

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN



IV

HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABC$ có ba điểm $S(0;0;3)$, $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;2;0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$.

a) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (ABC) bằng 0.

b) Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (ABC) bằng 90° .

c) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{3}{7}$.

d) Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (P) bằng $\frac{10\sqrt{3}}{21}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Đúng. Bốn điểm $S(0;0;3)$, $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;2;0)$ thuộc một tứ diện vuông $S.ABC$ nên dễ thấy $(SAB) \perp (ABC) \Rightarrow \cos((SAB);(ABC)) = 0$.

b) Đúng. Bốn điểm $S(0;0;3)$, $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;2;0)$ thuộc một tứ diện vuông $S.ABC$ nên dễ thấy $(SAC) \perp (ABC) \Rightarrow ((SAB);(ABC)) = 90^\circ$.

c) Sai. Ta có: $(SBC): \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Rightarrow (SBC): 6x + 3y + 2z - 6 = 0$. Suy ra $\vec{n}_{(SBC)} = (6;3;2)$. (ABC) có $\vec{n}_{(ABC)} = \vec{SA} = (0;0;3)$

$$\cos((SBC);(ABC)) = \frac{|\vec{n}_{(ABC)} \cdot \vec{n}_{(SBC)}|}{|\vec{n}_{(ABC)}| \cdot |\vec{n}_{(SBC)}|} = \frac{|6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 3|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2} \cdot \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{2}{7}.$$

d) Sai. Ta có: $\begin{cases} \vec{n}_{(SBC)} = (6;3;2) \\ \vec{n}_{(P)} = (1;1;1) \end{cases}$

$$\text{Nên } \cos((SBC);(P)) = \frac{|\vec{n}_{(SBC)} \cdot \vec{n}_{(P)}|}{|\vec{n}_{(SBC)}| \cdot |\vec{n}_{(P)}|} = \frac{|6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{11\sqrt{3}}{21}.$$



Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ và $d: \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{2}$.

a) Điểm $A(0;2;1)$ không thuộc đường thẳng Δ .

b) Đường thẳng d có vtcp $\vec{u}_d = (3;2;2)$.

c) Hai đường thẳng Δ và d chéo nhau.

d) Gọi α là góc giữa hai đường thẳng Δ và d . Khi đó $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{38}}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
--------	--------	---------	--------

* Phương án a) sai: Khi $t = 0$ thì $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$ nên điểm $A(0;2;1)$ thuộc đường thẳng Δ .

* Phương án b) sai: Đường thẳng d có vtcp $\vec{u}_d = (-3;2;2)$.

* Phương án c) đúng:

Δ đi qua điểm $A(0;2;1)$, có vtcp $\vec{u}_\Delta = (1;-3;2)$.

d đi qua điểm $B(1;0;2)$, có vtcp $\vec{u}_d = (-3;2;2)$.

Ta có: $[\vec{u}_\Delta, \vec{u}_d] = (-10; -8; -7)$; $\overrightarrow{AB} = (1; -2; 1) \Rightarrow [\vec{u}_\Delta, \vec{u}_d] \cdot \overrightarrow{AB} = -1 \neq 0$ nên Δ và d chéo nhau.

* Phương án d) sai:

Ta có các vectơ chỉ phương của hai đường thẳng là $\vec{u}_\Delta = (1;-3;2)$, $\vec{u}_d = (-3;2;2)$.

$$\cos \alpha = \left| \cos(\vec{u}_\Delta, \vec{u}_d) \right| = \frac{|\vec{u}_\Delta \cdot \vec{u}_d|}{|\vec{u}_\Delta| \cdot |\vec{u}_d|} = \frac{|1 \cdot (-3) + (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{238}}.$$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d và d' có phương trình chính tắc lần lượt là:

$$d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-7}{5} = \frac{z-15}{6} \text{ và } d': \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$$

a) Phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 7 + 5t \\ z = 15 + 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

b) Phương trình tham số của d' là: $\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2 + t' \\ z = 3 + t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$

c) Hai đường thẳng d và d' cắt nhau.

d) Góc giữa đường thẳng d và d' là 35° .

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------



a) đúng: Phương trình tham số của d là:
$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 7 + 5t \\ z = 15 + 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

b) đúng: Phương trình tham số của d' là:
$$\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2 + t' \\ z = 3 + t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

c) sai:

Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; 5; 6)$.

Đường thẳng d' có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}' = (1; 1; 1)$. Suy ra d và d' cắt nhau hoặc chéo nhau.

$$\text{Xét } \begin{cases} 3 + 2t = 1 + t' \\ 7 + 5t = 2 + t' \\ 15 + 6t = 3 + t' \end{cases}; t, t' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - t' = -2 \\ 5t - t' = -5 \\ 6t - t' = -12 \end{cases}; t, t' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -7 \\ 6t - t' = -12 \end{cases}; t, t' \in \mathbb{R}.$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm. Do đó hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

d) sai: Góc giữa đường thẳng d và d' là:

$$\cos(d, d') = \left| \cos(\vec{u}, \vec{u}') \right| = \frac{|2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 5^2 + 6^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{13}{\sqrt{195}}.$$

Suy ra $(d, d') \approx 21^\circ$.

Câu 4:

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ :
$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$
 và mặt phẳng (P) có phương trình

$$2x + y + z - 1 = 0.$$

a) Một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (3; 4; -3)$.

b) $\sin(\Delta, (P)) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

c) Góc giữa Δ và (P) là: 30° .

d) Giao điểm của Δ và (P) là: $M(3; 4; -3)$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
--------	--------	---------	--------

a) sai:

Một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (1; 2; -1)$

b) sai:

Một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (1; 2; -1)$, một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (2; 1; 1)$. Khi

$$\text{đó } \sin(\Delta, (P)) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}.$$

c) đúng:



Một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (1; 2; -1)$, một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (2; 1; 1)$. Khi đó $\sin(\Delta, (P)) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$.

Vậy $(\Delta, (P)) = 30^\circ$.

d) sai:

Ta có $2 \cdot 3 + (-4) + (-3) - 1 = -2 \neq 0$ nên $M(3; 4; -3) \notin (P)$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{1}$ và mặt phẳng (P) có phương trình $3x + 6y - 3z + 2024 = 0$.

a) Một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (-1; -2; 1)$.

b) Một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1; 2; -1)$.

c) Góc giữa Δ và (P) là: 90° .

d) Lấy tùy ý hai điểm phân biệt $A, B \in \Delta$. Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B lên (P) . Khi đó $A'B' = 2024$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

* Phương án **a)** đúng:

Một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (-1; -2; 1)$.

* Phương án **b)** đúng:

Một véc tơ chỉ phương của (P) là $\vec{n} = (1; 2; -1)$.

* Phương án **c)** đúng:

Một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (-1; -2; 1)$, một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1; 2; -1)$.

Khi đó $\sin(\Delta, (P)) = \frac{|(-1) \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot (-1)|}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 1$.

Vậy $(\Delta, (P)) = 90^\circ$.

* Phương án **d)** sai:

Vì $\Delta \perp (P)$ nên A' trùng B' . Do đó $A'B' = 0$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$ và đường thẳng $\Delta_2: \frac{x-2}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{3}$.

a) Điểm $M(1; 2; 3)$ thuộc Δ_1 và điểm $N(2; -2; 1)$ thuộc Δ_2 .

b) $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{2\sqrt{154}}{77}$.

c) Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.



d) Đường thẳng d đi qua điểm $N(2;3;-1)$ đồng thời cắt và vuông góc với Δ_2 có phương trình là $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-71} = \frac{z+1}{25}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) đúng: Từ phương trình của $\Delta_1; \Delta_2$ ta có $M(1;2;3) \in \Delta_1$ và $N(2;-2;1) \in \Delta_2$.

b) sai: Ta có $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{154}}{77}$.

c) sai: Ta có $\vec{u}_1 = (1;3;-1)$ là VTCP của Δ_1 ; $\vec{u}_2 = (-2;1;3)$ là VTCP của Δ_2 ; $M(1;2;3) \in \Delta_1$ và $N(2;-2;1) \in \Delta_2 \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (1;-4;-2)$.

