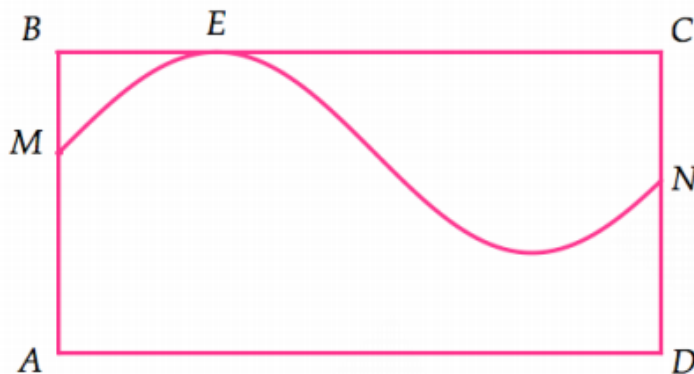
Nên có phương trình $y = -\frac{1}{250}x^2 + 40$.

Thể tích của trống là.

$$V = \pi \int_{-50}^{50} \left(-\frac{1}{250}x^2 + 40 \right)^2 dx = \pi \cdot \frac{406000}{3} cm^3 \approx 425dm^3.$$

Câu 48: Từ một tấm tôn hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 30cm$, $AD = \frac{55\pi}{3}cm$. Người ta cắt miếng tôn

theo đường hình sin như hình vẽ bên để được hai miếng tôn nhỏ. Biết $AM = 20cm$, $CN = 15cm$, $BE = 5\pi cm$. Tính thể tích của lọ hoa được tạo thành bằng cách quay miếng tôn lớn quanh trục AD (đơn vị dm^3) (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải



Trả lời: 83,8

Chọn hệ trục Oxy sao cho $A \equiv O, D \in Ox, B \in Oy$.

Ta có $BE = 5\pi$ suy ra hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 20\pi$.

Suy ra phương trình đồ thị hình sin cần tìm có dạng: $y = a \sin\left(\frac{x}{10}\right) + b$.

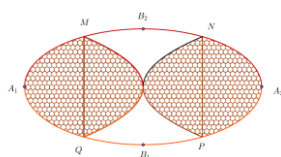
Do đồ thị hình sin đi qua $M(0;20), N\left(\frac{55\pi}{3};15\right)$ nên ta có:

$$\begin{cases} a \sin\left(\frac{1}{10} \cdot 0\right) + b = 20 \\ a \sin\left(\frac{1}{10} \cdot \frac{55\pi}{3}\right) + b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 20 \end{cases}$$

Ta có phương trình đồ thị hình sin cần tìm là $y = 10 \sin\left(\frac{x}{10}\right) + 20$.

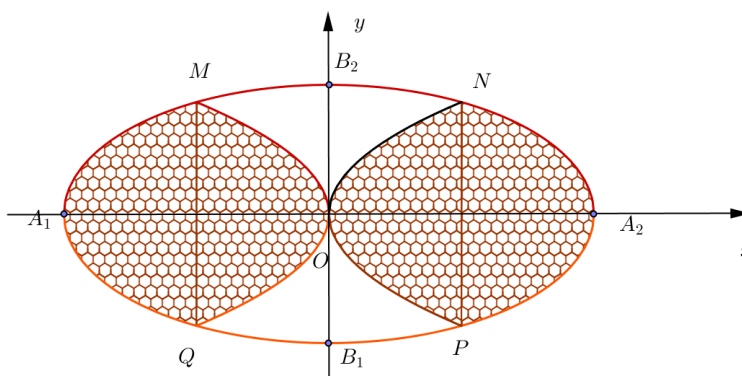
Thể tích cần tìm là: $\pi \int_0^{\frac{55\pi}{3}} \left(10 \sin\left(\frac{x}{10}\right) + 20\right)^2 dx \approx 83788 \text{ cm}^3 \approx 83,8 \text{ dm}^3$.

