



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG



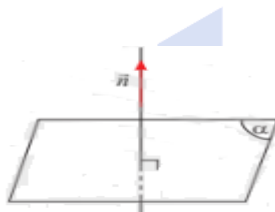
LÝ THUYẾT.

I. VECTƠ PHÁP TUYẾN VÀ CẶP VEC-TƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA MẶT PHẪNG.

1. Định nghĩa.

Cho mặt phẳng (α) .

Nếu vec-tơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với (α) thì $\vec{n}$ được gọi là **vec-tơ pháp tuyến** của (α) .

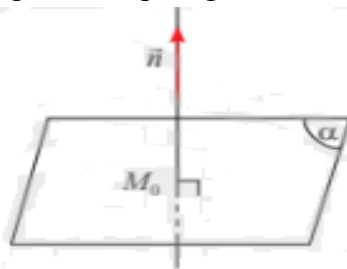


Nếu hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trong (α) thì $\vec{a}$, $\vec{b}$ được gọi là **cặp vec-tơ chỉ phương** của (α) .

2. Chú ý.

Nếu $\vec{n}$ là một vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì $k\vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là một vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vec-tơ pháp tuyến hoặc một điểm và một cặp vec-tơ chỉ phương của mặt phẳng đó.

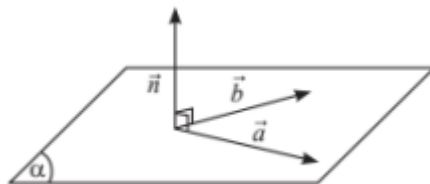


II. XÁC ĐỊNH VEC-TƠ PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẪNG KHI BIẾT MỘT CẶP VEC-TƠ CHỈ PHƯƠNG

1. Định lý.



Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt phẳng (α) nhận hai vec-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ làm cặp vec-tơ chỉ phương thì (α) nhận vec-tơ $\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$ làm vec-tơ pháp tuyến.



2. Chú ý.

Vec-tơ $\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$ được gọi là *tích có hướng của hai vec-tơ* $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Tích có hướng của hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Biểu thức $a_1b_2 - a_2b_1$ thường được kí hiệu $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$. Tương tự, $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2b_3 - a_3b_2$ và

$\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = a_3b_1 - a_1b_3$. Như vậy:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.

III. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẪNG

1. Định nghĩa.

Trong không gian $Oxyz$, phương trình có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, được gọi là **phương trình tổng quát của mặt phẳng**.

2. Nhận xét.

□ Cho mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là $Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó:

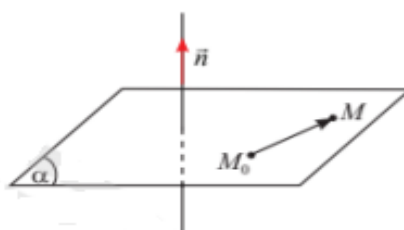
o Mặt phẳng (α) có một vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$.

o $N(x_0; y_0; z_0) \in (\alpha) \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

□ Mỗi phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ (trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0) đều là phương trình của một mặt phẳng xác định.

3. Một số dạng toán viết phương trình mặt phẳng cơ bản

Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và có một vec-tơ pháp tuyến



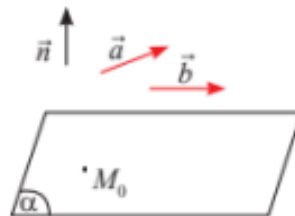


Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\text{hay } Ax + By + Cz + D = 0 \text{ với } D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$

Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và có một cặp vec-tơ chỉ phương

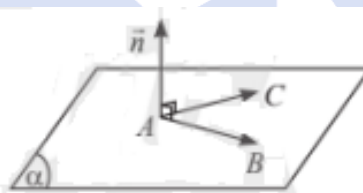


Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có cặp vec-tơ chỉ phương $\vec{a}, \vec{b}$, ta thực hiện như sau:

Tìm một vec-tơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng



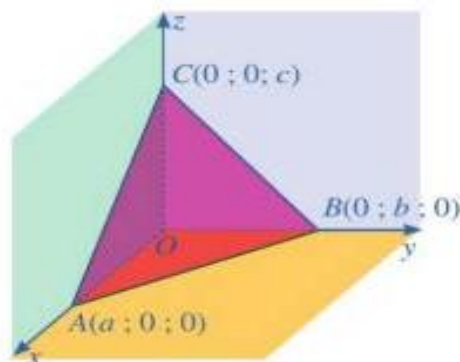
Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng, ta thực hiện như sau:

Tìm cặp vec-tơ chỉ phương, chẳng hạn $\vec{AB}, \vec{AC}$.

Tìm một vec-tơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}]$.

Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng theo đoạn chắn



Phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ là:



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

4. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc

Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có vec-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó:

$$(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có vec-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó:

$$(\alpha_1) \parallel (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Chú ý.

$$(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 = kD_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

$$(\alpha_1) \text{ cắt } (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \text{ và } \vec{n}_2 \text{ không cùng phương.}$$

5. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính theo công thức:

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG KHI BIẾT MỘT ĐIỂM VÀ VECTO PHÁP TUYẾN CỦA NÓ.

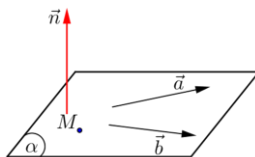


Phương pháp

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$ có dạng:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0 \text{ (với } D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0).$$

Nếu mặt phẳng (P) có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1; \vec{u}_2$ thì (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{u}_1; \vec{u}_2]$



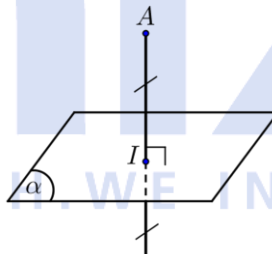
Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) **trung trực** đoạn thẳng AB

Bước 1: Vectơ pháp tuyến của mặt (α) là: $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$.

Bước 2: Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn AB .

Bước 3: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm I và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$.



Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1; 0; -2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1; -1; 2)$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1; 0; -2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1; -1; 2)$ có phương trình là:
 $1(x - 1) - 1(y - 0) + 2(z + 2) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z + 3 = 0$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $x - y + 2z + 3 = 0$.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(0; 1; 2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-2; 1; 0)$.

Lời giải

Vậy phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(0; 1; 2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-2; 1; 0)$ có dạng:
 $-2(x - 0) + 1(y - 1) = 0 \Leftrightarrow -2x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 1 = 0$.



Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua $A(-1;1;1)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n} = (-1; -2; 2)$

Lời giải

Mặt phẳng đi qua $A(-1;1;1)$, có vtpt $\vec{n}(1;2;-2)$, suy ra phương trình mặt phẳng cần tìm là $-1(x+1)-2(y-1)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow -x-2y+2z-1=0$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là?

Lời giải

Ta có: $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (-2;1;0)$.

Vậy phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC có dạng:

$$-2(x-0)+1(y-1)=0 \Leftrightarrow -2x+y-1=0 \Leftrightarrow 2x-y+1=0.$$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;1;1)$, $B(2;1;0)$ và $C(1;-1;2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình là?

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{BC} = (-1;-2;2)$.

Do mặt phẳng vuông góc với đường thẳng BC nên mặt phẳng có một vtpt $\vec{n}(1;2;-2)$.

Mặt phẳng đi qua $A(-1;1;1)$, có vtpt $\vec{n}(1;2;-2)$, suy ra phương trình mặt phẳng cần tìm là $x+2y-2z+1=0$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1;-1;1)$, $B(3;1;1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB nên $I(1;0;1)$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn AB có vtpt là $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (4;2;0) = 2(2;1;0)$.

Phương trình mặt phẳng cần tìm là: $2(x-1)+1(y-0)=0 \Leftrightarrow 2x+y-2=0$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;6;-7)$ và $B(3;2;1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn AB là.

Lời giải

Mặt phẳng trung trực đoạn AB đi qua trung điểm $I(2;4;-3)$ của đoạn AB và nhân $\overrightarrow{AB} = (2;-4;8)$ làm vector pháp tuyến có phương trình:

$$2(x-2)-4(y-4)+8(z+3)=0 \Leftrightarrow x-2y+4z+18=0$$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm $M(1;3;-2)$, cắt các tia

Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C sao cho $\frac{OA}{1} = \frac{OB}{2} = \frac{OC}{4}$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng cắt tia Ox tại $A(a;0;0)$, cắt tia Oy tại $B(0;b;0)$, cắt tia Oz tại



$C(0;0;c)$ có dạng là $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (với $a > 0, b > 0, c > 0$).

Theo đề: $\frac{OA}{1} = \frac{OB}{2} = \frac{OC}{4} \Leftrightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{b}{2} \\ c = 2b \end{cases}$.

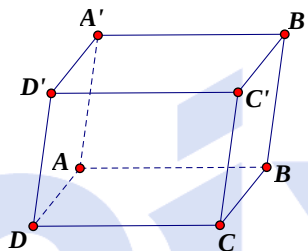
Vì $M(1;3;-2)$ nằm trên mặt phẳng (P) nên ta có: $\frac{1}{b} + \frac{3}{b} + \frac{-2}{2b} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{b} = 1 \Leftrightarrow b = 4$.