Do đó $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (10;-1;7) \neq \vec{0}$; $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{MN} = 10 \cdot 1 + (-1) \cdot (-4) + 7 \cdot (-2) = 0$. Suy ra Δ_1 và Δ_2 cắt nhau.

d) đúng: Gọi $P = d \cap \Delta_2$. Ta có $P \in \Delta_2 \Rightarrow P(-2t+2; t-2; 3t+1)$ (với $t \in \mathbb{R}$)
 $\Rightarrow \overrightarrow{NP} = (-2t; t-5; 3t+2)$. Hơn nữa $N \in d, P \in d$ và $d \perp \Delta_2$ nên $\overrightarrow{NP} \perp \vec{u}_2$
 $\Rightarrow \overrightarrow{NP} \cdot \vec{u}_2 = 0 \Rightarrow (-2t) \cdot (-2) + (t-5) \cdot 1 + (3t+2) \cdot 3 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{14}$.

Do đó $\overrightarrow{NP} = \left(\frac{1}{7}; -\frac{71}{14}; \frac{25}{14}\right) \Rightarrow \vec{u}_3 = (2;-71;25)$ là VTCP của d .

Vậy d có phương trình là $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-71} = \frac{z+1}{25}$.

Câu 7:

Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1-t \\ y=3+t \\ z=4 \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$.

a) Vector $\vec{n} = (1;-2;2)$ là một vector pháp tuyến của (P) .

b) Điểm $M(0;4;4)$ thuộc Δ .

c) Góc giữa Δ và (P) bằng 60° .

d) Đường thẳng d đi qua điểm $M(0;4;4)$, song song với (P) và tạo với Δ một góc 45° có phương trình là $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{2}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) đúng: Từ phương trình của $(P): x-2y+2z-3=0$ ta có $\vec{n} = (1;-2;2)$ là một vector pháp tuyến của (P) .

b) đúng: Từ phương trình của $\Delta: \begin{cases} x=1-t \\ y=3+t \\ z=4 \end{cases}$ cho $t=1$ ta được $\begin{cases} x=0 \\ y=4 \\ z=4 \end{cases}$. Do đó $M(0;4;4) \in \Delta$.



c) sai: Ta có $\sin(\Delta, (P)) = \frac{|(-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Do đó $(\Delta, (P)) = 45^\circ$.

d) đúng: Gọi $\vec{u} = (a; b; c)$ (với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$) là một VTCP của d . Do $d \parallel (P)$ nên $\vec{u} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow a - 2b + 2c = 0 \Rightarrow 2c = 2b - a$ (*).

Hơn nữa $(d, \Delta) = 45^\circ$ nên $\cos(d, \Delta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{|-a + b|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |b - a| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
 $\Leftrightarrow (b - a)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = -2ab \Leftrightarrow (2c)^2 = -8ab$. Thay (*) vào ta được $(2b - a)^2 = -8ab$
 $\Leftrightarrow (2b + a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = -2b$. Thay vào (*) ta được $c = 2b$.

Do đó $\vec{u} = (-2b; b; 2b)$ (với $b \neq 0$). Suy ra $\vec{u}_1 = \frac{1}{b}\vec{u} = (-2; 1; 2)$ cũng là một VTCP của d .

Hơn nữa d đi qua điểm $M(0; 4; 4)$ nên d có phương trình là $\frac{x}{-2} = \frac{y - 4}{1} = \frac{z - 4}{2}$.

Do đó ta có $N(2; 3; 2) \in d$ nên $\frac{x - 2}{-2} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z - 2}{2}$ cũng là phương trình của d .

(Có thể kiểm tra tính đúng, sai của **d**) bằng cách sử dụng phương trình $\frac{x - 2}{-2} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z - 2}{2}$ để kiểm tra thỏa mãn giả thiết $M(0; 4; 4) \in d$; $d \parallel (P)$ và $(d, \Delta) = 45^\circ$.

Câu 8:

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = -5 + t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x + y - 5 = 0$.

a) Vector $\vec{u} = (-2; 2; 1)$ là một vector chỉ phương của Δ .

b) Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Oyz) bằng 45° .

c) Đường thẳng đi qua $N(2; 3; -4)$ và song song với Δ có phương trình là $\frac{x - 2}{-2} = \frac{y - 3}{2} = \frac{z + 4}{1}$.

d) Đường thẳng d vuông góc Δ và tạo với (P) một góc 45° có một vector chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; -2; 4)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) đúng: Từ phương trình của $\Delta: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = -5 + t \end{cases}$ ta có $\vec{u} = (-2; 2; 1)$ là một vector chỉ phương của Δ .

b) đúng: $(P): x + y - 5 = 0$; $(Oyz): x = 0$ nên ta có $\cos((P), (Oyz)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $((P), (Oyz)) = 45^\circ$.

c) đúng: Đường thẳng $\Delta_1 \parallel \Delta$ nên Δ_1 nhận $\vec{u} = (-2; 2; 1)$ làm VTCP. Hơn nữa Δ_1 đi qua $N(2; 3; -4)$ nên có phương trình là $\frac{x - 2}{-2} = \frac{y - 3}{2} = \frac{z + 4}{1}$.



d) sai: Gọi $\vec{u}_1 = (a; b; c)$ (với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$) là một VTCP của d . Do $d \perp \Delta$ nên $\vec{u}_1 \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow -2a + 2b + c = 0 \Rightarrow c = 2a - 2b$ (*).

Hơn nữa $(d, (P)) = 45^\circ$ nên $\sin(d, (P)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{|a+b|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |a+b| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Leftrightarrow (a+b)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 2ab$. Thay (*) vào ta được $(2a - 2b)^2 = 2ab \Leftrightarrow 2a^2 - 5ab + 2b^2 = 0$ (**).

Nếu $b = 0 \Rightarrow a = 0; c = 0$ (không thỏa mãn).

$$\text{Nếu } b \neq 0, \text{ ta có } (**) \Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5\left(\frac{a}{b}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = 2 \\ \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Với $\frac{a}{b} = 2 \Rightarrow a = 2b$, thay vào (*) ta được $c = 2b$. Do đó $\vec{u}_1 = (2b; b; 2b)$ (với $b \neq 0$).

Với $\frac{a}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 2a$, thay vào (*) ta được $c = -2a$. Do đó $\vec{u}_1 = (a; 2a; -2a)$ (với $a \neq 0$).

Vậy $\vec{u}_1 = (1; -2; 4)$ không là một VTCP của d .

Cách khác: Giả sử $\vec{u}_1 = (1; -2; 4)$ là một VTCP của d . Khi đó

$$\sin(d, (P)) = \frac{|1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 4 \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{42}} \Rightarrow (d, (P)) \neq 45^\circ \text{ (mâu thuẫn)}.$$

Vậy $\vec{u}_1 = (1; -2; 4)$ không là một VTCP của d .

Câu 9:

Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và mặt phẳng (P) có phương trình

$$x + 2y - z - 2 = 0.$$

a) Một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1; 2; -1)$.

b) Góc giữa Δ và (P) là: 60° .

c) Chỉ có một điểm chung duy nhất giữa Δ và (P) .

d) Mọi điểm thuộc Δ có hình chiếu lên (P) là chính nó.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) đúng:

Một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1; 2; -1)$.

b) sai:

Một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (1; 1; 3)$, một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1; 2; -1)$. Khi

$$\text{đó } \sin(\Delta, (P)) = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2}} = 0.$$



Do đó $(\Delta, (P)) = 0^\circ$.

c) sai:

Ta xét $M(1;2;3)$ và $N(0;1;0)$, dễ thấy

$$\begin{cases} M \in \Delta \\ M \in (P) \\ N \in \Delta \\ N \in (P) \end{cases} \text{ do đó giữa } \Delta \text{ và } (P) \text{ có nhiều hơn hai điểm}$$

chung.

d) đúng:

Vì mọi điểm thuộc Δ đều thuộc (P) nên mọi điểm thuộc Δ có hình chiếu lên (P) là chính nó.

