

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (C) tâm $I(2;1;-3)$ và đi qua $M(1;-1;-5)$ có phương trình $(C): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + ax + by + cz + d = 0$. Giá trị biểu thức $T = a + b - c + d$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: -14

Mặt cầu (C) có tâm $I(2;1;-3)$, bán kính $IM = \sqrt{(1-2)^2 + (-1-1)^2 + (-5+3)^2} = 3$.

Phương trình mặt cầu $(C): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8x - 4y + 12z + 10 = 0.$$

Suy ra $a = -8$, $b = -4$, $c = 12$, $d = 10$.

Vậy $T = -8 - 4 - 12 + 10 = -14$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và $B(0;2;1)$. Biết mặt cầu đường kính AB có dạng $(C): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = d$. Tính giá trị biểu thức $T = 2a - b + 4c + 2d$.

Lời giải

Trả lời: 9

Mặt cầu (C) có tâm $I\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right)$ là trung điểm AB .

$$\text{Bán kính } IA = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + (0-1)^2 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Phương trình mặt cầu } (C): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Suy ra } a = \frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{3}{2}, d = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } T = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 + 4 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{3}{2} = 9.$$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z - 8 = 0$ có phương trình $(C): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. Tính giá trị của biểu thức $a + b + c + 2d$.

Lời giải



Trả lời: -4

Bán kính mặt cầu là:

$$r = d(I; (P)) = \frac{|2 - 4 + 1 - 8|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 3.$$

$$\text{Phương trình mặt cầu } (C): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9.$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0.$$

Suy ra $a = 1; b = 2; c = -1; d = -3$.

$$\text{Hay } a + b + c + 2d = 1 + 2 + (-1) + 2 \cdot (-3) = -4.$$

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $I(0; 2; 3)$. Tính bán kính mặt cầu tâm I tiếp xúc với trục Oy .

Lời giải

Trả lời: 3

Gọi H hình chiếu vuông góc của I lên trục $Oy \Rightarrow H(0; 2; 0)$.

Mặt cầu tâm I tiếp xúc với trục Oy nên mặt cầu có bán kính $R = IH = 3$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (S) là mặt cầu đi qua hai điểm $A(3; -1; 2), B(1; 1; -2)$ và có tâm thuộc trục Oz . Bán kính của mặt cầu (S) là R . Giá trị R^2 bằng?

Lời giải

Trả lời: 11

Gọi tâm của mặt cầu là $I(a; b; c)$. Vì $I \in Oz$ nên $I(0; 0; c)$.

$$\text{Mặt cầu đi qua } A, B \text{ nên có } IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow 9 + 1 + (c - 2)^2 = 1 + 1 + (c + 2)^2 \Leftrightarrow c = 1.$$

$$\text{Bán kính mặt cầu } R = IA = \sqrt{11}.$$

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 2), D(2; 2; 2)$. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có tâm là $I(a; b; c)$. Tính giá trị biểu thức $T = a - b - 2c$.

Lời giải

Trả lời: -2

Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có dạng $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$;

với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Vì mặt cầu (S) đi qua các điểm A, B, C, D nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 4 - 4a + d = 0 \\ 4 - 4b + d = 0 \\ 4 - 4c + d = 0 \\ 12 - 4a - 4b - 4c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = b = c = 1 \end{cases}. \text{ Suy ra } I(1; 1; 1) \text{ nên } T = a - b - 2c = -2.$$

Câu 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 0; -3), B(-3; -2; -5)$. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $AM^2 + BM^2 = 30$ là một mặt cầu (S) . Tìm bán kính R của mặt cầu (S) .

Lời giải



Trả lời: 3

Gọi tọa độ điểm $M(x; y; z)$. Khi đó $AM^2 + BM^2 = 30$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 + (x+3)^2 + (y+2)^2 + (z+5)^2 = 30$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 4y + 16z + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 8z + 9 = 0$$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+4)^2 = 9$ là phương trình của mặt cầu (S) , có tâm $I(-1; -1; -4)$ và bán kính $R = 3$.

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện đều $ABCD$ có $A(0; 1; 2)$ và hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (BCD) là $H(4; -3; -2)$. Tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $I(a; b; c)$. Tính giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$.

