



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN

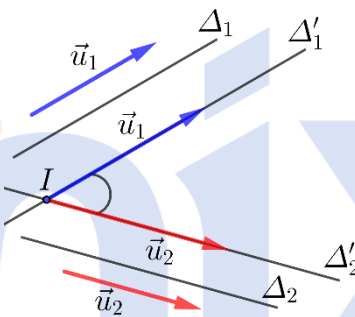


LÝ THUYẾT.

I. CÔNG THỨC TÍNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng Δ và Δ' tương ứng có vector chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c), \vec{u}' = (a'; b'; c')$. Khi đó:

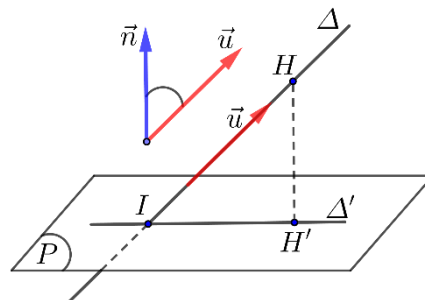
$$\cos(\Delta, \Delta') = \left| \cos(\vec{u}; \vec{u}') \right| = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$



II. CÔNG THỨC TÍNH GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ và mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$. Khi đó:

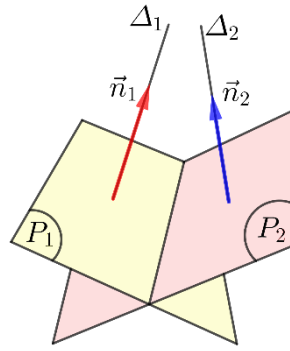
$$\sin(\Delta; (P)) = \left| \cos(\vec{u}; \vec{n}) \right| = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$



III. CÔNG THỨC TÍNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ tương ứng có các vector pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C), \vec{n}' = (A'; B'; C')$. Khi đó, góc giữa (P) và (Q) , kí hiệu là $((P); (Q))$, được tính theo công thức:

$$\cos((P); (Q)) = \left| \cos(\vec{n}; \vec{n}') \right| = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$



II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Phương pháp

Trong không gian Oxyz,

Loại

Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ và $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vector chỉ phương. Khi đó, ta có:

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ và mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$. Khi đó, ta có:

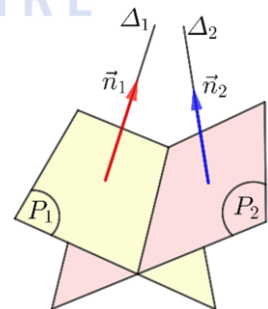
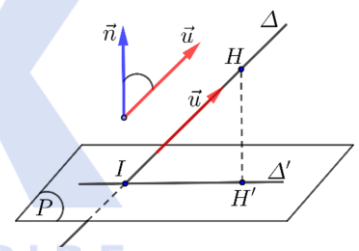
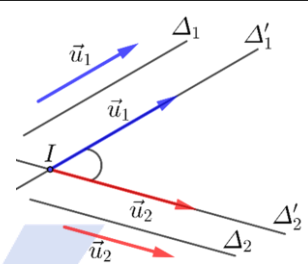
$$\sin(\Delta, (P)) = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ có hai vector pháp tuyến lần lượt là

$\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ và $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó, ta có:

$$\cos((P_1), (P_2)) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Hình vẽ



DẠNG 1. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Câu 1: Trong không gian Oxyz, tính cosin của góc giữa trục Oz và đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$.

Lời giải

Trục Oz có vector chỉ phương $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; -1)$.



Khi đó $\cos(Oz; \Delta) = \frac{|\vec{k} \cdot \vec{u}|}{|\vec{k}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Câu 2: Trong không gian Oxyz, tính góc giữa đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và đường thẳng

$\Delta: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{-1}$. (đơn vị độ)

Lời giải

Đường thẳng d có vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (1; 1; -1)$.

Đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (1; -2; -1)$.

Khi đó $\cos(d; \Delta) = \left| \cos(\vec{u}_1; \vec{u}_2) \right| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = 0$.

Vậy $(d, \Delta) = 90^\circ$.