Khi đó $a = 2, c = 8$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 1 \Leftrightarrow 4x + 2y + z - 8 = 0$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(-3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $D(0;0;1)$, $A'(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của $C'D$.

Lời giải



Gọi $C'(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (3;2;0)$; $\overrightarrow{AD} = (3;0;1)$; $\overrightarrow{AA'} = (4;2;3)$.

Mà $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AC'} = (10;4;4) \Rightarrow \begin{cases} x = 10 + 3 \\ y = 4 - 0 \\ z = 4 - 0 \end{cases} \Rightarrow C'(13;4;4)$.

Khi đó mặt phẳng trung trực của $C'D$: $\begin{cases} \text{qua } I\left(\frac{13}{2}; 2; \frac{5}{2}\right) \\ \vec{n} = \overrightarrow{C'D} = (13;4;3) \end{cases}$

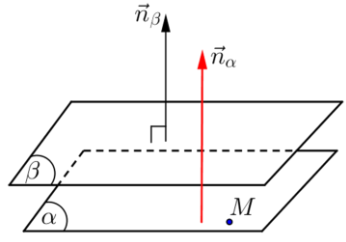
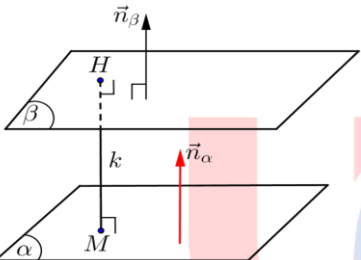
có phương trình là $13\left(x - \frac{13}{2}\right) + 4(y - 2) + 3\left(z - \frac{5}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 13x + 4y + 3z - 100 = 0$.

DẠNG 2: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua 1 điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và song song với 1 mặt phẳng $(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$ cho trước.



Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
(1) Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và song song $(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$. 	⌘ Cách 1: » Véc tơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n}_{(\alpha)} = \vec{n}_{(\beta)} = (A; B; C)$. » Mặt phẳng (α) qua điểm M. ⌘ Cách 2: » Do $(\alpha) // (\beta) \Rightarrow (\alpha): Ax + By + Cz + D' = 0 \ (D \neq D')$ » Thay điểm M vào $(\alpha) \Rightarrow D' = ? \Rightarrow (\alpha)$.
(2) Song song $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ và cách (P) một khoảng bằng k. 	» Vì $(\alpha) // (P) \Rightarrow (\alpha): Ax + By + Cz + D' = 0 \ (D \neq D')$. » Vì (α) cách (P) một khoảng bằng k $\Rightarrow d((\alpha); (P)) = k \xrightarrow{M \in (\alpha)} d(M; (P)) = k$ $\Leftrightarrow \frac{ D - D' }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = k \Rightarrow D' = ?$ » Có $D' \Rightarrow$ phương trình mặt (P) hoàn chỉnh.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(0; 1; 3)$ và song song với mặt phẳng $(Q): 2x - 3z + 1 = 0$.

Lời giải:

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): 2x - 3z + 1 = 0$ nên mặt phẳng (P) có phương trình dạng: $2x - 3z + D = 0 \ (D \neq 1)$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(0; 1; 3)$ nên thay tọa độ điểm M vào phương trình mặt phẳng phải thỏa mãn. Ta được: $2 \cdot 0 - 3 \cdot 3 + D = 0 \Leftrightarrow D = 9$ (thỏa mãn $D \neq 1$).

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $2x - 3z + 9 = 0$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-2; 3; 1)$ và song song với mặt phẳng $(Q): x + 3y - 2z + 2 = 0$.

Lời giải:

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): x + 3y - 2z + 2 = 0$ nên mặt phẳng (P) có phương trình dạng: $(Q): x + 3y - 2z + D = 0 \ (D \neq 2)$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-2; 3; 1)$ nên thay tọa độ điểm M vào phương trình mặt phẳng phải thỏa mãn. Ta được: $-2 + 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + D = 0 \Leftrightarrow D = -5$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $(Q): x + 3y - 2z - 5 = 0$.



Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi điểm $M(3; -1; -2)$ và song song với mặt phẳng $(P): 3x - y + 2z + 4 = 0$.

Lời giải

Vì $(Q) \parallel (P)$ nên $(Q): 3x - y + 2z + m = 0$ ($m \neq -4$).

Mà $M(3; -1; -2) \in (P) \Rightarrow m = -6$ (thỏa mãn).

Vậy $(Q): 3x - y + 2z - 6 = 0$.

DẠNG 3: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG (α) ĐI QUA 3 ĐIỂM A, B, C KHÔNG THẲNG HÀNG.

Phương pháp

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A; B; C$ không thẳng hàng.