Câu 10: (TNTHT-2025-0101) Mô hình toán học sau đây được sử dụng trong quan sát chuyển động của một vật. Trong không gian cho hệ tọa độ $Oxyz$ có $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vector đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz và độ dài của mỗi vector đơn vị đó bằng 1 mét. Cho hai điểm A và B , trong đó điểm A có tọa độ là $(5;5;0)$. Một vật (coi như một hạt) chuyển động thẳng với tốc độ phụ thuộc thời gian t (giây) theo công thức $v(t) = \beta t + 300$ m/giây, trong đó β là hằng số dương và $0 \leq t \leq 6$. Ở thời điểm ban đầu ($t=0$), Vật đi qua A với tốc độ 300 m/ giây và hướng tới B . Sau 2 giây kể từ thời điểm ban đầu, vật đi được quãng đường 604 m. Gọi $\vec{u} = (a, b, c)$ là vector cùng hướng với vector $\overrightarrow{AB}$. Biết rằng $|\vec{u}| = 1$ và góc giữa vector $\vec{u}$ lần lượt với các vector $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ có số đo tương ứng bằng $60^\circ, 60^\circ, 45^\circ$.

a) $a = \cos 60^\circ$.

b) Phương trình đường thẳng AB là $\frac{x-5}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z}{2}$.

c) $\beta = 2$.

d) Giả sử sau 5 giây kể từ thời điểm ban đầu, vật đến điểm $B(x_B; y_B; z_B)$. Khi đó $x_B > 768$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng

$$\begin{cases} \vec{u} = (a; b; c) \\ \vec{i} = (1; 0; 0) \end{cases}$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{i}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{i}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{i}|} = a$$

$$\text{Theo giả thiết } (\vec{u}, \vec{i}) = 60^\circ \Rightarrow a = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

b) Sai

$$a = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; b = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; c = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Vậy } \vec{u} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ hay } \vec{u} = (1; 1; \sqrt{2})$$



Vậy $AB: \frac{x-5}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$

c) Đúng

$$S(t) = \int_0^2 v(t) dt = \int_0^2 (\beta t + 300) dt = \left(\beta \frac{t^2}{2} + 300t \right) \Big|_0^2 = 2\beta + 600 = 604 \Rightarrow \beta = 2$$

d) Sai

$$\overrightarrow{AB} = k \cdot \vec{u} = (k; k; \sqrt{2}k) \text{ với } A(5; 5; 0) \Rightarrow B(k+5; k+5; \sqrt{2}k)$$

$$AB = \sqrt{k^2 + k^2 + (\sqrt{2}k)^2} = 2k$$

$$\text{Mặt khác } AB = \int_0^5 (2t + 300) dt = 1525$$

$$\Rightarrow 2k = 1525 \Rightarrow k = 762,5 \Rightarrow x_B = 762,5 + 5 = 767,5 < 768.$$

Câu 11: (TNTHPT-2025-0102) Mô hình toán học sau đây được sử dụng trong quan sát chuyển động của một vật. Trong không gian cho hệ tọa độ $Oxyz$ có $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vector đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz và độ dài mỗi vector đơn vị đó bằng 1 mét. Cho hai điểm A và B , trong đó điểm A có tọa độ là $(6; 6; 0)$. Một vật (coi như là một hạt) chuyển động thẳng với tốc độ phụ thuộc thời gian t (giây) theo công thức $v(t) = \beta t + 300$ (m/giây), trong đó β là hằng số dương và $0 \leq t \leq 6$. Ở thời điểm ban đầu ($t = 0$), vật đi qua A với tốc độ 300 m/giây và hướng tới B . Sau 2 giây kể từ thời điểm ban đầu, vật đi được quãng đường 608 m. Gọi $\vec{u} = (a; b; c)$ là vector cùng hướng với vector $\overrightarrow{AB}$ biết rằng $|\vec{u}| = 1$ và góc giữa vector $\vec{u}$ lần lượt với các vector $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ có số đo tương ứng bằng $60^\circ, 60^\circ, 45^\circ$.

a) $a = \cos 60^\circ$.

b) Phương trình đường thẳng AB là $\frac{x-6}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z}{2}$.

c) $\beta = 3$.

d) Giả sử sau 5 giây kể từ thời điểm ban đầu, vật đến điểm $B(x_B; y_B; z_B)$. Khi đó $x_B = 781$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Đúng

$$\vec{u} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| \cdot |\vec{u}| \cos 60^\circ \Leftrightarrow a = \cos 60^\circ.$$

b) Sai

$$\text{Ta có } \vec{u} \cdot \vec{j} = |\vec{j}| \cdot |\vec{u}| \cos 60^\circ \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{k} = |\vec{k}| \cdot |\vec{u}| \cos 45^\circ \Leftrightarrow c = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Suy ra } \vec{u} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ do đó đường thẳng } AB \text{ có phương trình là } \frac{x-6}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z}{\sqrt{2}}.$$

c) Sai

Quãng đường đi được của vật sau thời gian 2 giây kể từ thời điểm ban đầu là



$$\int_0^2 v(t)dt = \left(\frac{\beta t^2}{2} + 300t \right) \Big|_0^2 = 2\beta + 600 \text{ mét}$$

Theo bài ra ta có $2\beta + 600 = 608 \Leftrightarrow \beta = 4$.

d) Đúng

Giả sử sau 5 giây kể từ thời điểm ban đầu, vật đến điểm $B(x_B; y_B; z_B)$.

$$AB = \int_0^5 v(t)dt = \left(2t^2 + 300t \right) \Big|_0^5 = 1550 \text{ mét.}$$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{AB} = 1550\vec{u} \Rightarrow x_B = x_A + \frac{1550}{2} = 779.$$

Câu 12: (TNTHPT-2025-0103) Mô hình toán học sau đây được sử dụng trong quan sát chuyển động của một vật. Trong không gian cho hệ tọa độ $Oxyz$ có $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vector đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz và độ dài của mỗi vector đơn vị bằng 1 mét. Cho hai điểm A và B , trong đó điểm A có tọa độ là $(4; 4; 0)$. Một vật (coi như là một hạt) chuyển động thẳng với tốc độ phụ thuộc thời gian t (giây) theo công thức $v(t) = \beta t + 300$ (m/giây), trong đó β là hằng số dương và $0 \leq t \leq 6$. Ở thời điểm ban đầu ($t = 0$), vật đi qua A với tốc độ 300(m/giây) và hướng tới B . Sau 2 giây kể từ thời điểm ban đầu, vật đi được quãng đường 608 mét. Gọi $\vec{u} = (a; b; c)$ là vector cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$. Biết rằng $|\vec{u}| = 1$ và góc giữa vector $\vec{u}$ và các vector $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ có số đo tương ứng bằng $60^\circ, 60^\circ, 45^\circ$.

a) $a = \cos 60^\circ$.

b) Phương trình đường thẳng AB là $\frac{x-4}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{2}$.

c) $\beta = 2$.

d) Giả sử sau 5 giây kể từ thời điểm ban đầu, vật đến điểm $B(x_B; y_B; z_B)$. Khi đó $x_B = 779$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) Đúng

Do góc giữa vector $\vec{u}$ và các vector $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ có số đo tương ứng bằng $60^\circ, 60^\circ, 45^\circ$ nên

$$\vec{u} = (\cos 60^\circ; \cos 60^\circ; \cos 45^\circ) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow a = \cos 60^\circ.$$

b) Sai

Đường thẳng AB đi qua $A(4; 4; 0)$ và có vector chỉ phương $2\vec{u} = (1; 1; \sqrt{2})$ nên có phương trình chính

$$\text{tắc là } \frac{x-4}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{\sqrt{2}}.$$

c) Sai

Do sau 2 giây vật đi được 608 mét nên $\int_0^2 v(t)dt = 608$.



$$\Leftrightarrow \int_0^2 (\beta t + 300) dt = 608$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\beta t^2}{2} + 300t \right) \Big|_0^2 = 608$$

$$\Leftrightarrow 2\beta + 600 = 608$$

$$\Leftrightarrow \beta = 4$$

Vậy $v(t) = 4t + 300$.

d) Đúng

Ta có $B(4+t; 4+t; \sqrt{2}t) \in AB$.

