



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 16$, bán kính R của mặt cầu là

A. $R = 4$.

B. $R = 16$.

C. $R = 0$.

D. $R = 2$.

Lời giải

Phương trình tổng quát của mặt cầu trong không gian $Oxyz$ là:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow R^2 = 16 \Rightarrow R = 4.$$

Câu 2: (MĐ 103-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-4; 2; -6)$.

B. $(4; -2; 6)$.

C. $(2; -1; 3)$.

D. $(-2; 1; -3)$.

Lời giải

Tâm mặt cầu (S) có tọa độ là: $(2; -1; 3)$.

Câu 3: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(1; -3; 0)$.

B. $(-1; 3; 0)$.

C. $(1; 3; 0)$.

D. $(-1; -3; 0)$.

Lời giải

Mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$ có tâm là $I(-1; 3; 0)$.

Câu 4: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1; 0; 2)$.

B. $(1; 0; 2)$.

C. $(1; 0; -2)$.

D. $(-1; 0; -2)$.

Lời giải

Từ phương trình ta có ngay tọa độ tâm của mặt cầu (S) là $(1; 0; -2)$.

Câu 5: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 16$. Bán kính của (S) là:

A. 32

B. 8

C. 4

D. 16

Lời giải



Từ phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 16 \Rightarrow$ Bán kính $R = \sqrt{16} = 4$

Câu 6: (TK 2020-2021) Trong không gian Oxyz, mặt cầu (S): $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$ có bán kính bằng

A. 9.

B. 3.

C. 81.

D. 6.

Lời giải

Phương trình mặt cầu là: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ nên $R^2 = 9 \Rightarrow R = 3$.

Câu 7: (Mã 101 - 2019) Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. 3.

B. $\sqrt{15}$.

C. $\sqrt{7}$.

D. 9.

Lời giải

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2(-1).x + 2.0.y - 2.1.z - 7 = 0.$$

$$\Rightarrow a = -1, b = 0, c = 1, d = -7.$$

$$\Rightarrow \text{Tâm mặt cầu } I(-1; 0; 1) \text{ bán kính } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 7} = 3.$$

Câu 8: (MĐ 101-2022) Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S): $x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$. Đường kính của (S) bằng

A. $\sqrt{6}$.

B. 12.

C. $2\sqrt{6}$.

D. 3.

Lời giải

Từ phương trình mặt cầu ta suy ra bán kính của mặt cầu (S): $R = \sqrt{6}$

Vậy đường kính của (S) bằng $2\sqrt{6}$.

Câu 9: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S): $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 4$. Xác định tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

A. $I(3; -1; 2), R = 2$. B. $I(-3; 1; -2), R = 2$. C. $I(-3; 1; -2), R = 4$. D. $I(3; -1; 2), R = 4$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -1; 2)$ và bán kính $R = 2$.

Câu 10: Trong không gian Oxyz, phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 6y - 2 = 0$ là phương trình của mặt cầu có tâm I. Xác định tọa độ tâm I

A. $I(2; -1; 3)$.

B. $I(2; 3; -1)$.

C. $I(2; -3; 1)$.

D. $I(2; 1; -3)$.

Lời giải

Mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a = -4 \\ -2b = -6 \\ -2c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -1 \end{cases}.$$

Vậy tâm của mặt cầu là $I(2; 3; -1)$



Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 2 = 0$. Xác định tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .

A. $I(1; 2; -1), R = 2\sqrt{2}$. **B.** $I(-1; -2; 1), R = 2\sqrt{2}$.

C. $I(2; 4; -2), R = \sqrt{2}$. **D.** $I(2; 4; 2), R = 8$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2 - (-2)} = 2\sqrt{2}$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y - 4)^2 + (z - 1)^2 = 25$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

A. $I(0; -4; -1), R = 25$. **B.** $I(0; -4; -1), R = 5$.

C. $I(0; 4; 1), R = 25$. **D.** $I(0; 4; 1), R = 5$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 4; 1)$ và bán kính $R = 5$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8z + 4 = 0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

A. $I(-3; 2; -4), R = 25$. **B.** $I(3; -2; 4), R = 5$. **C.** $I(3; -2; 4), R = 25$. **D.** $I(-3; 2; -4), R = 5$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 4)$ và bán kính $R = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2 - 4} = 5$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y - 2z - 4 = 0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

A. $I(2; -4; 1), R = 5$. **B.** $I(-2; 4; -1), R = 25$.

C. $I(2; -4; 1), R = \sqrt{21}$. **D.** $I(-2; 4; -1), R = 21$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -4; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 1^2 - (-4)} = 5$.