Lời giải

Trả lời: 14

Gọi $I(a; b; c) \Rightarrow \overrightarrow{IA} = (-a; 1-b; 2-c); \overrightarrow{IH} = (4-a; -3-b; -2-c)$

Do $ABCD$ là tứ diện đều nên tâm I của mặt cầu ngoại tiếp trùng với trọng tâm tứ diện

Nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IH} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{IH}$ (Vì H là trọng tâm tam giác BCD)

$$\text{Từ đó ta có hệ phương trình } \begin{cases} -a = -3(4-a) \\ 1-b = -3(-3-b) \\ 2-c = -3(-2-c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow I(3; -2; -1).$$

Vậy $T = a^2 + b^2 + c^2 = 14$

Câu 9: Cho hai điểm A, B cố định trong không gian có độ dài AB là 4. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA = 3MB$ là một mặt cầu. Bán kính mặt cầu đó bằng

Lời giải

Trả lời: 1,5

Ta có: $MA = 3MB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 = 9\overrightarrow{MB}^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 = 9(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$

$$\Leftrightarrow IA^2 - 9IB^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} - 9\overrightarrow{IB}) = 8MI^2 \quad (1)$$

Gọi I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} - 9\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$ nên $IB = \frac{1}{2}; IA = \frac{9}{2}$.

Từ (1) suy ra $\Leftrightarrow 8MI^2 = 18 \Leftrightarrow MI = \frac{3}{2}$ suy ra M thuộc mặt cầu (S) có tâm là I và bán kính $R = \frac{3}{2}$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá nguyên của m để $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-1)z + 3m^2 - 5 = 0$ là phương trình một mặt cầu?

Lời giải

Trả lời: 7

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi



$$(m+2)^2 + (m-1)^2 - 3m^2 + 5 > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 10 < 0$$

$$\Leftrightarrow -1 - \sqrt{11} < m < 1 + \sqrt{11}$$

Theo bài ra $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\} \Rightarrow$ có 7 giá trị của m nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 11: Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ với m là tham số. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu.

Lời giải

Trả lời: 1

Giả sử $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ là phương trình mặt cầu.

Khi đó tâm mặt cầu là $I(2; -m; 0)$, và bán kính $R = \sqrt{4 + m^2 - (3m^2 - 2m)} = \sqrt{-2m^2 + 2m + 4}$. với điều kiện $-2m^2 + 2m + 4 > 0 \Leftrightarrow m \in (-1; 2)$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của m bằng 1.

Câu 12: Trong không gian Oxyz có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 9m^2 - 28 = 0$ là phương trình mặt cầu?

Lời giải

Trả lời: 7

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 9m^2 - 28 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+2m)^2 + (y+m)^2 + (z-m)^2 = 28 - 3m^2 \quad (1).$$

$$(1) \text{ là phương trình mặt cầu } \Leftrightarrow 28 - 3m^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{28}{3}} < m < \sqrt{\frac{28}{3}}.$$

Do m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Vậy có 7 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 13: Trong không gian Oxyz, xét mặt cầu (S) có phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2az + 10a = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để (S) có chu vi đường tròn lớn bằng 8π

Lời giải

Trả lời: 2

Đường tròn lớn có chu vi bằng 8π nên bán kính của (S) là $\frac{8\pi}{2\pi} = 4$.

Từ phương trình của (S) suy ra bán kính của (S) là $\sqrt{2^2 + 1^2 + a^2 - 10a}$.

$$\text{Do đó: } \sqrt{2^2 + 1^2 + a^2 - 10a} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 11 \end{cases}.$$

Câu 14: Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2mx - 4y + 6mz + m^2 + 4 = 0$ (m là tham số và $m < 0$). Trong tất cả các mặt cầu có thể có được với mỗi giá trị của m , viết phương trình mặt cầu có diện tích là 36π . Tính $P = m^2 + 2024$

Lời giải



Trả lời: 2025

Ta có $A = -m; B = 2; C = -3m; D = m^2 + 4$

Ta có $r^2 = A^2 + B^2 + C^2 - D = m^2 + 4 + 9m^2 - m^2 - 4 = 9m^2$

Lại có $S = 4\pi r^2 = 4\pi 9m^2 = 36\pi \Leftrightarrow m^2 = \pm 1 \Rightarrow m = -1 \Rightarrow P = m^2 + 2024 = (-1)^2 + 2024 = 2025$.

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$ và I là hình chiếu vuông góc của $M(3; 1; 2)$ trên trục Ox . Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và đi qua điểm M .

Độ dài bán kính mặt cầu bằng

Lời giải

Trả lời: 3

Hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là $I(1; 0; 0) \Rightarrow IM = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm là điểm $A(1; 2; -3)$ và đi qua điểm $B(3; -2; 1)$. Gọi $M(1; b; -3)$ là điểm thuộc mặt cầu biết $b \in \mathbb{N}^*$.

Tung độ điểm M có giá trị bằng

Lời giải

Trả lời: 8

Mặt cầu (S) đi qua $B(3; -2; 1)$ nên bán kính $R = AB$

$$\Leftrightarrow R = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-2)^2 + (1+3)^2} \Leftrightarrow R = 6$$

Vậy phương trình của mặt cầu (S) là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 36$.