Câu 3: Trong không gian Oxyz, tính góc giữa đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 + t \\ z = 1 \end{cases}$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 + 2s \\ y = -1 + 2s \\ z = 1 + s \end{cases}$

.(kết quả làm tròn đến hàng phần mười, đơn vị độ)

Lời giải

Đường thẳng d có vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (1; 1; 0)$.

Đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (2; 2; 1)$.

Khi đó $\cos(d; \Delta) = \left| \cos(\vec{u}_1; \vec{u}_2) \right| = \frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Vậy $(d, \Delta) \approx 19,5^\circ$.

Câu 4: Trong không gian Oxyz, Gọi S là tập hợp các giá trị m để đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + mt \\ y = -2 + mt \\ z = 1 - t \end{cases}$ tạo với

đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 + s \\ y = -1 - s \\ z = 1 + 2ms \end{cases}$ một góc 60° . Tính tích giá trị của các phần tử trong tập S .

Lời giải

Đường thẳng d có vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (m; m; -1)$.

Đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (1; -1; 2m)$.

$(d; \Delta) = 60^\circ \Leftrightarrow \cos(d; \Delta) = \cos 60^\circ \Leftrightarrow \left| \cos(\vec{u}_1; \vec{u}_2) \right| = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{|1 \cdot m + (-1) \cdot m + 2m \cdot (-1)|}{\sqrt{m^2 + m^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (2m)^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|2m|}{\sqrt{2m^2 + 1} \cdot \sqrt{4m^2 + 2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4|m| = \sqrt{2} \cdot (2m^2 + 1)$



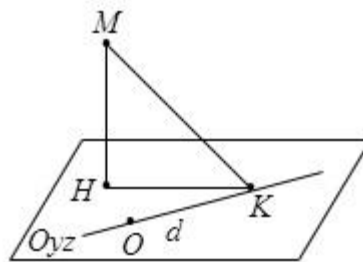
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - 2\sqrt{2}m + 1 = 0 \\ 2m^2 + 2\sqrt{2}m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ m = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } S = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

$$\text{Tích các giá trị của tập } S \text{ là } -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua O , thuộc mặt phẳng (Oyz) và cách điểm $M(1; -2; 1)$ một khoảng nhỏ nhất. Khi đó cosin của góc giữa d và trục tung bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M trên mặt phẳng (Oyz) và trên đường thẳng d .

Ta có: $d(M, d) = MK \geq MH = 1$, $H(0; -2; 1)$.

Suy ra $d(M, d)$ nhỏ nhất khi $K \equiv H$. Khi đó d có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{OH} = (0; -2; 1)$.

$$\cos(d, Oy) = \frac{|\overrightarrow{OH} \cdot \vec{j}|}{|\overrightarrow{OH}| |\vec{j}|} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

DẠNG 2: GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x - y + 3 = 0$.

. Tính số đo góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

Lời giải

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (1; -1; 0)$.

(d) có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (-1; 2; 1)$.

$$\sin(d, (P)) = \frac{|1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{1+1+0} \cdot \sqrt{1+4+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là 60° .

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa trục Oz và mặt phẳng $(P): x - y + \sqrt{2}z + 2024 = 0$.

Lời giải



(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_p = (1; -1; \sqrt{2})$.

Trục Oz có vectơ chỉ phương $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

$$\sin(Oz, (P)) = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + \sqrt{2} \cdot 1|}{\sqrt{0+0+1} \cdot \sqrt{1+1+2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy góc giữa trục Oz và mặt phẳng (P) là 45° .

Câu 8: Trên một sân khấu đã thiết lập sẵn một hệ trục tọa độ Oxyz. Biết tia sáng có phương trình $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 3 \end{cases}$

và mặt sàn sân khấu là mặt phẳng (P) có phương trình $y = 0$. Tính góc giữa tia sáng và mặt sàn sân khấu.



Lời giải

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{j} = (0; 1; 0)$.

(d) có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (1; 1; 0)$.

$$\sin(d, (P)) = \frac{|0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0|}{\sqrt{0+1+0} \cdot \sqrt{1+1+0}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy góc giữa tia sáng và sân khấu là 45° .

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$, $d_2: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d_1 tạo với đường thẳng d_2 một góc 45° .

Lời giải

Giả sử mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b; c)$ với $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Vectơ chỉ phương của d_1, d_2 lần lượt là $\vec{u}_1 = (2; -2; -1)$ và $\vec{u}_2 = (1; 0; -1)$.