Câu 15: **Câu 19 (101-2023)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -1)$ và bán kính $R = 2$. Phương trình của (S) là

A. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 4$.

B. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 2$.

C. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 2$.

D. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 4$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -1)$ và bán kính $R = 2$ là $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 2^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 4$.



Câu 16: Câu 23 (102-2023) Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-1)$ và có bán kính $R = \sqrt{2}$.

Phương trình của (S) là

A. $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = \sqrt{2}$.

B. $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$.

C. $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2$.

D. $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = \sqrt{2}$.

Lời giải

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} I(1;0;-1) \\ R = \sqrt{2} \end{cases}$.

Do đó mặt cầu (S) có phương trình là: $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2$.

Câu 17: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$ và bán kính bằng 2. Phương trình của (S) là

A. $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 2$.

B. $x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 2$.

C. $x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$.

D. $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$ và bán kính bằng 2 có phương trình là $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;2;1)$ và $B(1;0;1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt cầu đường kính AB ?

A. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 5$.

B. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 20$.

C. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.

D. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 20$.

Lời giải

Do AB là đường kính của mặt cầu nên trung điểm $I(3;1;1)$ của AB là tâm mặt cầu, bán kính của mặt

cầu là: $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(5-1)^2 + (2-0)^2 + (1-1)^2}}{2} = \sqrt{5}$.

Ta có phương trình mặt cầu: $(C): (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(-1;0;5)$. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt cầu đường kính AB ?

A. $x^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 3$.

B. $x^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 12$.

C. $x^2 + (y+1)^2 + (z+4)^2 = 3$.

D. $x^2 + (y+1)^2 + (z+4)^2 = 12$.

Lời giải

Mặt cầu đường kính AB có tâm là trung điểm $I(0;1;4)$ của AB và bán kính

$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(-1-1)^2 + (0-2)^2 + (5-3)^2}}{2} = \sqrt{3}$, có phương trình là $x^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 3$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;1;1)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua A là

A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 5$

B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 29$



C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$

Lời giải

Ta có $R = IA = \sqrt{(1-1)^2 + (2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$

vậy phương trình mặt cầu tâm I và đi qua điểm A có phương trình là

$(x-x_I)^2 + (y-y_I)^2 + (z-z_I)^2 = R^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và đi qua điểm $M(4;0;0)$. Phương trình của (S) là

A. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25$.

B. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 5$.

C. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25$.

D. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 5$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và bán kính R là: $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = R^2$.

Ta có: $M \in (S) \Rightarrow 4^2 + 0^2 + (0+3)^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 = 25$.

Vậy phương trình cần tìm là: $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25$.

Câu 22: Mặt cầu (C) có tâm $I(1;0;-2)$ và đi qua điểm $B(4;-4;-2)$ có phương trình là

A. $(C): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 5$.

B. $(C): (x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 5$.

C. $(C): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$.

D. $(C): (x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 25$.

Lời giải

Ta có: $\overline{IB} = (3; -4; 0) \Rightarrow R = |\overline{IB}| = 5$.

Khi đó, phương trình mặt cầu là $(C): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm I , tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) là:

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 13$.

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 14$.

D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 1$.

Lời giải

Gọi M là hình chiếu vuông góc của tâm $I(1;-2;3)$ lên mặt phẳng (Oyz) , suy ra $M(0;-2;3)$.

Vì mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) nên có bán kính $R = IM = 1$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 1$.

Câu 24: (MĐ 103-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng $x-2y+2z+3=0$ là

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 2$.

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$.

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4$.

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.



Lời giải

Gọi $(P): x - 2y + 2z + 3 = 0$. Mặt cầu có bán kính là $R = d(A; (P)) = \frac{|1 - 4 + 6 + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 2$.

Phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc mặt phẳng (P) là $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 4$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 5 = 0$. Phương trình mặt cầu tâm $I(1; -3; 2)$ tiếp xúc với mặt phẳng (P)

A. $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 2)^2 = \frac{16}{9}$.

B. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = \frac{16}{9}$.

C. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = \frac{4}{3}$.

D. $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 2)^2 = \frac{4}{3}$.

Lời giải

Ta có bán kính $R = d(I, (P)) = \frac{|1 + 2 \cdot (-3) - 2 \cdot 2 + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = \frac{16}{9}$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$. Điểm có tọa độ nào sau đây nằm trên mặt cầu?

A. $(-1; 2; -3)$.

B. $(1; -2; -1)$.

C. $(1; -2; 1)$.

D. $(1; -2; 3)$.

Lời giải

Thay tọa độ của các điểm đã cho vào phương trình mặt cầu ta được điểm có tọa độ $(1; -2; -1)$ nằm trên mặt cầu.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 2$. Trong các điểm cho dưới đây, điểm nào nằm ngoài mặt cầu (S) ?