Câu 49: Mảnh vườn nhà ông An có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Ông dùng 2 đường Parabol có đỉnh là tâm đối xứng của elip cắt elip tại 4 điểm M, N, P, Q như hình vẽ sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MN = 4$ để chia vườn. Phần tô đậm dùng để trồng hoa và phần còn lại để trồng rau. Biết chi phí trồng hoa là 600.000 đồng/m² và trồng rau là 50.000 đồng/m². Hỏi số tiền phải chi gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8 \text{ m}$, $B_1B_2 = 4 \text{ m}$? (đơn vị nghìn đồng)



Lời giải

Trả lời: 4889





Giả sử phương trình elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} A_1A_2 = 8 \\ B_1B_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 8 \\ 2b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow (E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{16 - x^2}$.

Diện tích của elip (E) là $S_{(E)} = \pi ab = 8\pi \text{ (m}^2\text{)}$.

Ta có: $MN = 4 \Rightarrow \begin{cases} M = (P) \cap (E) \\ N = (P) \cap (E) \end{cases} \Rightarrow N(2; y_0)$. Do $N \in (E) \Rightarrow N(2; \sqrt{3})$.

(P) đỉnh O và đi qua $N \Rightarrow (P): x = \frac{2}{3}y^2 \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{x}$

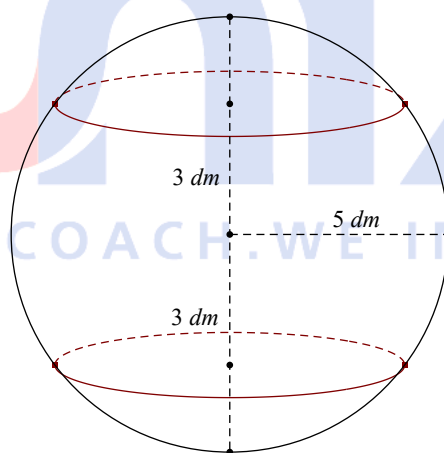
Khi đó, diện tích phần không tô màu là $S = 4 \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{16 - x^2} - \frac{\sqrt{6}}{2} \sqrt{x} \right) dx = 4 \frac{2\pi - \sqrt{3}}{3} \text{ (m}^2\text{)}$.

Diện tích phần tô màu là $S' = S_{(E)} - S = 8\pi - 4 \frac{2\pi - \sqrt{3}}{3} = \frac{16\pi + 4\sqrt{3}}{3}$.

Số tiền phải chi theo yêu cầu bài toán là

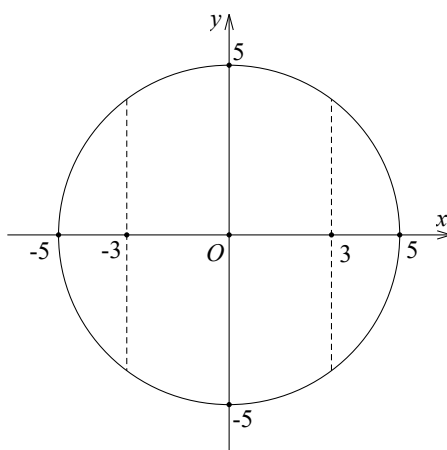
$$T = 600.000 \times \frac{16\pi + 4\sqrt{3}}{3} + 50.000 \times 4 \frac{2\pi - \sqrt{3}}{3} \approx 4.889.000 \text{ đồng.}$$

Câu 50: Người ta làm một cái lu đựng nước bằng cách cắt bỏ 2 chỏm của một khối cầu có bán kính 5 dm bằng 2 mặt phẳng vuông góc với đường kính và cách tâm khối cầu 3 dm. Tính thể tích của chiếc lu. (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Trả lời: 415





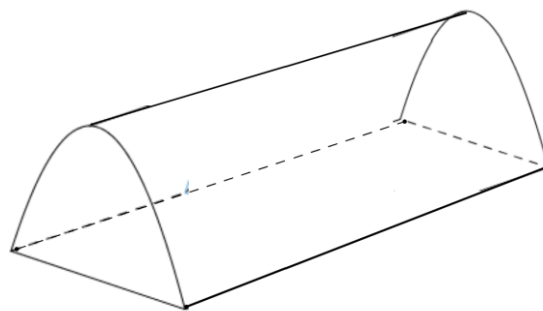
Đặt hệ trục với tâm O là tâm của mặt cầu, đường thẳng đứng là Ox , đường ngang là Oy .

Ta có phương trình của đường tròn lớn là $x^2 + y^2 = 25$.