Quãng đường vật đi được sau 5 giây là $\int_0^5 v(t) dt = \int_0^5 (4t + 300) dt = 1550$ (mét).

Suy ra $AB = 1550$.

Suy ra $\sqrt{(4+t-4)^2 + (4+t-4)^2 + (\sqrt{2}t-0)^2} = 1550 \Rightarrow 2t = 1550 \Rightarrow t = 775 \Rightarrow x_B = 779$ (do $\vec{u}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ nên $t > 0$).

Câu 13: (TNTHPT-2025-0104) Mô hình toán học sau đây được sử dụng trong quan sát chuyển động của một vật. Trong không gian cho hệ tọa độ $Oxyz$ có $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vector đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz và độ dài của mỗi vector đơn vị bằng 1 mét. Cho hai điểm A và B , trong đó điểm A có tọa độ là $(7; 7; 0)$. Một vật (coi như là một hạt) chuyển động thẳng với tốc độ phụ thuộc thời gian t (giây) theo công thức $v(t) = \beta t + 300$ (m/giây), trong đó β là hằng số dương và $0 \leq t \leq 6$. Ở thời điểm ban đầu ($t = 0$), vật đi qua A với tốc độ 300(m/giây) và hướng tới B . Sau 2 giây kể từ thời điểm ban đầu, vật đi được quãng đường 606 mét. Gọi $\vec{u} = (a; b; c)$ là vector cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$. Biết rằng $|\vec{u}| = 1$ và góc giữa vector $\vec{u}$ và các vector $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ có số đo tương ứng bằng $60^\circ, 60^\circ, 45^\circ$.

a) $a = \cos 60^\circ$.

b) Phương trình đường thẳng AB là $\frac{x-7}{1} = \frac{y-7}{1} = \frac{z}{2}$.

c) $\beta = 3$.

d) Giả sử sau 5 giây kể từ thời điểm ban đầu, vật đến điểm $B(x_B; y_B; z_B)$. Khi đó $x_B > 776$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) **Đúng.** Theo giả thiết ta có: góc giữa vector $\vec{u}$ và các vector $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ có số đo tương ứng bằng $60^\circ, 60^\circ, 45^\circ$ nên $\vec{u} = (\cos 60^\circ; \cos 60^\circ; \cos 45^\circ) \Rightarrow a = \cos 60^\circ$.

b) **Sai.** Đường thẳng AB đi qua $A(7; 7; 0)$ và có VTCP $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{2} (1; 1; \sqrt{2})$ nên có phương

trình chính tắc dạng $\frac{x-7}{1} = \frac{y-7}{1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$. Suy ra câu b sai.

c) **Đúng.** Sau 2 giây vật đi được 606 mét nên



$$\int_0^2 v(t) dt = 606 \Leftrightarrow \int_0^2 (\beta t + 300) dt = 606 \Leftrightarrow \left(\frac{\beta t^2}{2} + 300t \right) \Big|_0^2 = 606 \Leftrightarrow 2\beta + 600 = 606 \Leftrightarrow \beta = 3$$

d) Sai. Quãng đường vật đi được sau 5 giây là $\int_0^5 v(t) dt = \int_0^5 (3t + 300) dt = 1537,5$ (mét).

Giả sử $B(7+t; 7+t; \sqrt{2}t) \in AB$.

Theo giả thiết ta có $AB = 1537,5 \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + t^2 + 2t^2} = 1537,5 \Leftrightarrow t = 768,75 \Rightarrow x_B = 775,75$.

Câu 14: Trong không gian tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng $(P_1): 2x + y + 2z - 1 = 0$ và $(P_2): x - 2y - 2z - 7 = 0$.

a) Vector có tọa độ $(2; 2; 1)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P_1) .

b) Vector có tọa độ $(1; -2; -2)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P_2) .

c) Cosin của góc giữa hai vector $\vec{n}_1 = (2; 1; 2)$ và $\vec{n}_2 = (1; -2; -2)$ bằng $-\frac{4}{9}$.

d) Góc giữa hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) bằng 116° .

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) Sai

b) Đúng

c) Đúng

d) Sai

a) Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P_1) là $\vec{n}_{(P_1)} = (2; 1; 2)$ nên mệnh đề sai

b) Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P_2) là $\vec{n}_{(P_2)} = (1; -2; -2)$ nên mệnh đề đúng

c) $\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2)}{3 \cdot 3} = -\frac{4}{9}$ mệnh đề đúng

d) Góc hai mặt phẳng không thể từ nên mệnh đề sai

Câu 15: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d_1: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{2}$ và $d_2: \frac{x}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-3}{3}$.

a) Điểm $M(-1; -1; 9)$ thuộc đường thẳng d_1 .

b) Góc giữa hai đường thẳng là 60° .

c) Hai đường thẳng chéo nhau.

d) Đường thẳng đi qua M và vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình là $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-9}{1}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng

Thay $M(-1; -1; 9) \Rightarrow 2 = 2 = 2$ vậy $M \in (d_1)$.

b) Sai

$\cos(d_1, d_2) = \frac{\sqrt{21}}{14} \Rightarrow (d_1; d_2) \approx 70^\circ 53'$

c) Đúng



Hai vectơ chỉ phương của $d_1; d_2$ không cùng phương, phương trình không có điểm chung nên $d_1; d_2$ chéo nhau.

d) Sai

Đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng $d_1; d_2$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-7; -5; 1)$

Câu 16: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = -1 + t \end{cases}$ và điểm $A(1; 3; -1)$.

a) Đường thẳng Δ đi qua $M(1; 0; -1)$.

b) Gọi α là góc giữa đường thẳng Δ và trục Ox . Khi đó $\sin \alpha$ bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) Hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng d là điểm $H(a; b; c)$. Khi đó $a + b + c = 5$.

d) Đường thẳng d đi qua điểm A , cắt và vuông góc với đường thẳng Δ đi qua $M(-1; 2; 1)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

a) Đường thẳng Δ đi qua $M(1; 0; -1)$. **Mệnh đề a) đúng.**

b) Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}(1; -1; 1)$.

Trục Ox có một véc tơ chỉ phương là $\vec{i}(1; 0; 0)$.

$$\text{Ta có } \cos(\Delta; Ox) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin(\Delta; Ox) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Mệnh đề b) sai.

c) Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}(1; -1; 1)$.

Gọi $H(t+1; -t; t-1)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng d . Ta có

$$\vec{AH}(t; -t-3; t) \text{ và}$$

$$\vec{AH} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 3t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow H(0; 1; -2) \Rightarrow a + b + c = -1.$$

Mệnh đề c) sai.

d) Gọi B là giao điểm của hai đường thẳng d và Δ .

Vì $B \in \Delta$ nên tọa độ $B(1+t; -t; -1+t)$. Khi đó $\vec{BA} = (-t; t+3; -t)$.