A. $M(1; 1; 1)$

B. $N(0; 1; 0)$

C. $P(1; 0; 1)$

D. $Q(1; 1; 0)$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 1; 0)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$.

Khoảng cách từ các điểm đã cho tới tâm mặt cầu:

$MI = \sqrt{2} = R$; $NI = 0 < R$, $PI = \sqrt{3} > R$, $QI = 1 < R$.

Do đó điểm P nằm ngoài mặt cầu.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 3 = 0$ và một điểm $M(4; 2; -2)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Điểm M là tâm của mặt cầu (S) .

B. Điểm M nằm trên mặt cầu (S) .

C. Điểm M nằm trong mặt cầu (S) .

D. Điểm M nằm ngoài mặt cầu (S) .

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;-1)$ và bán kính $R=3$.

Khi đó $IM = \sqrt{(4-2)^2 + (2-1)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{6} < R$.

Vậy điểm M nằm trong mặt cầu (S) .

Câu 29: Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt cầu?

A. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 3$.

B. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = -3$.

C. $(x-1) + (y-3) + (z+2) = 9$.

D. $(x-1) + (y-3) + (z+2) = -9$.

Lời giải

Do phương trình mặt cầu có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ nên vế phải của phương trình là $R^2 > 0$

Câu 30: Điều kiện để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình mặt cầu?

A. $a+b+c-d > 0$. **B.** $a^2 + b^2 + c^2 + d > 0$.

C. $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$. **D.** $a^2 + b^2 + c^2 - d \geq 0$.

Lời giải

Để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình mặt cầu thì $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, trong các phương trình sau, phương trình nào không phải là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 4z + 11 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 4z - 21 = 0$.

D. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 4y - 8z - 10 = 0$.

Lời giải

Xét phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 4z + 11 = 0$

Có $a = \frac{2}{-2} = -1$; $b = \frac{2}{-2} = -1$; $c = \frac{-4}{-2} = 2$; $d = 11$

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 - d = (-1)^2 + (-1)^2 + 2^2 - 11 = -5 < 0$

Nên phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 4z + 11 = 0$ không là phương trình mặt cầu.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình mặt cầu?

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$.

B. $x^2 + y^2 - z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 7 = 0$.

D. $x^2 - y^2 - z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$.

Lời giải

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2 \cdot (-1) \cdot x - 2 \cdot 0 \cdot y - 2 \cdot 1 \cdot z - 7 = 0$.

$\Rightarrow a = -1, b = 0, c = 1, d = -7$.

$\Rightarrow$ Tâm mặt cầu $I(-1;0;1)$ bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 7} = 3$.

Suy ra đáp án A là phương trình mặt cầu.

Đáp án B, C, D không là phương trình mặt cầu vì không ở dạng tổng quát của phương trình mặt cầu

$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.



Câu 33: Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt cầu có tâm $I(1; -2; -3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) là

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 9.$

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1.$

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4.$

D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 1.$

Lời giải

Ta có phương trình mặt phẳng (Oyz) là $x = 0$.

Do đó bán kính mặt cầu là $R = d(I; (Oyz)) = 1.$

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 1.$

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(2; 1; m-1)$, tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) biết mặt cầu có diện tích bằng 16π .

A. $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 16 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 16 \end{cases}$

B. $\begin{cases} (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 16 \\ (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 16 \end{cases}$

C. $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4 \end{cases}$

D. $\begin{cases} (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 4 \\ (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4 \end{cases}$

Lời giải

Ta có diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = 16\pi \Leftrightarrow R = 2$

Do mặt cầu (S) tiếp xúc với (Oxy) nên ta có $d(I; (Oxy)) = R \Rightarrow |m-1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -1 \end{cases}$

Vậy có hai mặt cầu thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4 \end{cases}$

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá nguyên của m để

$x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-1)z + 3m^2 - 5 = 0$ là phương trình một mặt cầu?

A. 4.

B. 6.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi

$(m+2)^2 + (m-1)^2 - 3m^2 + 5 > 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 10 < 0$

$\Leftrightarrow -1 - \sqrt{11} < m < 1 + \sqrt{11}$

Theo bài ra $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\} \Rightarrow$ có 7 giá trị của m nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình

$x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 9m^2 - 28 = 0$ là phương trình mặt cầu?