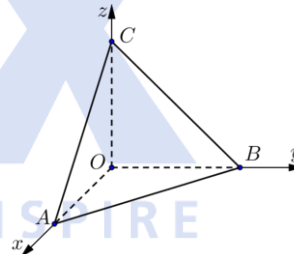
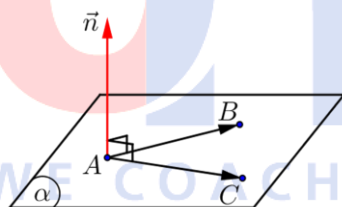
Bước 1: Tìm cặp vector chỉ phương $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Bước 2: Tìm một vector pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$.

Bước 3: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A (hoặc điểm B hoặc điểm C) và có vector pháp tuyến $\vec{n}$.

Phương trình mặt phẳng (P) là phương trình mặt chắn, tức mặt phẳng (P) đi qua

$A(a; 0; 0); B(0; b; 0); C(0; 0; c)$ có dạng: $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.



Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (ABC)

a) Với ba điểm $A(-1; 0; 3), B(2; -1; 1), C(1; -1; 0)$.

b) Với ba điểm $A(1; 0; 2), B(-2; 3; 1), C(3; 2; 1)$.

Lời giải

a) Với ba điểm $A(-1; 0; 3), B(2; -1; 1), C(1; -1; 0)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -1; -2); \overrightarrow{AC} = (2; -1; -3)$

Mặt phẳng (ABC) có vector pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}] = (-1; -5; 1)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $-(x+1) - 5y + z - 3 = 0 \Leftrightarrow -x - 5y + z - 4 = 0$

b) Với ba điểm $A(1; 0; 2), B(-2; 3; 1), C(3; 2; 1)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; -1), \overrightarrow{AC} = (2; 2; -1)$.



Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1; -5; -12)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $-x - 5y - 12z + 25 = 0 \Leftrightarrow x + 5y + 12z - 25 = 0$

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (ABC)

a) Với ba điểm $M(2; 0; 0), N(0; -1; 0), P(0; 0; 2)$.

b) Với ba điểm $M(0; -2; 0), N(3; 0; 0), P(0; 0; -3)$.

Lời giải

a) Với ba điểm $M(2; 0; 0), N(0; -1; 0), P(0; 0; 2)$.

Ta có: $M(2; 0; 0), N(0; -1; 0), P(0; 0; 2) \Rightarrow (MNP): \frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1 \Leftrightarrow x - 2y + z - 2 = 0$

b) Với ba điểm $M(0; -2; 0), N(3; 0; 0), P(0; 0; -3)$.

Ta có: $M(0; -2; 0), N(3; 0; 0), P(0; 0; -3) \Rightarrow (MNP): \frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{-3} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3} - \frac{y}{2} - \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 2x - 3y - 2z - 6 = 0$$

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1; 0; -2), B(1; 1; 1), C(0; -1; 2)$.

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (0; 1; 3), \overrightarrow{AC} = (-1; -1; 4) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (7; -3; 1)$.

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) ta có

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \text{ nên } \vec{n} \text{ cùng phương với } [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].$$

Chọn $\vec{n} = (7; -3; 1)$ ta được phương trình mặt phẳng (ABC) là: $7(x - 1) - 3(y - 0) + 1(z + 2) = 0$
 $\Leftrightarrow 7x - 3y + z - 5 = 0$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 0), B(0; -1; -1), C(5; -1; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) .

Lời giải

$\overrightarrow{AB} = (-1; -1; -1), \overrightarrow{AC} = (4; -1; 1), \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-2; -3; 5)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $2x + 3y - 5z - 2 = 0$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(2; 3; 5), B(3; 2; 4)$ và $C(4; 1; 2)$.

Lời giải

Vì $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \subset (ABC)$ nên (ABC) sẽ nhận $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ làm một vectơ pháp tuyến.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -1), \overrightarrow{AC} = (2; -2; -3)$ suy ra $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1; 1; 0)$.



Hiển nhiên (ABC) đi qua $A(2; 3; 5)$ nên ta có phương trình của (ABC) là

$$1(x-2)+1(y-3)+0(z-5)=0 \Leftrightarrow x+y-5=0.$$

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1;1;4)$, $B(2;7;9)$, $C(0;9;13)$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;6;5)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;8;9)$.

(ABC) đi qua $A(1;1;4)$ có vtpt $\vec{n}=[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]= (14; -14; 14) = 14(1; -1; 1)$ có dạng $x-y+z-4=0$.