(P) chứa đường thẳng d_1 nên $\vec{n} \cdot \vec{u}_1 = 0 \Leftrightarrow 2a - 2b - c = 0 \Leftrightarrow c = 2a - 2b$

$$\begin{aligned} \sin(d_2, (P)) &= \frac{|\vec{u}_2 \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}_2| \cdot |\vec{n}|} = \sin 45^\circ \Leftrightarrow \frac{|a - c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow |a - c| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (a - 2a + 2b)^2 = a^2 + b^2 + (2a - 2b)^2$$



$$\Leftrightarrow a^2 - 4ab + 4b^2 = a^2 + b^2 + 4b^2 - 8ab + 4a^2$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 4ab + b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2a - b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 2a.$$

Chọn $a = 1 \Rightarrow b = 2; c = -2$, suy ra (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; -2)$.

Lấy $M(1; 2; -1) \in d_1 \Rightarrow M \in (P)$.

Phương trình mặt phẳng (P) cần tìm là

$$1(x-1) + 2(y-2) - 2(z+1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2z - 7 = 0.$$

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 1 = 0$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}. \text{ Lập phương trình của đường thẳng } \Delta \text{ đi qua } M(0; -1; 1), \text{ cắt } d \text{ và tạo với mp}(P) \text{ một}$$

$$\text{góc } \alpha \text{ với } \sin \alpha = \frac{1}{12}.$$

Lời giải

Gọi $N = \Delta \cap d$. Do $N \in d \Rightarrow N(1-t; t; 1+2t)$.

Đường thẳng Δ có vtcp $\overrightarrow{MN} = (1-t; 1+t; 2t)$.

Mặt phẳng (P) có vtcp $\vec{n}_{(P)} = (2; -2; 1)$.

Gọi α là góc giữa đường thẳng Δ và mp (P) .

$$\text{Khi đó ta có } \sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \vec{n}_{(P)}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\vec{n}_{(P)}|} \Leftrightarrow \frac{|-2t|}{3\sqrt{6t^2 + 2}} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{29}}{29} \\ t = -\frac{\sqrt{29}}{29} \end{cases}.$$

$$\text{Với } t = \frac{\sqrt{29}}{29} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(\frac{29 - \sqrt{29}}{29}; \frac{29 + \sqrt{29}}{29}; \frac{2\sqrt{29}}{29} \right).$$

$$\text{Do } \Delta \text{ đi qua } M(0; -1; 1) \text{ nên có phương trình } \begin{cases} x = (29 - \sqrt{29})t \\ y = -1 + (29 + \sqrt{29})t \\ z = 1 + 2\sqrt{29}t \end{cases}.$$

$$\text{Với } t = -\frac{\sqrt{29}}{29} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(\frac{29 + \sqrt{29}}{29}; \frac{29 - \sqrt{29}}{29}; -\frac{2\sqrt{29}}{29} \right).$$

$$\text{Do } \Delta \text{ đi qua } M(0; -1; 1) \text{ nên có phương trình } \begin{cases} x = (29 + \sqrt{29})t \\ y = -1 + (29 - \sqrt{29})t \\ z = 1 - 2\sqrt{29}t \end{cases}.$$

DẠNG 3: GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG



Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$ và $(Q): x - y - 4 = 0$. Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Lời giải

VTPT của mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt là: $\vec{n}_1 = (2; -1; 2)$, $\vec{n}_2 = (1; -1; 0)$.

$$\text{Ta có } \cos((P), (Q)) = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow ((P), (Q)) = 45^\circ.$$

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng $(Q): 2x - y + 5z + 2 = 0$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) .

Lời giải

Ta có vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_p = (1; -2; 2)$, vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}_q = (2; -1; 5)$.

$$\cos((P), (Q)) = \left| \cos(\vec{n}_p, \vec{n}_q) \right| = \frac{|\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q|}{|\vec{n}_p| |\vec{n}_q|} = \frac{|1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2}} = \frac{14}{3\sqrt{30}}.$$

Câu 13: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y - 2z - 1 = 0$ và mặt phẳng (Q) . Biết hình chiếu của gốc O lên (Q) là điểm $H(2; -1; 0)$. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Lời giải

Từ giả thiết, suy ra $\vec{OH} = (2; -1; 0)$ là một VTPT của mặt phẳng (Q) .