Thể tích cái lu là thể tích của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình giới hạn bởi các đường cong $y = \sqrt{25 - x^2}$, trục Ox , đường thẳng $x = -3, x = 3$ quay quanh Ox .

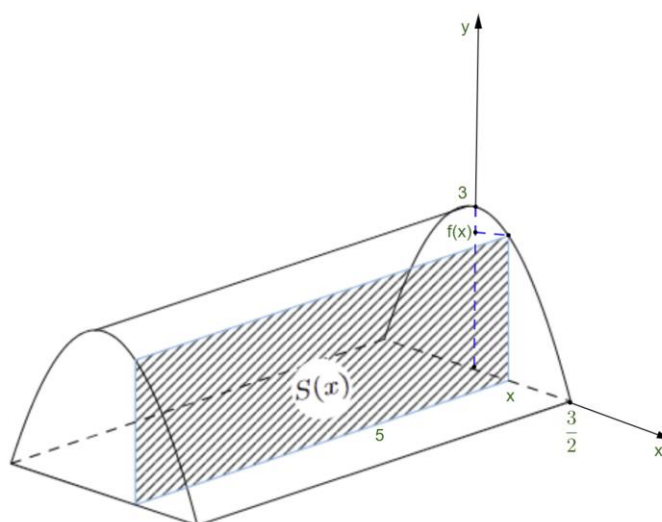
$$V = \pi \int_{-3}^3 (25 - x^2) dx = \pi \left(25x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-3}^3 = 132\pi (\text{dm}^3) \approx 415 (\text{dm}^3).$$

Câu 51: Nhân dịp đi dã ngoại, lớp 12a dự kiến dựng một cái trại có dạng hình parabol như hình vẽ. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước bề ngang 3 mét, chiều dài 5 mét, đỉnh trại cách nền 3 mét. Thể tích phần không gian bên trong lều trại bằng bao nhiêu mét khối?



Lời giải

Trả lời: 30



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, hình dạng khung trại là parabol có phương trình $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, vì đỉnh trại cao 3m và bề ngang rộng 3m nên parabol đi qua điểm $(0; 3)$ và $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

$$\text{Ta có : } \begin{cases} b = 0 \\ 3 = c \\ 0 = a \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -\frac{4}{3} \\ c = 3 \end{cases}$$

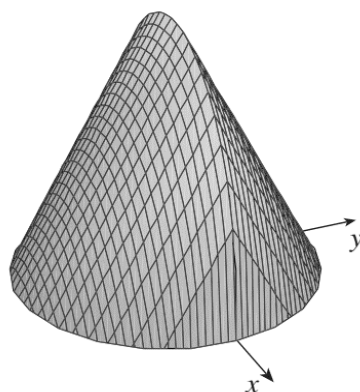


Suy ra parabol có phương trình $y = f(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 3$.

Mỗi mặt phẳng vuông góc Ox tại điểm có hoành độ $x, 0 \leq x \leq h$ cắt khối chót theo mặt cắt là hình chữ nhật có độ dài các cạnh lần lượt là 5 và $|f(x)|$, có diện tích $S(x) = 5 \cdot |f(x)|$, với $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$.

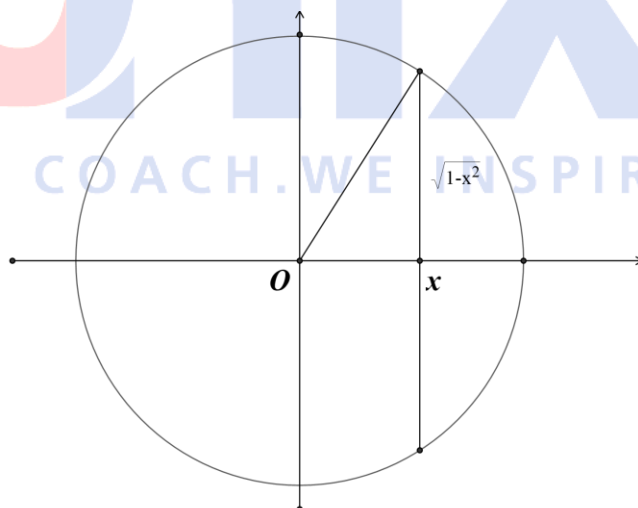
Vậy thể tích phần không gian trong trại là $V = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} 5 \cdot |f(x)| dx = 5 \cdot \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left| -\frac{4}{3}x^2 + 3 \right| dx = 30 \text{ m}^3$.