A. 7.

B. 8.

C. 9.

D. 6.

Lời giải

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi



$$(2m)^2 + (m)^2 + (m)^2 - 9m^2 + 28 > 0$$

$$\Leftrightarrow -3m^2 + 28 < 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{\frac{28}{3}} < m < \sqrt{\frac{28}{3}}$$

Do m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Vậy có 7 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, tìm giá trị dương của m sao cho mặt phẳng (Oxy) tiếp xúc với mặt cầu

$$(x-3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = m^2 + 1?$$

A. $m = 5$.

B. $m = \sqrt{3}$.

C. $m = 3$.

D. $m = \sqrt{5}$

Lời giải

Mặt cầu $(S): (x-3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = m^2 + 1$ có tâm $I(3; 0; 2)$, bán kính $R = \sqrt{m^2 + 1}$.

(S) tiếp xúc với $(Oxy) \Leftrightarrow d(I, (Oxy)) = R$

$$\Leftrightarrow 2 = \sqrt{m^2 + 1} \Leftrightarrow m^2 = 3 \Leftrightarrow m = \sqrt{3}.$$

Câu 38: Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ với m là tham số. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Giả sử $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ là phương trình mặt cầu.

Khi đó tâm mặt cầu là $I(2; -m; 0)$, và bán kính $R = \sqrt{4 + m^2 - (3m^2 - 2m)} = \sqrt{-2m^2 + 2m + 4}$ với điều kiện $-2m^2 + 2m + 4 > 0 \Leftrightarrow m \in (-1; 2)$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của m bằng 1.

Câu 39: Với giá trị nào của m thì mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 5 = 0$ tiếp xúc với mặt cầu

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 2(2-m)y - 4mz + 5m^2 + 1 = 0?$$

A. $m = -3$.

B. $m = 1$ hoặc $m = -3$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$ hoặc $m = 3$.

Lời giải

Ta có $a = m; b = m - 2; c = 2m; d = 5m^2 + 1$. Tâm $I(m, m - 2, 2m)$

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi

$$R^2 = m^2 + (m-2)^2 + 4m^2 - 5m^2 - 1 = m^2 - 4m + 3 > 0$$

$\Leftrightarrow m < 1$ hoặc $m > 3$ (P) tiếp xúc (S) khi:

$$d(I, P) = \frac{|3m-3|}{\sqrt{6}} = R = \sqrt{m^2 - 4m + 3}$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = -3 \text{ hoặc } m > 3 (\text{loại})$$

Vậy $m = -3$

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trong các mặt cầu dưới đây, mặt cầu nào có bán kính $R = 2$?



A. (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 3 = 0$

B. (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 10 = 0$

C. (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 2 = 0$

D. (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 5 = 0$

Lời giải

Ta có mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ có bán kính là $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

Trong đáp án C ta có:
$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -1 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{4} = 2.$$

Câu 41: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-2; -3; -4)$ và tiếp xúc với trục Ox .

A. $(x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 = 5.$

B. $(x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 = 25.$

C. $(x+2)^2 + (x+3)^2 + (x+4)^2 = 5.$

D. $(x+2)^2 + (x+3)^2 + (x+4)^2 = 25.$

Lời giải

$R = d(I; Ox) = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5.$

Phương trình mặt cầu (S) là $(x+2)^2 + (x+3)^2 + (x+4)^2 = 25.$

Câu 42: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $A(-3; 1; 4)$ và tiếp xúc với đường thẳng

$\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}.$

A. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+4)^2 = \sqrt{30}.$

B. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+4)^2 = 30.$

C. $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = \sqrt{30}.$

D. $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 30.$

Lời giải

Đường thẳng Δ đi qua $M(-1; 2; -3)$ và nhận $\vec{u}_\Delta = (2; 1; -1)$ làm một vector chỉ phương.

$$R = d(A; \Delta) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{AM}, \vec{u} \right] \right|}{\left| \vec{u} \right|} = \sqrt{30}.$$

Phương trình mặt cầu (S) là $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 30.$

Câu 43: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0; -2; 1)$ và mặt phẳng (P): $x + 2y - 2z + 3 = 0$.

Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$. Viết phương trình mặt cầu (S).

A. (S): $x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 3.$

B. (S): $x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 1.$

C. (S): $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3.$

D. (S): $x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 2.$

Lời giải

Ta có
$$h = d(I, (P)) = \frac{|0 + 2 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 1$$



Gọi (C) là đường tròn giao tuyến có bán kính $r = \sqrt{2}$.

Mà $R^2 = r^2 + h^2 = 3 \Rightarrow R = \sqrt{3}$.

Do đó mặt cầu tâm $I(0; -2; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{3}$.

Phương trình mặt cầu $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$

Câu 44: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 2 = 0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π . Viết phương trình của mặt cầu (S) .