Đường thẳng Δ có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; -1; 1)$.

$$d \perp \Delta \Leftrightarrow \vec{BA} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{BA} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

$$\text{Suy ra } \vec{BA} = (1; 2; 1).$$

Do đó đường thẳng d đi qua điểm A và nhận $\vec{BA}$ làm vectơ chỉ phương có phương trình chính tắc là $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{1}$. Khi đó $M(-1; 2; 1)$ không thuộc d .

Mệnh đề d) sai.



Câu 17: Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 6 + 2t' \\ y = 3 + 2t' \\ z = 7 + 9t' \end{cases}$.

- a) Đường thẳng d đi qua điểm $A(2;3;1)$.
 b) Đường thẳng d' đi qua điểm $B(6;3;7)$.
 c) Hai đường thẳng d và d' cắt nhau.
 d) Cosin góc giữa hai đường thẳng d và d' bằng $\frac{35}{\sqrt{1513}}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) đúng: Khi $t = 0$ thì $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$ nên đường thẳng d đi qua điểm $A(2;3;1)$.

b) đúng: Khi $t' = 0$ thì $\begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \\ z = 7 \end{cases}$ nên đường thẳng d' đi qua điểm $B(6;3;7)$.

c) sai:

d đi qua điểm $A(2;3;1)$, có vtcp $\vec{a} = (-2; -2; -3)$.

d' đi qua điểm $B(6;3;7)$, có vtcp $\vec{b} = (2; 2; 9)$.

Ta có: $[\vec{a}, \vec{b}] = (-12; 12; 0)$; $\vec{AB} = (4; 0; 6) \Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{AB} = -48 \neq 0$ nên d và d' chéo nhau.

d) đúng: $\cos(d; d') = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{35}{\sqrt{1513}}$.

Câu 18: Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ và $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

- a) Điểm $A(1;3;-2)$ không thuộc đường thẳng d_1 .
 b) Đường thẳng d_2 có một vtcp là $\vec{u}_2 = (-1; -2; 1)$.
 c) Cosin góc tạo bởi d_1, d_2 là $\frac{-1}{2}$.
 d) Gọi hình chiếu của d_2 trên mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ là đường thẳng Δ . Khi đó điểm $N(2;5;-4)$ nằm trên đường thẳng Δ .

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) **Đúng:** Điểm có hoành độ bằng 1 thuộc đường thẳng d_1 là $B(1;1;3)$. Do đó điểm $A(1;3;-2)$ không thuộc đường thẳng d_1 .

b) **Đúng:** Đường thẳng d_2 có một vtcp là $\vec{u}_2 = (-1; -2; 1)$.



c) Sai: Ta có $\vec{u}_1 = (1; -1; 2)$, $\vec{u}_2 = (1; 2; -1)$

$$\text{suy ra } \cos(d_1, d_2) = \frac{|1 - 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + (2)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2}.$$

d) Đúng: Gọi $C = d_2 \cap (P)$ với $d_2: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases} \Rightarrow C(t; -1 + 2t; 2 - t).$

Mà $C \in (P) \Rightarrow t - 1 + 2t + 2 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$, nên $C(1; 1; 1).$

Lấy $D(0; -1; 2) \in d_2$, gọi m là đường thẳng qua $D(0; -1; 2)$ và vuông góc với $(P).$

Thì $m: \begin{cases} x = s \\ y = -1 + s \\ z = 2 + s \end{cases}$, gọi E là hình chiếu của D lên $(P).$

Do $E \in m$ nên $E(s; -1 + s; 2 + s).$

Mặt khác

$$E \in (P) \Rightarrow s - 1 + s + 2 + s - 3 = 0 \Leftrightarrow s = \frac{2}{3} \Rightarrow E\left(\frac{2}{3}; \frac{-1}{3}; \frac{8}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{CE} = \left(\frac{-1}{3}; \frac{-4}{3}; \frac{5}{3}\right) = \frac{-1}{3}(1; 4; -5).$$

Hình chiếu của d_2 trên (P) là đường thẳng Δ đi qua $C(1; 1; 1)$ và nhận vector $\vec{u}_\Delta = (1; 4; -5)$ làm vector chỉ phương.

Nên đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + l \\ y = 1 + 4l \\ z = 1 - 5l \end{cases}$. Vậy điểm thuộc đường thẳng Δ là $N(2; 5; -4).$

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, cắt mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ tại

điểm $I.$

a) Tọa độ của điểm $I(1; 1; 1).$

b) Gọi α là góc giữa d và mặt phẳng (P) , khi đó $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}.$

c) Gọi d' là hình chiếu của d lên mặt phẳng (P) , β là góc giữa d và d' khi đó $\sin \beta = \frac{\sqrt{7}}{3}.$

d) Gọi Δ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) sao cho $\Delta \perp d$ và khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng Δ bằng $\sqrt{42}$. Gọi $M(a; b; c)$ (với $a + b > c$) là hình chiếu của điểm I trên đường thẳng Δ thì $a + b + c = 3.$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Đúng. (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; 1)$ và d có vector chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; -1).$
 $I = d \cap (P) \Rightarrow I(1; 1; 1).$



b) Đúng. $\sin \alpha = \left| \cos(\vec{n}_{(P)}; \vec{u}_d) \right| = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{n}_{(P)}|}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{n}_{(P)}|} = \frac{|1.1 + 2.1 - 1.1|}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

c) Sai. Vì góc $\alpha = \beta$

d) Đúng. Vì $M(a; b; c)$ là hình chiếu vuông góc của I lên Δ .

Khi đó ta có

$$\begin{cases} M \in (P) \\ \overrightarrow{IM} \perp \vec{u}_\Delta \\ IM = \sqrt{42} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c-3=0 \\ -3(a-1)+2(b-1)+(c-1)=0 \\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c-3=0 \\ -3a+2b+c=0 \\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=42 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a-b=3 \\ a+b+c-3=0 \\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4a-3 \\ c=-5a+6 \\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=42 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-3 \\ c=6 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=2 \\ b=5 \\ c=-4 \end{cases}$$

Vì $M(a; b; c)$ (với $a+b > c$) nên $M(2; 5; -4)$. Vậy $a+b+c=3$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 4; 1), B(-2; 2; -3)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$.

a) Một véc tơ chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm A, B là $\vec{u} = (2; 1; 2)$.

b) Phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x=2+2t \\ y=4+t \\ z=1+2t \end{cases}$.

c) Góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (P) bằng $74,3^\circ$ (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

d) Điểm M nằm trên (P) và cách đều hai điểm A, B . Khi đó $OM_{\min} = 3\sqrt{3}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4; -2; -4)$ nên chọn véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; 2)$.

b) PTTS của $AB: \begin{cases} x=2+2t \\ y=4+t \\ z=1+2t \end{cases}$ (t là tham số).

c) $\sin(AB, (P)) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{5}{3\sqrt{3}} \Rightarrow (AB, (P)) \approx 74,2^\circ$

d) Vì $(2+4+1-3)(-2+2-3-3) < 0$ nên hai điểm A, B nằm khác phía so với mặt phẳng (P) do đó để M cách đều hai điểm A, B thì M nằm trên mặt phẳng trung trực của AB



Mặt phẳng trung trực (Q) của AB qua trung điểm $I(0;3;-1)$ của AB , vtcp của AB là vtcp $\vec{n} = (2;1;2)$ của (Q) . Khi đó ptmp (Q) là $2x + y + 2z - 1 = 0$.