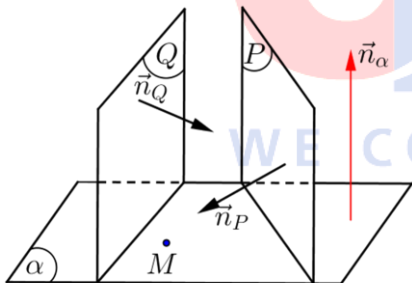
DẠNG 4: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG (α) QUA HAI ĐIỂM A, B VÀ VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG (β) . VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG (α) QUA ĐIỂM A VÀ VUÔNG GÓC VỚI HAI MẶT PHẪNG $(\alpha), (\beta)$.

Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại

Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và $\perp 2$ mặt
 $(P): Ax + By + Cz + D = 0$,
 $(Q): A'x + B'y + C'z + D' = 0$.



Phương pháp

» Tìm cặp vectơ $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$.

» Vectơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n} = [\vec{n}_{(Q)}; \vec{n}_{(P)}]$.

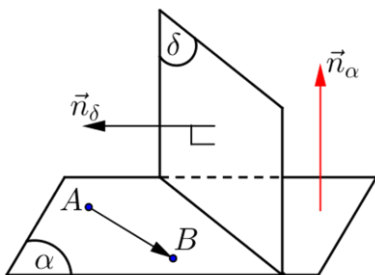
» Mặt phẳng (α) qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$.

Hoặc bài toán sẽ gặp:

“Qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc với giao tuyến của
 $(P): Ax + By + Cz + D = 0$; $(Q): A'x + B'y + C'z + D' = 0$ ”

Loại

Qua điểm $A; B$ và vuông góc
 $(\delta): Ax + By + Cz + D = 0$.



Phương pháp

» Tìm cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \vec{n}_{(\delta)}]$.

» Vectơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \vec{n}_{(\delta)}]$.

» Mặt phẳng (α) qua điểm A .



Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(1;2;-2), B(2;-1;4)$ và vuông góc với $(\beta): x-2y-z+1=0$.

Lời giải:

Có $\overrightarrow{AB} = (1; -3; 6)$

Mặt phẳng (β) có VTPT là $\vec{n}_\beta = (1; -2; -1)$.

Mặt phẳng (α) chứa A, B và vuông góc với (β) nên (α) có một vector pháp tuyến là:

$$\vec{n}_\alpha = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_\beta] = (15; 7; 1).$$

Phương trình mặt phẳng (α) là: $15x + 7z + 1 - 27 = 0$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1), B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) .

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3; -3; 2)$ và $\vec{n}_P = (1; -3; 2) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_P] = (0; 8; 12)$ cùng phương $\vec{u} = (0; 2; 3)$.

Khi đó, mặt phẳng (Q) qua $A(2;4;1)$ và có VTPT là $\vec{u} = (0; 2; 3)$.

$$\Rightarrow (Q): 2y + 3z - 11 = 0.$$

Câu 21: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;1;-1); B(1;0;1)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-z+1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua $A; B$ và vuông góc với (P) .

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; -1; 2)$.

Mặt phẳng (P) nhận VTPT là $\vec{n}(1; 2; -1)$. Khi đó mặt phẳng (Q) nhận VTPT là

$$\vec{n}_1 = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}] = (-3; 1; -1).$$

Mặt phẳng (Q) qua $A; B$ và vuông góc với (P) thì nhận $\vec{n}_1 = (-3; 1; -1)$ làm VTPT và đi qua $A(2;1;-1)$. Phương trình mặt phẳng (Q) là: $-3(x-2) + y - 1 - (z+1) = 0$.

Vậy phương trình mặt phẳng (Q) là $3x - y + z - 4 = 0$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-1;-2;5)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x+2y-3z+1=0$ và $(R): 2x-3y+z+1=0$.

Lời giải:

VTPT của (Q) là $\vec{n}_Q(1; 2; -3)$, VTPT của (R) là $\vec{n}_R(2; -3; 1)$.

Ta có $[\vec{n}_Q, \vec{n}_R] = (-7; -7; -7)$ nên mặt phẳng (P) nhận $\vec{n}(1; 1; 1)$ là một VTPT và (P) đi qua điểm $M(-1;-2;5)$ nên có phương trình là: $x + y + z - 2 = 0$.



Câu 23: Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y + 2z + 7 = 0$ và $(\beta): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng qua O, đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) có phương trình là

Lời giải

Mặt phẳng (α) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (3; -2; 2)$.

Mặt phẳng (β) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (5; -4; 3)$.

Giả sử mặt phẳng (γ) có vector pháp tuyến là $\vec{n}$.

Do mặt phẳng (γ) vuông góc với cả (α) và (β) nên ta có:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{n}_1 \\ \vec{n} \perp \vec{n}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (2; 1; -2).$$

Mặt phẳng (γ) đi qua $O(0;0;0)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1; -2)$ có phương trình là:
 $2x + y - 2z = 0$.