A. $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$.

B. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$.

C. $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$.

D. $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 25$.

Lời giải

Ta có $h = d(I; (P)) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 + 2 \cdot 3 + 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 4$.

Gọi (C) là đường tròn giao tuyến có bán kính r do đó $2\pi r = 6\pi \Rightarrow r = 3$.

Gọi R là bán kính cầu, suy ra $R^2 = h^2 + r^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Leftrightarrow R = 5$.

Vậy phương trình mặt cầu là: $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$.

Câu 45: Cho mặt cầu (S) đi qua $A(0; 8; 0), B(4; 6; 2), C(0; 12; 4)$ và có tâm $I(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) . Tính $a + b + c = ?$

A. 5.

B. 7.

C. 0.

D. 12.

Lời giải

Do tâm I thuộc mặt phẳng (Oyz) nên $a = 0 \Rightarrow I(0; b; c)$

Mặt cầu đi qua $A; B; C$ nên $IA = IB = IC$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-8)^2 + c^2 = 4^2 + (b-4)^2 + (c-2)^2 \\ (b-8)^2 + c^2 = (b-12)^2 + (c-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ c = 5 \end{cases}$$

Suy ra $a + b + c = 0 + 7 + 5 = 12$.

Câu 46: Cho 3 điểm $A(2; 0; 1), B(1; 0; 0), C(1; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 2 = 0$. Mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P) có bán kính bằng?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi $I(x; y; z)$ là tâm mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C

$$\Leftrightarrow IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2 \\ (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Do tâm $I(x; y; z)$ thuộc mặt phẳng (P) nên: $x + y + z - 2 = 0$

Ta có hệ phương trình



$$\begin{cases} x + z = 2 \\ x - y = 1 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Vậy $I(1;0;1)$ và $R^2 = IA^2 = 1 \Rightarrow R = 1$.

Câu 47: Cho các điểm $A(1;3;1); B(3;2;2)$. Viết phương trình mặt cầu đi qua hai điểm A, B và tâm thuộc trục Oz

A. $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 14$.

B. $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 9$.

C. $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 9$.

D. $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 14$.

Lời giải

Do tâm I thuộc trục Oz nên $I(0;0;z)$

$$IA^2 = 1^2 + 3^2 + (z - 1)^2$$

$$IB^2 = 3^2 + 2^2 + (z - 2)^2$$

Do mặt cầu đi qua 2 điểm A, B nên $IA = IB$

$$\Rightarrow IA^2 = IB^2$$

$$\Rightarrow 1^2 + 3^2 + (z - 1)^2 = 3^2 + 2^2 + (z - 2)^2$$

$$\Leftrightarrow 2z = 6 \Leftrightarrow z = 3$$

$$\Rightarrow I(0;0;3); R^2 = IA^2 = 14$$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là:

$$x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 14$$

Câu 48: Cho các điểm $A(0;1;3)$ và $B(2;2;1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$. Bán kính mặt cầu đi qua hai điểm A, B và tâm thuộc đường thẳng d bằng?

A. $\frac{1}{2}$.

B. 2.

C. 3.

D. $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Lời giải

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$$

Phương trình tham số của d :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

Gọi I là tâm của mặt cầu, do I thuộc d nên $I(1+2t; 2-t; 3-2t)$

$$\text{Ta có: } IA^2 = (1+2t)^2 + (2-t-1)^2 + (3-2t-3)^2 = 9t^2 + 2t + 2$$

$$IB^2 = (1+2t-2)^2 + (2-t-2)^2 + (3-2t-1)^2 = 9t^2 - 4t + 5$$

Do mặt cầu đi qua 2 điểm A, B nên $IA = IB$

$$\Rightarrow IA^2 = IB^2$$

$$\Rightarrow 9t^2 + 2t + 2 = 9t^2 - 4t + 5$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$



$$\Rightarrow I\left(2; \frac{3}{2}; 2\right); R^2 = IA^2 = \frac{21}{4} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

Câu 49: Một vệ tinh quay quanh Trái Đất với độ cao so với mặt đất là 18900 km. Ta xét trong không gian Oxyz với tâm O là tâm Trái Đất, 1 đơn vị dài trong không gian Oxyz tương ứng với 6300 km trên thực tế. Biết bán kính Trái Đất khoảng 6300 km. Phương trình biểu diễn quỹ đạo chuyển động của vệ tinh đó là

- A. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. B. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. C. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. D. $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.

Lời giải

Khoảng cách từ tâm Trái Đất đến vệ tinh là $18900 + 6300 = 25200$ tương ứng bằng 4 đơn vị. Ta thấy quỹ đạo chuyển động của vệ tinh quanh Trái Đất là một mặt cầu có tâm là tâm Trái Đất có tọa độ là $O(0;0;0)$ và bán kính $R = 4$.