Câu 52: Cho vật thể đáy là hình tròn có bán kính bằng 1. Khi cắt vật thể bằng mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) thì được thiết diện là một tam giác đều. Tính thể tích V của vật thể đó. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



Lời giải

Trả lời: 2,31



Do vật thể có đáy là đường tròn và khi cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox được thiết diện là tam giác đều do đó vật thể đối xứng qua mặt phẳng vuông góc với trục Oy tại điểm O .

Cạnh của tam giác đều thiết diện là: $a = 2\sqrt{1-x^2}$.

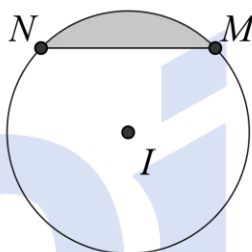
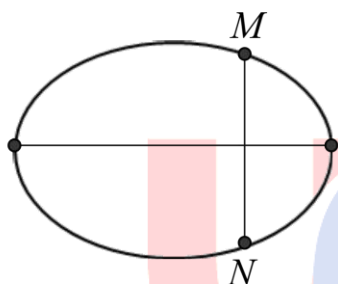
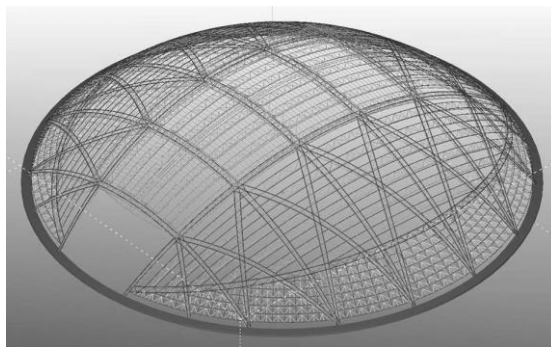
Diện tích tam giác thiết diện là: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = (1-x^2)\sqrt{3}$.

Thể tích khối cần tìm là:

$$V = 2 \int_0^1 S dx = 2 \int_0^1 \sqrt{3} (1-x^2) dx = 2\sqrt{3} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2,31.$$

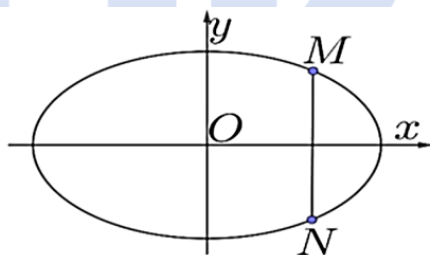


Câu 53: Sân vận động Sport Hub là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip (E) có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$. Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt elip ở M, N thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I với MN là một dây cung và góc $MIN = 90^\circ$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Hỏi thể tích bằng bao nhiêu? (đơn vị dam^3) (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Trả lời: 116



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

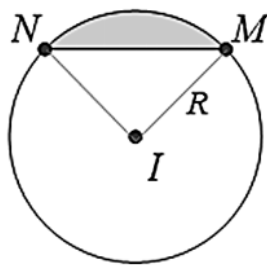
Phương trình chính tắc của E-líp đấy:

$$(E): \frac{x^2}{75^2} + \frac{y^2}{45^2} = 1.$$

$$\text{Gọi } M(x; y) \Rightarrow MN = 2y = 2\sqrt{45^2 \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right)} = 90\sqrt{1 - \frac{x^2}{75^2}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{MN}{\sqrt{2}} = \frac{90}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{75^2}} \Rightarrow R^2 = \frac{90^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right).$$

Ta có công thức diện tích hình quạt: $S_{\text{quat}} = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{360^\circ}$ với α là số đo góc ở tâm chắn cung tương ứng.



Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện, ta có:

$$S(x) = S_{quat} - S_{\triangle IMN} = \frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 = \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\right)R^2 = (\pi - 2)\frac{2025}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right).$$

Thể tích khoảng không gian sản phẩm động là

$$V = \int_{-75}^{75} (\pi - 2)\frac{2025}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right) \approx 115586m^3 \approx 116dam^3.$$