Câu 24: Cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y + 2z + 7 = 0, (\beta): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) là:

Lời giải

Véc tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng lần lượt là $\vec{n}_\alpha = (3; -2; 2), \vec{n}_\beta = (5; -4; 3)$.

$$\Rightarrow [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_\beta] = (2; 1; -2)$$

Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O, VTPT $\vec{n} = (2; 1; -2)$: $2x + y - 2z = 0$.

Câu 25: Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 1 = 0, (Q): x - z + 2 = 0$. Mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q) đồng thời cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3. Phương trình của mp (α) là

Lời giải

(P) có vector pháp tuyến $\vec{n}_p = (1; -3; 2), (Q)$ có vector pháp tuyến $\vec{n}_q = (1; 0; -1)$.

Vì mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q) nên (α) có một vector pháp tuyến là

$$[\vec{n}_p, \vec{n}_q] = (3; 3; 3) = 3(1; 1; 1).$$

Vì mặt phẳng (α) cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3 nên (α) đi qua điểm $M(3; 0; 0)$.

Vậy (α) đi qua điểm $M(3; 0; 0)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = (1; 1; 1)$ nên (α) có phương trình:
 $x + y + z - 3 = 0$.

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y + 2z + 7 = 0$ và $(\beta): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng đi qua O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) có phương trình là

Lời giải



Gọi mặt phẳng phải tìm là (P) . Khi đó véc tơ pháp tuyến của (P) là: $\vec{n}_p = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (2; 1; -2)$
 . Phương trình của (P) là $2x + y - 2z = 0$.

Dạng 6: Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β) và cách $(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$ một khoảng k cho trước.

Phương pháp:

1. Trên mặt phẳng (β) chọn 1 điểm M .
2. Do $(\alpha) // (\beta)$ nên (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D' = 0$ ($D' \neq D$).
3. Sử dụng công thức khoảng cách $d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\beta)) = k$ để tìm D' .

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): x + 2y - 2z + 1 = 0$ và cách (Q) một khoảng bằng 3.

Lời giải:

Trên mặt phẳng $(Q): x + 2y - 2z + 1 = 0$ chọn điểm $M(-1; 0; 0)$.

Do (P) song song với mặt phẳng (Q) nên phương trình của mặt phẳng (P) có dạng:
 $x + 2y - 2z + D = 0$ với $D \neq 1$.

$$\text{Vì } d((P), (Q)) = 3 \Leftrightarrow d(M, (P)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|-1 + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 3 \Leftrightarrow |-1 + D| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} D = -8 \\ D = 10 \end{cases}$$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán: $x + 2y - 2z - 8 = 0$ và $x + 2y - 2z + 10 = 0$.

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách mặt phẳng $(\alpha): 3x - y + 2z - 3 = 0$ một khoảng bằng $\sqrt{14}$.

Lời giải

Vì $(P) // (\alpha)$ nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $3x - y + 2z + D = 0, (D \neq -3)$.

$$\text{Lấy } M(x; y; z) \in (P). \text{ Khi đó } d(M, (\alpha)) = \frac{|3x - y + 2z - 3|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} \Leftrightarrow |3x - y + 2z - 3| = 14$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 2z - 3 = 14 \\ 3x - y + 2z - 3 = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 2z - 17 = 0 \\ 3x - y + 2z + 11 = 0 \end{cases}$$

Vậy có hai phương trình của $(P): 3x - y + 2z - 17 = 0; 3x - y + 2z + 11 = 0$.

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $P: x + 2y + 2z - 10 = 0$. Phương trình mặt phẳng Q với Q song song với P và khoảng cách giữa hai mặt phẳng P và Q bằng $\frac{7}{3}$ là.

Lời giải

Vì Q song song với P nên phương trình mặt phẳng Q có dạng

$$Q: x + 2y + 2z + c = 0$$

$$\text{Lấy } M \in P \Rightarrow M(0; 0; 5) \Rightarrow d(M, Q) = \frac{7}{3}. \text{ Khi đó ta có}$$



$$d(M, Q) = \frac{|2.5 + c|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{7}{3} \Rightarrow \begin{cases} 10 + c = 7 \\ 10 + c = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -3 \\ c = -17 \end{cases}$$

Vậy ta có các mặt phẳng Q là

$$Q: x + 2y + 2z - 3 = 0; Q: x + 2y + 2z - 17 = 0$$

Câu 30: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, lập phương trình các mặt phẳng song song với mặt phẳng $(\beta): x + y - z + 3 = 0$ và cách (β) một khoảng bằng $\sqrt{3}$.