Do đó phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

Câu 50: Một máy Rađa có tầm hoạt động với bán kính tối đa là 20 km. Ta xét trong không gian Oxyz với tâm O là vị trí máy Rađa, 1 đơn vị dài trong không gian Oxyz tương ứng với 10 km trên thực tế. Hỏi trong không gian Oxyz trên, vật thể có tọa độ tương ứng với đáp án nào dưới đây sẽ bị Rađa phát hiện?

- A. $M(1;0;2)$. B. $N(2;-1;1)$. C. $P(1;1;\sqrt{2})$. D. $Q(3;0;0)$.

Lời giải

Ta thấy quỹ đạo của Rađa là một khối cầu giới hạn bởi mặt cầu (S) có tâm là vị trí máy Rađa có tọa độ là $O(0;0;0)$ và bán kính $R = 2$.

Do đó ta có phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Vật thể bắt đầu bị phát hiện khi nó nằm trong hoặc trên mặt cầu (S).

Trong 4 đáp án trên ta thấy có đáp án C thỏa mãn phương trình mặt cầu (S) các đáp án còn lại đều nằm ngoài (S).

Câu 51: Trong không gian Oxyz (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6;-1;4)$. Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 2 km. Người sử dụng điện thoại đứng ở điểm nào sau đây thì sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

- A. $A(-4;0;2)$ B. $B(-5;-2;5)$. C. $C(-6;2;2)$ D. $D(0;-1;4)$

Lời giải

Ta có $IA = 3 > 2$; $IB = \sqrt{3} < 2$; $IC = \sqrt{13} > 2$; $ID = 6 > 2$.

Vậy người đứng tại điểm B nằm trong mặt cầu nên sẽ sử dụng được dịch vụ của trạm thu phát sóng điện thoại di động.

Câu 52: Trong không gian Oxyz (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6;-1;4)$. Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 2 km. Người sử dụng điện thoại đứng ở điểm nào sau đây thì **không** sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

- A. $A(-5;0;3)$ B. $B(-5;-2;5)$. C. $C(-6;2;2)$ D. $D(-7;-2;3)$

Lời giải



Ta có $IA = \sqrt{3} < 2; IB = \sqrt{3} < 2, IC = \sqrt{13} > 2, ID = \sqrt{3} < 2$.

Vậy người đứng tại điểm C nằm ngoài mặt cầu nên sẽ không sử dụng được dịch vụ của trạm thu phát sóng điện thoại di động.

Câu 53: Trong không gian $Oxyz$, một thiết bị phát sóng đặt tại vị trí $A(3;0;0)$. Vùng phủ sóng của thiết bị có bán kính bằng 5. Hỏi vị trí của điểm nào sau đây không thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên?

- A. $M(5;0;0)$. B. $N(3;2;-1)$. C. $P(-1;3;1)$. D. $Q(0;-2;0)$.

Lời giải

Ta có $AM = 2 < R$ nên điểm M thuộc vùng phủ sóng.

Ta có $AN = \sqrt{5} < R$ nên điểm N thuộc vùng phủ sóng.

Ta có $AP = \sqrt{26} > R$ nên điểm P không thuộc vùng phủ sóng.

Ta có $AQ = \sqrt{13} < R$ nên điểm Q thuộc vùng phủ sóng.

Câu 54: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), người ta đặt một trạm thu phát sóng điện thoại được đặt ở vị trí $A(-1;2;-3)$. Biết rằng trạm thu phát sóng được thiết kế với bán kính là 4 km, viết phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian?

- A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$ B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4$
C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 16$ D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$

Lời giải

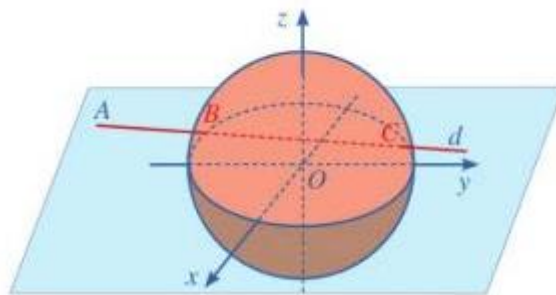
Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 16$$

Câu 55: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu sân bay Cam Ranh – Khánh Hòa ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa 600km. Một máy bay của hãng Việt Nam Airlines đang ở vị trí A , chuyển động theo đường thẳng

$$d \text{ có phương trình } \begin{cases} x = -1000 + 100t \\ y = -200 + 80t \\ z = 10 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ).}$$

Khoảng cách giữa vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa và vị trí mà máy bay bay ra khỏi màn hình ra đa gần nhất với đáp án nào sau đây?