Vậy M thuộc (P) và $(Q) \Rightarrow M \in d = (P) \cap (Q)$.

$$d: \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x + y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Cho } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y + z - 3 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow C(0;5;-2) \in d$$

$$\text{PT đường thẳng } d \text{ qua } C \text{ có vtcp } \vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (-1;0;1) \text{ là } \begin{cases} x = -t \\ y = 5 \\ z = -2 + t \end{cases}$$

Gọi $K(-t;5;-2+t)$ là hình chiếu của O lên d

$$\text{Ta có } \overrightarrow{OK} \perp \vec{u}_d \Rightarrow \overrightarrow{OK} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow t - 2 + t = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow K(-1;5;-1).$$

$$OM_{\min} = OK = 3\sqrt{3}.$$

Câu 21: Trong một mô hình vườn rau muống thông minh, các học sinh lắp đặt hệ thống vòi phun tự động. Mỗi vòi phun được gắn trên trụ cao 1,5m tại vị trí $A(2;3;1,5)$, phun nước theo hướng vector $\vec{v} = (1;-2;-3)$. Mặt đất là mặt phẳng $z = 0$, tán cây được mô hình bằng mặt phẳng $z = 1,8$.

a) Tia nước được mô hình hóa bởi phương trình $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1,5 - 3t \end{cases}$, với $t \geq 0$.



b) Tia nước chạm mặt đất tại $B(2,5;2;0)$.

c) Tia nước không chạm mặt phẳng tán cây $z = 1,8$

d) Góc giữa tia nước và mặt đất là khoảng $56,3^\circ$ (lấy chính xác đến hàng phần mười theo đơn vị độ).

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Đúng

Đường thẳng chứa tia nước đi qua điểm $A(2;3;1,5)$ và có vector chỉ phương $\vec{v} = (1;-2;-3)$ nên có

$$\text{phương trình tham số } \Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1,5 - 3t \end{cases}$$



Do đó tia nước được mô hình hóa bởi phương trình
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1,5 - 3t \end{cases}, \text{ với } t \geq 0.$$

b) Đúng

Gọi $B(2,5;2;0)$. là giao điểm của đường thẳng chứa tia nước $\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1,5 - 3t \end{cases}$ với mặt phẳng $z = 0$ (

Mặt đất) ta có ngay $B(2+t;3-2t;1,5t-3)$ và $z_B = 0$ suy ra $t = 0,5 \Rightarrow B(2,5;2;0)$ (thỏa mãn $t \geq 0$).

Do đó tia nước chạm mặt đất tại $B(2,5;2;0)$.

c) Đúng

Ta dễ thấy Tia nước là tập hợp các điểm có cao độ $z = 1,5 - 3t$, với $t \geq 0$ nên cao độ $z = 1,5 - 3t \leq 1,5$, do đó Tia nước không chạm mặt phẳng tán cây $z = 1,8$

d) Sai

Ta thấy mặt phẳng $z = 0$ có một vector pháp tuyến $\vec{k} = (0;0;1)$ nên gọi φ là góc giữa tia nước và mặt đất thì ta có

$$\sin \varphi = \left| \cos(\vec{v}, \vec{k}) \right| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{k}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{3 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}} \Rightarrow \varphi \approx 53,3^\circ.$$

Câu 22: Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -1 + t \end{cases}$ và điểm $A(0;2;-3)$.

a) Đường thẳng Δ đi qua $M(0;1;0)$ và nhận $\vec{u} = (1;-1;-1)$ làm vector chỉ phương.

b) Gọi α là góc giữa đường thẳng Δ và trục Oz . Khi đó $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) Hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng Δ là điểm $H(a;b;c)$ với $a + 2b + c = 0$.

d) Đường thẳng (d) qua A , vuông góc với trục Oy và cắt đường thẳng Δ tại N . Mặt cầu đường kính AN có tâm $I(m;n;p)$ với $m + 2n + 2p = 5$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

a) Đúng

Cho $t = 1 \Rightarrow M(0;1;0) \in \Delta$.

Đường thẳng Δ đi qua $M(0;1;0)$ và nhận $\vec{u} = (1;-1;-1)$ làm vector chỉ phương.

b) Sai

Oz có vector chỉ phương $\vec{u} = (0;0;1)$. Ta có

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ (do } \alpha \text{ là góc nhọn).}$$

c) Sai

$$H \in \Delta \Rightarrow H(1-t;t;-1+t) \Rightarrow \overline{AH} = (1-t;t-2;t+2).$$



$$AH \perp \Delta \Rightarrow \overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow 1-t-(t-2)-(t+2)=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow H\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right) \Rightarrow a+2b+c = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

d) Sai

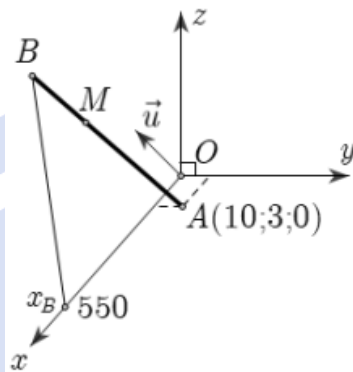
$$d \cap \Delta = N \Rightarrow N(1-t; t; -1+t) \Rightarrow \overrightarrow{AN} = (1-t; t-2; t+2).$$

$$d \perp Oy \Rightarrow \overrightarrow{AN} \perp \vec{j} \Leftrightarrow t-2=0 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow N(-1; 2; 1).$$

Mặt cầu đường kính AN có tâm I nên I là trung điểm của AN .

$$\Rightarrow I\left(\frac{-1}{2}; 2; -1\right) \Rightarrow m+2n+2p = \frac{-1}{2} + 4 - 2 = \frac{3}{2}.$$

Câu 23: Một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10;3;0)$ trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét) và chuyển động đều theo hướng của vector $\vec{u} = (2; -2; 1)$ với tốc độ là 4,5 (m/s) được mô hình hóa như các hình vẽ sau:



a) Phương trình chính tắc của đường cáp là $\frac{x-10}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}.$

b) Giả sử sau t giây kể từ lúc xuất phát ($t \geq 0$), cabin đến vị trí điểm M . Khi đó tọa độ của điểm M là $\left(3t+10; -3t+3; \frac{3t}{2}\right).$

c) Biết rằng cabin dừng ở điểm B có hoành độ $x_B = 550$. Khi đó quãng đường AB có độ dài bằng 810 (m) làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

d) Đường cáp AB tạo với mặt phẳng Oxy một góc 91° (làm tròn đến hàng đơn vị của độ).

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Đúng.

Đường cáp đi qua điểm $A(10;3;0)$ và vector chỉ phương $\vec{u} = (2; -2; 1)$ có phương trình chính tắc:

$$d: \frac{x-10}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}.$$

b) Đúng

$$\text{Đường thẳng } d \text{ có phương trình tham số: } \begin{cases} x = 10 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases}$$



Điểm $M \in d \Rightarrow M\left(3t+10; -3t+3; \frac{3t}{2}\right)$.

c) **Đúng.** $B \in d \Rightarrow B(2s+10; -2s+3; s)$.

Do $x_B = 550 \Rightarrow 2s+10 = 550 \Rightarrow s = 270 \Rightarrow B(550; -537; 270)$

$AB = \sqrt{(550-10)^2 + (-537-3)^2 + (270-0)^2} = 810 \text{ m.}$

d) **Sai.**

Đường cáp có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -2; 1)$.

Mặt phẳng Oxy có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (0; 0; 1)$.

Gọi α là góc giữa đường cáp và mặt phẳng Oxy , ta có $\sin \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha \approx 19^\circ$.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, một viên đạn được bắn ra từ vị trí $A(1; 2; 3)$ hướng đến vị trí $B(0; 1; -6)$, bia chắn là mặt phẳng $(P): 4x - y + 2z + 13 = 0$, đơn vị là kilomet.

a) Hình chiếu vuông góc của A trên (Oxy) là $H(0; 2; 3)$.

b) Góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (P) (làm tròn đến hàng đơn vị) là 60° .

c) Điểm B thuộc mặt phẳng (P) .

d) Giả sử viên đạn chuyển động thẳng đều theo hướng vectơ $\vec{v}(-2; -2; -18)$ với vận tốc 800 m/s (bỏ qua mọi lực cản và chướng ngại vật), sau một phút bắn ra đi qua điểm B .