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}_p = (1; -1; -2)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

$$\text{Ta có } \cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_p, \vec{OH}) \right| = \frac{|2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(1; 0; 0)$, $N(0; 1; 0)$, $P(0; 0; 1)$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và mặt phẳng (Oxy) .

Lời giải

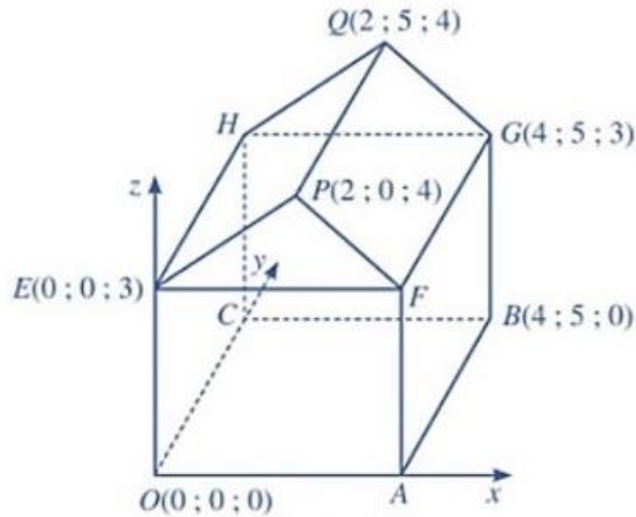
Mặt phẳng (MNP) có một VTPT là $\vec{n} = [\vec{MN}; \vec{MP}] = (1; 1; 1)$.

Mặt phẳng (Oxy) có một VTPT là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và (Oxy) .

$$\text{Ta có } \cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}, \vec{k}) \right| = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Câu 15: Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong không gian $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật. Biết các tọa độ cho như hình vẽ. Tính độ dốc của mái nhà, tức góc tạo bởi mái nhà so với nền nhà (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Lời giải

Độ dốc của mái nhà, tức là số đo của góc tạo bởi hai mặt lần lượt là $(OABC)$ và $(FGQP)$.

Mặt phẳng $(FGQP)$ có một VTPT là $\vec{n} = [\overrightarrow{QP}; \overrightarrow{QG}] = (5; 0; 10)$.

Mặt phẳng $(OABC)$ chính là mặt phẳng (Oxy) có một VTPT là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

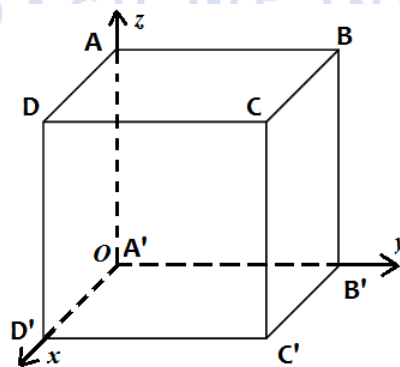
Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(FGHE)$ và (Oxy) .

$$\text{Ta có } \cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}, \vec{k}) \right| = \frac{|5 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 10 \cdot 1|}{\sqrt{5^2 + 0^2 + 10^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \text{ Do đó } \varphi \approx 26,6^\circ$$

DẠNG 4: TỌA ĐỘ HÓA BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Câu 16: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $3a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho gốc tọa độ $O \equiv A'$, $Ox \equiv A'D'$, $Oy \equiv A'B'$, $Oz \equiv A'A$.

Khi đó: $A'(0; 0; 0)$, $D'(3a; 0; 0)$, $B'(0; 3a; 0)$, $C'(3a; 3a; 0)$,

$A(0; 0; 3a)$, $D(3a; 0; 3a)$, $B(0; 3a; 3a)$, $C(3a; 3a; 3a)$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = (0; 3a; 0), \overrightarrow{A'D} = (3a; 0; 3a), \overrightarrow{A'A} = (0; 0; 3a), \overrightarrow{A'C'} = (3a; 3a; 0).$$

$$[\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'D}] = (3a^2; 0; -3a^2).$$

Chọn $\vec{n}_1 = (1; 0; -1)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(A'B'CD)$.

$$[\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'C}] = (-3a^2; 3a^2; 0).$$



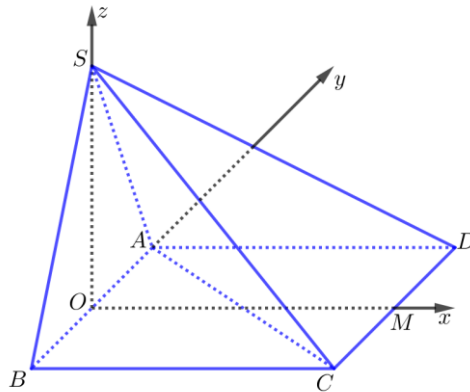
Chọn $\vec{n}_2 = (-1; 1; 0)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ACC'A')$.

Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$ là:

$$\cos \alpha = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|-1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, SAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$. Tính $\cos \varphi$ với φ là góc tạo bởi (SAC) và (SCD) .

Lời giải



Gọi O, M lần lượt là trung điểm của AB, CD . Vì SAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$ nên $SO \perp (ABCD)$.

Chuẩn hóa cho $a = 1$

Xét hệ trục $Oxyz$ có $O(0; 0; 0), M(2; 0; 0), A(0; 1; 0), S(0; 0; \sqrt{3})$. Khi đó $C(2; -1; 0), D(2; 1; 0)$.

Suy ra $\vec{SA} = (0; 1; -\sqrt{3}), \vec{AC} = (2; -2; 0), \vec{SC} = (2; -1; -\sqrt{3}), \vec{CD} = (0; 2; 0)$.

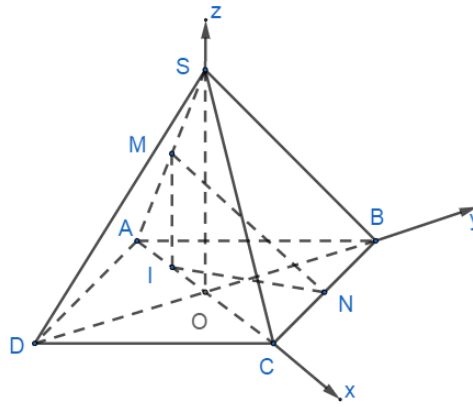
Mặt phẳng (SAC) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = [\vec{SA}, \vec{AC}] = (-2\sqrt{3}; -2\sqrt{3}; -2)$.

Mặt phẳng (SAD) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = [\vec{SC}, \vec{CD}] = (2\sqrt{3}; 0; 4)$.

$$\text{Vậy } \cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{5}{7}.$$

Câu 18: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai cạnh SA và BC , biết $MN = a\sqrt{6}$. Tính giá trị sin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) .

Lời giải



Gọi I hình chiếu của M lên $(ABCD)$, suy ra I là trung điểm của AO .

$$\text{Khi đó } CI = \frac{3}{4}AC = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

Xét $\triangle CNI$ có: $CN = a$, $NCI = 45^\circ$.

Áp dụng định lý cosin ta có:

$$NI = \sqrt{CN^2 + CI^2 - 2CN \cdot CI \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{a^2 + \frac{9a^2}{2} - 2a \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

$$\text{Xét } \triangle MIN \text{ vuông tại } I \text{ nên } MI = \sqrt{MN^2 - NI^2} = \sqrt{6a^2 - \frac{10a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{14}}{2}.$$

$$\text{Mà } MI \parallel SO, MI = \frac{1}{2}SO \Rightarrow SO = a\sqrt{14}.$$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ: (chuẩn hóa cho $a = 1$)

$$\text{Ta có: } O(0;0;0), B(0;\sqrt{2};0), D(0;-\sqrt{2};0), C(\sqrt{2};0;0), N\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};0\right),$$

$$A(-\sqrt{2};0;0), S(0;0;\sqrt{14}), M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0;\frac{\sqrt{14}}{2}\right).$$