- A. 751. B. 750. C. 749. D. 748.

Lời giải



Ta có: Phương trình mặt cầu ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 360000$.

Tọa độ vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình radar và tọa độ vị trí mà máy bay bay ra khỏi màn hình radar là giao điểm của đường thẳng d và mặt cầu (S) .

Từ phương trình đường thẳng d và mặt cầu (S) ta có:

$$(-1000 + 100t)^2 + (-200 + 80t)^2 + 10^2 = 360000$$

$$\Leftrightarrow 164t^2 - 2320t + 6801 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1160 - \sqrt{230236}}{164} \approx 4,15 \\ t = \frac{1160 + \sqrt{230236}}{164} \approx 10 \end{cases}$$

+) $t = 4,15$ suy ra $B(-585; 132; 10)$

+) $t = 10$ suy ra $C(0; 600; 10)$

Khi đó, $\overline{BC} = (585; 468; 0) \Rightarrow BC \approx 749,17$.

Câu 56: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Viettel được đặt ở vị trí $I(-1; 2; 3)$ và được thiết kế bán kính phủ sóng là $5000m$. Phương trình mặt cầu biểu diễn ranh giới vùng phủ sóng là:

A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$.

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$.

C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25.000.000$.

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25.000.000$.

Lời giải

Tâm mặt cầu có tọa độ $I(-1; 2; 3)$

Bán kính mặt cầu $R = 5000(m) = 5(km)$.

Vậy phương trình mặt cầu mô tả vùng phủ sóng của trạm phát sóng là:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25.$$

Câu 57: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng radar của Nga được đặt trên bán đảo Crimea ở vị trí $I(2; -1; -3)$ và được thiết kế phát hiện máy bay của địch ở khoảng cách tối đa $500km$. Điểm nào sau đây nằm trong vùng phủ sóng của radar?

A. $N(500; 200; 100)$.

B. $P(-300; 250; 400)$.

C. $M(200; -100; -230)$.

D. $Q(120; -200; -500)$.

Lời giải

Vì vùng phát sóng của radar là một mặt cầu có tâm $I(2; -1; -3)$ và bán kính $R = 500$.

•Ta có: $IN = \sqrt{(500-2)^2 + (200+1)^2 + (100+3)^2} \approx 546,8 > 500$

Vì $IN > R$ nên điểm N nằm ngoài mặt cầu. Vậy điểm N nằm ngoài vùng phủ sóng của trạm radar này.

•Ta có: $IP = \sqrt{(-300-2)^2 + (250+1)^2 + (400+3)^2} \approx 562,7 > 500$



Vì $IP > R$ nên điểm P nằm ngoài mặt cầu. Vậy điểm P nằm ngoài vùng phủ sóng của trạm radar này.

•Ta có: $IM = \sqrt{(200-2)^2 + (-100+1)^2 + (-230+3)^2} \approx 317,1 < 500$

Vì $IM < R$ nên điểm M nằm trong mặt cầu. Vậy điểm M nằm trong vùng phủ sóng của trạm radar này.

•Ta có: $IQ = \sqrt{(120-2)^2 + (-200+1)^2 + (-500+3)^2} \approx 548,2 > 500$

Vì $IQ > R$ nên điểm Q nằm ngoài mặt cầu. Vậy điểm Q nằm ngoài vùng phủ sóng của trạm radar này.

Câu 58: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị đo là km), bốn chiếc máy bay ở bốn hướng khác nhau khi vừa bay vào vùng phủ sóng của một chiếc radar thì trên radar ngay lập tức báo tín hiệu phát hiện mục tiêu. Tại thời điểm radar phát hiện mục tiêu thì 4 chiếc máy bay ở vị trí có tọa độ lần lượt là $A(30; 25; 33), B(14; 1; 49), C(40; -29; 1), D(0; 31; 41)$. Phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới vùng phủ sóng của radar trong không gian là

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z - 3598 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z + 2498 = 0$.

C. $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 60^2$.

D. $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 50^2$.

Lời giải

Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Do (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 30^2 + 25^2 + 33^2 - 60a - 50b - 66c + d = 0 \\ 14^2 + 1^2 + 49^2 - 28a - 2b - 98c + d = 0 \\ 40^2 + (-29)^2 + 1^2 - 80a + 58b - 2c + d = 0 \\ 0^2 + 31^2 + 41^2 - 62b - 82c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -60a - 50b - 66c + d = -2614 \\ -28a - 2b - 98c + d = -2598 \\ -80a + 58b - 2c + d = -2442 \\ -62b - 82c + d = -2642 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 1 \\ d = -2498 \end{cases} \quad \text{Suy ra}$$

mặt cầu (S) có tâm $I(0; 1; 1)$ và $R = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2 - (-2498)} = 50$

Vậy mặt cầu (S) có phương trình là $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 50^2$

hay $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z - 2498 = 0$.