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
--------	--------	---------	--------

a) Hình chiếu vuông góc của A trên (Oxy) là $H(1; 2; 0)$.

Chọn SAI.

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; -1; -9)$, $\overrightarrow{n_{(P)}} = (4; -1; 2)$, $\sin(AB; (P)) = \frac{|-4+1-18|}{\sqrt{1+1+9^2} \cdot \sqrt{4^2+1+2^2}} = \frac{\sqrt{1743}}{83}$.

Suy ra $(AB; (P)) \approx 30^\circ$.

Chọn SAI.

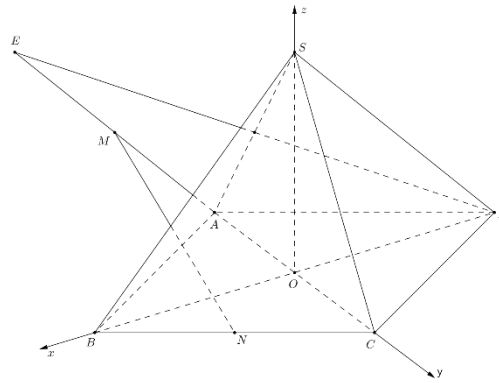
c) Ta có $4 \cdot 0 - 1 + 2(-6) + 13 = 0$ nên B thuộc mặt phẳng (P) .

Chọn ĐÚNG.

d) Ta có $AB = \sqrt{83} \text{ (km)}$, vậy thời gian đi từ A đến B là $\frac{\sqrt{83} \cdot 1000}{800} \approx 11,38$ (giây).

Chọn SAI.

Câu 25: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh bằng $\sqrt{2}$, $SO = 1$. Gọi E là điểm đối xứng với D qua trung điểm của SA . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE và BC . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình bên.



- a) Tọa điểm A là $(0; -1; 0)$.
 b) Mặt phẳng đáy có phương trình $x + y = 0$.
 c) Hai đường thẳng MN và BD vuông góc với nhau.
 d) Giá trị sin của góc tạo bởi đường thẳng MN và mặt đáy bằng $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) $OA = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1$. Suy ra $A(0; -1; 0)$.

b) Mặt phẳng đáy là mặt phẳng (Oxy) , do đó phương trình mặt phẳng đáy là $z = 0$.

c) $OA = OB = OC = OD = 1 \Rightarrow B(1; 0; 0), C(0; 1; 0), D(-1; 0; 0)$.

N là trung điểm $BC \Rightarrow N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

$S(0; 0; 1), A(0; -1; 0) \Rightarrow$ tọa độ trung điểm SA là $\left(0; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

E đối xứng D qua trung điểm $SA \Rightarrow E(1; -1; 1)$.

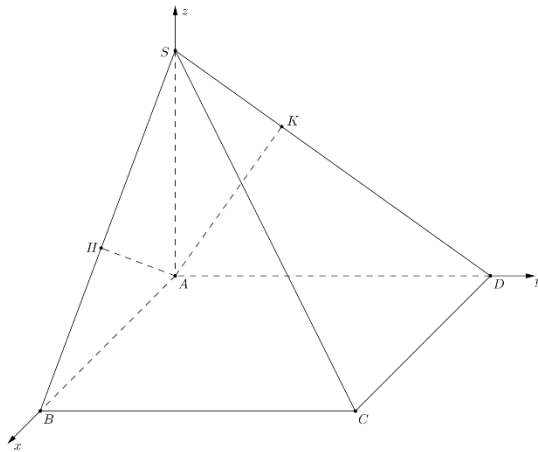
M là trung điểm $AE \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{MN} = \left(0; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right), \overrightarrow{BD} = (-2; 0; 0) \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow MN \perp BD$.

d) $\overrightarrow{MN} = \left(0; -\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$, mặt phẳng đáy có vector pháp tuyến $\vec{n} = (0; 0; 1)$

$$\Rightarrow \sin(MN, (ABCD)) = \cos(\overrightarrow{MN}, \vec{n}) = \frac{\left|0 \cdot 0 + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1\right|}{\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 1, SA vuông góc với mặt đáy và có độ dài bằng 2. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SD . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình bên.



- a) Tọa độ điểm C là $(1;1;1)$.
- b) Phương trình đường thẳng SC là $x = y = \frac{z-2}{-2}$.
- c) Góc giữa đường thẳng AC và SB là 30° .
- d) Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (AHK) là 60° .

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
--------	---------	--------	--------

a) Vì $C \in (Oxy)$, $CB = CD = 1$ nên $C(1;1;0)$.

b) $S(0;0;2) \Rightarrow \overrightarrow{SC} = (1;1;-2)$.

Đường thẳng SC đi qua $S(0;0;2)$ và có vector chỉ phương $\overrightarrow{SC} = (1;1;-2)$

$$\Rightarrow SC: x = y = \frac{z-2}{-2}.$$

c) $\overrightarrow{AC} = (1;1;0)$, $B(1;0;0) \Rightarrow \overrightarrow{SB} = (1;0;-2)$.

$$\text{Suy ra } \cos(AC, SB) = \frac{|1.1 + 1.0 + 0.(-2)|}{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow (AC, SB) \approx 71^\circ 34'.$$

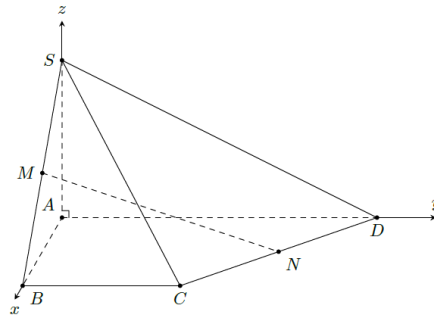
d) Ta có $BC \perp SA, BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB)$, suy ra $BC \perp AH$. Mà $AH \perp SB$ nên $AH \perp (ABC) \Rightarrow AH \perp SC$.

Tương tự, ta cũng có $AK \perp SC$. Do đó, $SC \perp (AHK)$ hay vector pháp tuyến của (AHK) là $\vec{n}_{(AHK)} = \overrightarrow{SC} = (1;1;-2)$. Ta lại có $\overrightarrow{SD} = (0;1;-2)$.

$$\text{Suy ra } \sin(SD, (AHK)) = \left| \cos(\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{SC}) \right| = \left| \frac{1.0 + 1.1 + (-2)(-2)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2}} \right| = \frac{5}{\sqrt{30}}.$$

Vậy $(SD, (AHK)) \approx 65^\circ 54'$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình bên.



- a) Tọa điểm C là $(1;1;0)$.
- b) Góc tạo bởi đường thẳng SB và AC là 60° .
- c) Cô-sin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC) là $\frac{\sqrt{55}}{10}$.
- d) Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) là 30° .

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) Vì $C \in (Oxy)$, $AB = BC = a$ nên $C(a; a; 0)$

b) Chuẩn hóa $a = 1$ thì $C(1;1;0)$, $S(0;0;1)$, $B(1;0;0) \Rightarrow \overrightarrow{SB} = (1;0;-1)$; $\overrightarrow{AC} = (1;1;0)$.

$$\text{Suy ra } \cos(SB, AC) = \frac{|1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow (SB, AC) = 60^\circ.$$

c) M là trung điểm $SB \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$, N là trung điểm $CD \Rightarrow N\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$.