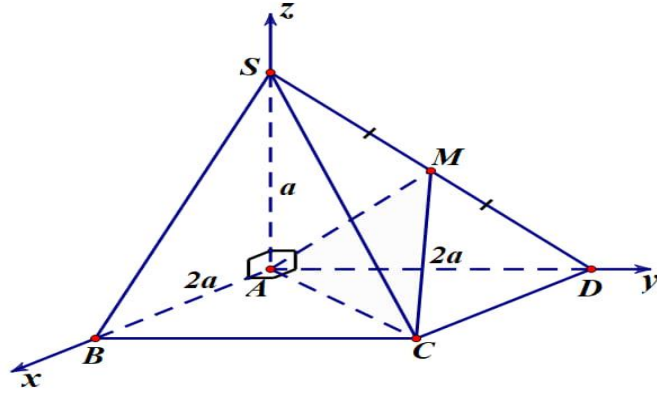
$$\text{Khi đó } \overrightarrow{MN} = \left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{14}}{2}\right), \overrightarrow{SB} = (0;\sqrt{2};-\sqrt{14}), \overrightarrow{SD} = (0;-\sqrt{2};-\sqrt{14}).$$

$$\text{Vectơ pháp tuyến mặt phẳng } (SBD): \vec{n} = [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SD}] = (-4\sqrt{7}; 0; 0).$$

$$\text{Suy ra } \sin(MN, (SBD)) = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|-4\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}|}{4\sqrt{7} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD . Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) .

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ sao cho $A \equiv O$, như hình vẽ:

Khi đó ta có:

$$A(0;0;0), B(2a;0;0), D(0;2a;0), C(2a;2a;0), S(0;0;a), M\left(0;a;\frac{a}{2}\right).$$

$$\overrightarrow{SB} = (2a;0;-a), \overrightarrow{SC} = (2a;2a;-a), \overrightarrow{MA} = \left(0;-a;-\frac{a}{2}\right), \overrightarrow{MC} = \left(2a;a;-\frac{a}{2}\right).$$

$$\vec{n}_1 = [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] = (2a^2;0;4a^2) \text{ và } \vec{n}_2 = [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}] = (a^2;-a^2;2a^2).$$

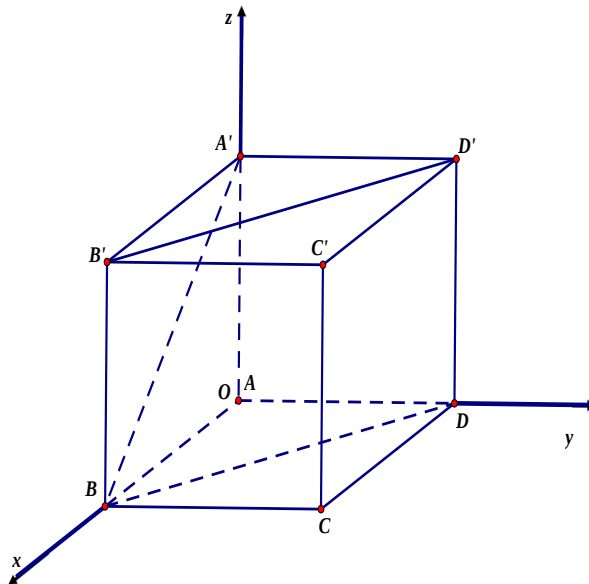
Gọi α ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) là góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) .

$$\begin{aligned} \text{ta có } \cos \alpha &= \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|2a^2 \cdot a^2 + 4a^2 \cdot 2a^2|}{\sqrt{(2a^2)^2 + (4a^2)^2} \cdot \sqrt{(a^2)^2 + (-a^2)^2 + (2a^2)^2}} \\ &= \frac{10a^4}{\sqrt{20 \cdot 6 \cdot (a^4)^2}} = \frac{5}{\sqrt{30}}. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \left(\frac{\sqrt{30}}{5}\right)^2 - 1 = \frac{5}{25}. \text{ Suy ra } \tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 20: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2a$. gọi α là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Tính $\sin \alpha$.

Lời giải



- +) Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $A \equiv O(0;0;0), B(2a;0;0), C(2a;2a;0), D(0;2a;0), A'(0;0;2a), B'(2a;0;2a), C'(2a;2a;2a), D'(0;2a;2a)$.
- +) Ta thấy $OC \perp (BB'D'D)$ và $\overrightarrow{OC} = (2a;2a;0)$ nên suy ra mặt phẳng $(BB'D'D)$ có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;1;0)$.
- +) Đường thẳng $A'B$ có vector chỉ phương là $\overrightarrow{A'B} = (2a;0;-2a)$ ta chọn $\vec{u} = (1;0;-1)$.
- +) Ta có $\sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2}$.

WE COACH.WE INSPIRE