Lời giải

Gọi mặt phẳng (α) cần tìm.

Vì $(\alpha) \parallel (\beta)$ nên phương trình (α) có dạng: $x + y - z + c = 0$ với $c \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Lấy điểm $I(-1; -1; 1) \in (\beta)$.

Vì khoảng cách từ (α) đến (β) bằng $\sqrt{3}$ nên ta có:

$$d(I, (\alpha)) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|-1 - 1 - 1 + c|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|c - 3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c = 6 \end{cases} \text{ (thỏa điều kiện } c \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \text{)}.$$

Vậy phương trình (α) là: $x + y - z + 6 = 0$; $x + y - z = 0$.

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): x + 2y - 2z + 1 = 0$ và (P) cách điểm $M(1; -2; 1)$ một khoảng bằng 3.

Lời giải:

Do (P) song song với mặt phẳng (Q) nên phương trình của mặt phẳng (P) có dạng: $x + 2y - 2z + D = 0$ với $D \neq 1$.

$$\text{Vì } d(M, (P)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|1 - 4 - 2 + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 3 \Leftrightarrow |-5 + D| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} D = -4 \\ D = 14 \end{cases}$$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán: $x + 2y - 2z - 4 = 0$ và $x + 2y - 2z + 14 = 0$.

Câu 32: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): x - 2y + 4z - 1 = 0$ và cách điểm $M(-1; 3; 1)$ là một khoảng bằng 2.

Lời giải

(P) có dạng: $(P): x - 2y + 4z + c = 0 (c \neq -1)$

$$d(M, (P)) = \frac{|-1 - 6 + 4 + c|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{|c - 3|}{\sqrt{21}}$$

$$d(M, (P)) = 2 = \frac{|c - 3|}{\sqrt{21}} \Rightarrow |c - 3| = 2\sqrt{21} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 + 2\sqrt{21} \\ c = 3 - 2\sqrt{21} \end{cases}$$

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là $(P): x - 2y + 4z + 3 + 2\sqrt{21} = 0$ hay

$$(P): x - 2y + 4z + 3 - 2\sqrt{21} = 0.$$



Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q): 2x - y + 2z - 3 = 0$ và điểm $A(1; 2; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với (Q) và cách A một khoảng bằng 4.

Lời giải

Vì $(P) \parallel (Q)$ nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $2x - y + 2z + D = 0, (D \neq -3)$.

Ta có: $d(A; (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot 3 + D|}{3} = 4 \Leftrightarrow |D + 6| = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 6 \\ D = -18 \end{cases}$

Vậy có hai phương trình của $(P): 2x - y + 2z - 18 = 0; 2x - y + 2z + 6 = 0$.

DẠNG 7. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẪNG

Phương pháp

Tính khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ như sau

Bước 1: Tìm $M_0(x_0; y_0; z_0)$; viết phương trình mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$.

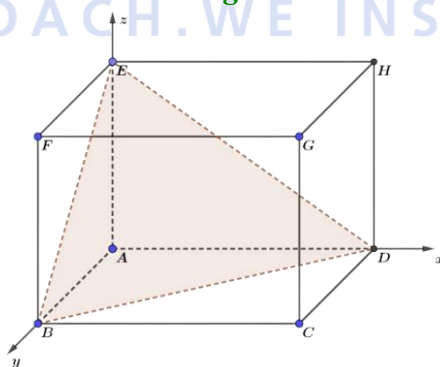
Bước 2: Tính khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$

theo công thức $d(M_0, (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Lưu ý: $d(M_0, (Oxy)) = \sqrt{(z_0)^2}$ $d(M_0, Ox) = \sqrt{(y_0)^2 + (z_0)^2}$

Câu 34: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ cạnh 1. Điểm M được cho thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CD}$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (EBD) .

Lời giải



Ta có $A(0; 0; 0), \overrightarrow{AE} = (0; 0; 1), \overrightarrow{CD} = (-1; 0; 0)$.

Đặt $M(a; b; c)$, suy ra $\overrightarrow{AM} = (a; b; c)$.

Đề cho $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CD}$, ta được $\begin{cases} a + 0 = -3 \\ b + 0 = 0 \\ c + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$. Suy ra $M(-3; 0; -1)$.

Mặt phẳng (EBD) , phương trình theo đoạn chắn là $x + y + z - 1 = 0$.