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MN} = \left(0; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AS} = (0;0;1), \overrightarrow{AC} = (1;1;0) \Rightarrow \vec{n}_{(SAC)} = [\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AC}] = (-1;1;0).$$

$$\sin(MN, (SAC)) = \left| \cos\left(\overrightarrow{MN}, \vec{n}_{(SAC)}\right) \right| = \frac{\left| 0 \cdot (-1) + \frac{3}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 0 \right|}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

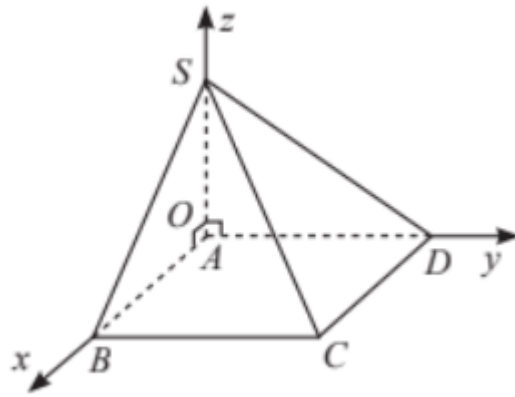
$$\Rightarrow \cos(MN, (SAC)) = \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{55}}{10}.$$

d) Ta có $\overrightarrow{BS} = (-1;0;1)$, $\overrightarrow{BC} = (0;1;0) \Rightarrow \vec{n}_{(SBC)} = [\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BC}] = (-1;0;-1)$.

$$\text{Suy ra } \cos((SBC), (SAC)) = \frac{|(-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0|}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}.$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) bằng 60° .

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a, AD = 5a, SA = 3a$ và $SA \perp (ABCD)$. Bằng cách thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ (chọn $a = 1$) như hình bên.



- a) Tọa độ $A \equiv O(0;0;0), B(2;0;0), S(0;0;3), D(0;5;0), C(2;5;0)$.
- b) Phương trình mặt phẳng (SBD): $\frac{x}{2} - \frac{y}{5} - \frac{z}{3} = 1$
- c) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) là $\frac{30}{19}$.
- d) Bán kính mặt cầu đi qua bốn điểm S, A, C, D là $R = \frac{\sqrt{38}}{2}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

- a) Đúng. Ta có $A \equiv O(0;0;0), B(2;0;0), S(0;0;3), D(0;5;0), C(2;5;0)$.

- b) Sai. (SBD): $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} + \frac{z}{3} = 1$

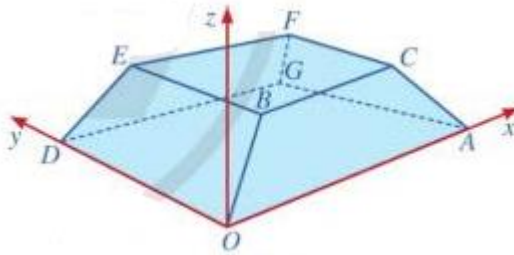
- c) Đúng. $d(A, (SBD)) = \frac{|-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{30}{19}$.

- d) Đúng. Gọi mặt cầu cần tìm có dạng $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, đi qua bốn điểm

$$S, A, C, D, \text{ nên ta có hệ } \begin{cases} 9 - 6c + d = 0 \\ d = 0 \\ 4 + 25 - 4a - 10b + d = 0 \\ 25 - 10b + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{5}{2} \\ c = \frac{3}{2} \\ d = 0 \end{cases}.$$

Nên tâm mặt cầu là $I\left(1; \frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{38}}{2}$.

Câu 29: Một sân vận động được xây dựng theo mô hình là hình chóp cụt $OAGD.BCFE$ có hai đáy song song với nhau. Mặt sân $OAGD$ là hình chữ nhật và được gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ dưới (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Mặt sân $OAGD$ có chiều dài $OA = 100m$, chiều rộng $OD = 60m$ và tọa độ điểm $B(10; 10; 8)$.



- a) Tọa độ điểm $A(100;0;0), D(0;60;0), G(100;60;0)$.
- b) Vector pháp tuyến của mặt phẳng $(OBED)$ là $\vec{n} = (4;0;5)$
- c) Phương trình mặt phẳng $(OBED)$ là: $4x - 5z = 0$.
- d) $d(G, (OBED)) \approx 60,5m$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng. Gắn hình chóp cụt $OAGD.BCFE$ vào hệ trục $Oxyz$, ta có:

$$O(0;0;0), A(100;0;0), D(0;60;0) \Rightarrow G(100;60;0).$$

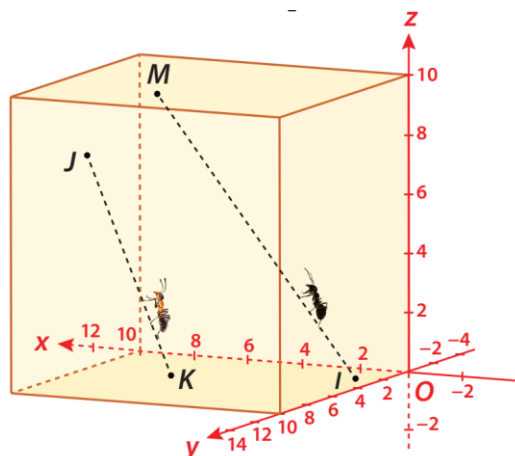
b) Sai. $\vec{OD} = (0;60;0), \vec{OB} = (10;10;8)$. Vector pháp tuyến của mặt phẳng $(OBED)$ là $\vec{n} = [\vec{OD}, \vec{OB}] = (480;0;-600) = 120(4;0;-5)$

c) Đúng. Phương trình mặt phẳng $(OBED)$ đi qua điểm $O(0;0;0)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n} = (4;0;-5)$ là: $4x - 5z = 0$.

d) Sai. Khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng $(OBED)$ là:

$$d(G, (OBED)) = \frac{|4 \cdot 100 - 5 \cdot 0|}{\sqrt{16 + 25}} = \frac{400\sqrt{41}}{41} \approx 62,5m.$$

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$ cho trước (1 đơn vị = 1 cm), có một chú kiến vàng và một chú kiến đen bò trên hai sợi dây thẳng khác nhau. Giả sử tại thời điểm t (tính bằng phút), kiến vàng ở tại vị trí $(2 + 2t; 1 - t; 2 + t)$ trên đường thẳng d_1 . Cùng thời điểm đó, kiến đen ở tại vị trí $(7 - t; 2 - t; -36 + 3t)$ trên đường thẳng d_2 .



- a) Tại thời điểm $t = 1$, kiến vàng có tọa độ $(4;0;3)$. kiến đen có tọa độ $B(6;1;33)$.
- b) Tại thời điểm $t = 1$, khoảng cách giữa hai chú kiến khoảng 36,07 cm.
- c) Khoảng cách giữa hai chú kiến nhỏ nhất là $\sqrt{833}$.



d) Tại thời điểm $t = 7$ thì khoảng cách giữa hai chú kiến là nhỏ nhất.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------------	----------------	----------------	----------------

a) Sai. Tại thời điểm $t = 1$ kiến vàng ở vị trí $A(4; 0; 3)$, kiến đen ở vị trí $B(6; 1; -33)$.

b) Đúng. Suy ra khoảng cách giữa hai chú kiến là $AB = \sqrt{2^2 + 1^2 + 36^2} = \sqrt{1301} \approx 36,07 \text{ cm}$

c) Đúng. Ở thời điểm t kiến vàng ở vị trí $M(2 + 2t; 1 - t; 2 + t)$, kiến đen ở vị trí $N(7 - t; 2 - t; -36 + 3t)$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{(3t - 5)^2 + 1 + (2t - 38)^2} = \sqrt{13t^2 - 182t + 1470} = \sqrt{13(t - 7)^2 + 833} \geq \sqrt{833}$$

vì $(t - 7)^2 \geq 0, \forall t$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t = 7$. Vậy ở phút thứ 7 thì khoảng cách giữa hai chú kiến là nhỏ nhất.

d) Đúng. Vậy ở phút thứ 7 thì khoảng cách giữa hai chú kiến là nhỏ nhất.