Câu 59: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị đo là cm), mặt sàn nhà đa năng thuộc mặt phẳng Oxy . Một quả cầu bằng nhựa nằm trên mặt sàn nhà đa năng và có tâm $I(12; 20; 50)$. Khi đó, mặt ngoài của quả cầu nhựa (S) có phương trình là

A. $(x-12)^2 + (y-20)^2 + (z-50)^2 = 12^2$.

B. $(x+12)^2 + (y+20)^2 + (z+50)^2 = 12^2$.

C. $(x-12)^2 + (y-20)^2 + (z-50)^2 = 20^2$.

D. $(x-12)^2 + (y-20)^2 + (z-50)^2 = 50^2$.

Lời giải

Do quả cầu nằm trên mặt sàn nhà đa năng nên mặt ngoài của quả cầu tiếp xúc với mặt phẳng Oxy

Ta có: $d(I, (Oxy)) = R = 50$

Vậy mặt ngoài của quả cầu (S) có phương trình là $(x-12)^2 + (y-20)^2 + (z-50)^2 = 50^2$

Câu 60: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là km), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(1; 5; 5)$ như hình vẽ. Ngọn hải đăng được thiết kế với bán kính phủ sóng là 5 km.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Một người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí $I(1;5;5)$ đến vị trí $A(7;14;11)$. Điểm nào sau đây mà người đi biển đi qua và vẫn thuộc vùng phủ sáng của ngọn hải đăng?

- A.** $M(3;8;7)$. **B.** $N(0;4;8)$. **C.** $P(7;3;0)$. **D.** $Q(7;11;3)$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trong không gian là:

$$(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-5)^2 = 25$$

Ta có $\vec{IM}(2;3;2)$; $\vec{IA}=(6;9;6)=3\vec{IM}$ và $IM = \sqrt{(3-1)^2 + (8-5)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{17} < 5$ nên điểm M nằm trong mặt cầu. Vậy người đi biển đi qua điểm M mà vẫn thuộc vùng phủ sáng.

Câu 61: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là km), một máy bay đang ở vị trí $A(3;-2;1)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(2;-5;0)$ trên đường băng. Có một đám mây được mô phỏng bởi mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 16$ tại $M\left(\frac{10}{9}; -\frac{25}{9}; \frac{7}{9}\right)$. Tính độ cao của máy bay khi đi xuyên qua đám mây để hạ cánh (Giả sử mặt đất ở vị trí máy bay đang bay được coi là mặt phẳng mặt phẳng (Oxy))

- A.** $\frac{3}{5}$ km. **B.** $\frac{4}{5}$ km. **C.** $\frac{1}{5}$ km. **D.** $\frac{2}{5}$ km.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;-1)$; $\vec{IM} = \left(-\frac{8}{9}; -\frac{16}{9}; \frac{16}{9}\right) = -\frac{8}{9}(1;2;-2)$.

Vì (P) tiếp xúc với (S) tại M nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;2;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là $x - \frac{10}{9} + 2\left(y + \frac{25}{9}\right) - 2\left(z - \frac{7}{9}\right) = 0$ hay $(P): x + 2y - 2z + 6 = 0$.

Giả sử điểm $C(a;b;c)$ là vị trí mà máy bay xuyên qua đám mây để hạ cánh, suy ra $C \in (P)$ và ba điểm A, B, C thẳng hàng, C nằm giữa A và B .

Do đó $\vec{AC} = k\vec{AB}$ với $k > 0$.

Ta có: $\vec{AC} = (a-3; b+2; c-1)$, $\vec{AB} = (-1; -3; -1)$.

$$\vec{AC} = k\vec{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} a-3 = -k \\ b+2 = -3k \\ c-1 = -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3-k \\ b = -2-3k \\ c = 1-k \end{cases} \Rightarrow C(3-k; -2-3k; 1-k).$$

$$C \in (P) \Rightarrow 3-k + 2(-2-3k) - 2(1-k) + 6 = 0 \Rightarrow k = \frac{3}{5}.$$



Suy ra $C\left(\frac{12}{5}; -\frac{19}{5}; \frac{2}{5}\right)$.

Vậy tại vị trí C , độ cao của máy bay là $\frac{2}{5}$ km.