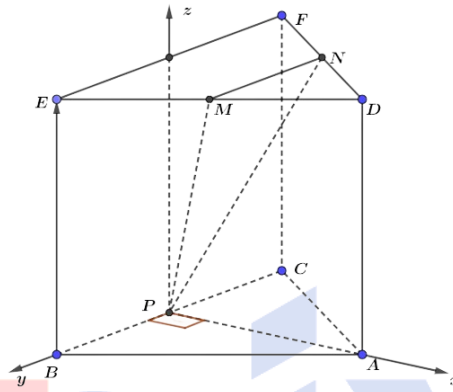


Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (EBD) bằng

$$d(M; (EBD)) = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-3 + 0 - 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy khoảng cách bằng $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Câu 35: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.DEF$, $AB = 6$, $AD = 2$. Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm DE , DF , BC . Lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình bên. Gọi điểm S thỏa mãn hệ thức $\vec{SA} + 2\vec{SB} + \vec{SC} = \vec{0}$. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (MNP) .



Lời giải

Ta có $P(0;0;0)$, $A(3\sqrt{3};0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;-3;0)$, $E(0;3;2)$, $F(0;-3;2)$, $D(3\sqrt{3};0;2)$

Suy ra $M\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}; 2\right)$, $N\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; -\frac{3}{2}; 2\right)$.

Ta có $[\vec{PM}, \vec{PN}] = \begin{pmatrix} 6; 0; -\frac{9\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = (4; 0; -3\sqrt{3})$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) là $4x - 3\sqrt{3}z = 0$.

Gọi I , J lần lượt là trung điểm cạnh AC , $IB \Rightarrow I\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; -\frac{3}{2}; 0\right)$, $J\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}; \frac{3}{4}; 0\right)$.

Ta có $\vec{SA} + 2\vec{SB} + \vec{SC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{SI} + 2\vec{SB} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\vec{SJ} = \vec{0} \Leftrightarrow S \equiv J$.

Do đó $S\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}; \frac{3}{4}; 0\right)$.

Vậy khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (MNP) bằng $d = 3\sqrt{3}$.



DẠNG 8. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI HAI MẶT PHẪNG

Phương pháp

Xét điểm mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_P$, với:

Mặt phẳng $(Q): A'x + B'y + C'z + D' = 0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_Q$,

Ta có các vị trí tương đối sau:

	Mặt phẳng (P)
Mặt phẳng (Q)	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ Mặt (P) cắt mặt (Q)
	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$ Mặt (P) song song mặt (Q)
	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$ Mặt (P) trùng mặt (Q)
	$A.A' + B.B' + C.C' = 0$ Mặt (P) vuông góc mặt (Q)

Câu 36: Cho ba mặt phẳng $(P_1): 2x - y - 2z + 1 = 0$, $(P_2): 4x - 2y - 4z + 4 = 0$, $(P_3): x + 4y - z + 1 = 0$.
 Chứng minh $(P_1) \parallel (P_2)$ và $(P_1) \perp (P_3)$.

Lời giải

VTPT của ba mặt phẳng là $\vec{n}_1 = (2; -1; -2)$, $\vec{n}_2 = (4; -2; -4)$, $\vec{n}_3 = (1; 4; -1)$.

$$\text{Vì } \begin{cases} \vec{n}_1 = \frac{1}{2} \cdot \vec{n}_2 \\ 1 \neq \frac{1}{2} \cdot 4 \end{cases} \text{ nên } (P_1) \parallel (P_2).$$

Vì $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_3$ (do $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) = 0$) nên $(P_1) \perp (P_3)$.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): m^2x - y + (m^2 - 2)z + 2 = 0$ và $(\beta): 2x + m^2y - 2z + 1 = 0$. Hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau khi nào?

Lời giải

Ta có $\vec{n}_{(\alpha)} = (m^2; -1; m^2 - 2)$; $\vec{n}_{(\beta)} = (2; m^2; -2)$.

$$(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow \vec{n}_{(\alpha)} \perp \vec{n}_{(\beta)} \Leftrightarrow \vec{n}_{(\alpha)} \cdot \vec{n}_{(\beta)} = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - m^2 - 2(m^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow |m| = 2.$$

Vậy $|m| = 2$.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$ cho $A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 6), D(2; 4; 6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với $mp(ABC)$, (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC) . Phương trình của (P) là?

Lời giải

$$(ABC): \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 12 = 0.$$

$$(P) \parallel (ABC) \Rightarrow (P): 6x + 3y + 2z + m = 0 \quad (m \neq -12).$$



(P) cách đều D và mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow d(D, (P)) = d(A, (P))$

$$\Leftrightarrow \frac{|6.2 + 3.4 + 2.6 + m|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{|6.2 + 3.0 + 2.0 + m|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} \Leftrightarrow |36 + m| = |12 + m| \Leftrightarrow \begin{cases} 36 + m = 12 + m \\ 36 + m = -12 - m \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m = -24$ (nhận).

Vậy phương trình của (P) là $6x + 3y + 2z - 24 = 0$.