Thay tọa độ điểm $M(1; b; -3)$ vào phương trình mặt cầu (S) , ta có:

$$(1-1)^2 + (b-2)^2 + (-3+3)^2 = 36 \Leftrightarrow (b-2)^2 = 36 \Leftrightarrow \begin{cases} b-2=6 \\ b-2=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=8 \\ b=-4 \end{cases}$$

Vì $b > 0$ nên nhận $b = 8$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; 2; 3)$, $N(3; -2; -5)$. Mặt cầu (S) có đường kính MN có phương trình dạng $(x-2)^2 + (y-a)^2 + (z-b)^2 = c$. Khi đó $a+b+c$ bằng

Lời giải

Trả lời: 20

+) Ta có tọa độ trung điểm I của đoạn MN là $I(2; 0; -1)$ và $\overline{MN} = (2; -4; -8)$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{4+16+64} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

+) Suy ra phương trình mặt cầu đường kính MN là: $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 21$

+) Vậy $a+b+c = 0 + (-1) + 21 = 20$

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 4)$ và A' là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng Oxy . Mặt cầu (S) có đường kính AA' có phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by - 4z + d = 0$. Khi đó $a+b+d$ bằng

Lời giải

Trả lời: -1



+) Ta có tọa độ của A' là $A'(1; 2; 0) \Rightarrow$ tọa độ trung điểm I của đoạn AA' là $I(1; 2; 2)$

$$\text{có } \overline{AA'} = (0; 0; 4) \Rightarrow AA' = \sqrt{0^2 + 0^2 + 4^2} = 4$$

+) Suy ra phương trình mặt cầu đường kính AA' là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 4$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z + 5 = 0$$

$$\text{+) Vậy } a+b+d = (-2) + (-4) + 5 = -1$$

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2; -4; 3)$ và tiếp xúc với trục Ox . Bán kính của mặt cầu trên bằng

Lời giải

Trả lời: 5

Gọi R là bán kính của mặt cầu (S) và H là hình chiếu của I trên trục Ox suy ra $H(2; 0; 0)$ và

$$R = IH = \sqrt{(2-2)^2 + (0+4)^2 + (0-3)^2} = 5.$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -4; 3)$ và bán kính là $R = 5$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có bán kính bằng 2, tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) và có tâm nằm trên tia Ox . Hoành độ của tâm mặt cầu (S) là

Lời giải

Trả lời: 2

Gọi I là tâm mặt cầu (S) . Vì tâm I nằm trên tia Ox nên $I(a; 0; 0)$, $(a > 0)$.

Vì mặt cầu (S) có bán kính bằng 2, tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) nên ta có:

$$d(I, (Oyz)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|a|}{1} = 2 \Leftrightarrow |a| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}.$$

Do $a > 0$ nên ta nhận $a = 2$, loại $a = -2$. Suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(2, 0, 0)$.

Câu 21: Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 3)$ và có đúng một điểm chung với mặt phẳng (Oxy) . Gọi một giao điểm của mặt cầu (S) với trục Oz là $A(a; b; c)$ ($c > 1$). Tổng $a+b+c$ bằng

Lời giải

Trả lời: 5

Ta có $(Oxy): z = 0$.

Mặt cầu (S) có đúng một điểm chung với mặt phẳng $(Oxy) \Leftrightarrow R = d(I, (Oxy)) = 3$.

$$\text{Suy ra } (S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9.$$

$$\text{Cho } x = y = 0 \Rightarrow 1^2 + 2^2 + (z-3)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 5 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Vì $c > 1$ nên $A(0; 0; 5) \Rightarrow a+b+c = 5$.



Câu 22: Gọi I là giao điểm của đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=t \end{cases}$ và mặt phẳng $(Q): x+y+z-3=0$. Bán kính của

mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x-y+2z=0$ bằng

Lời giải

Trả lời: 6

Ta có $I \in d \Rightarrow I(1+2t; -2-t; t)$.

Vì $I = d \cap (Q)$ nên $I \in (Q) \Rightarrow 1+2t-2-t+t-3=0 \Leftrightarrow t=2$.

Suy ra $I(5; -4; 2)$.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x-y+2z=0 \Leftrightarrow R = d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 5 - (-4) + 2 \cdot 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 6$.

Câu 23: Phương trình mặt cầu tâm $I(1; -2; 3)$, tiếp xúc với trục Oy có bình phương của bán kính là

Lời giải

Trả lời: 10

Vì mặt cầu tiếp xúc với trục tung nên bán kính $R = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.

Câu 24: Cho điểm $I(-3; 1; 4)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$. Phương trình mặt cầu tâm I , tiếp xúc với d có bán kính là (lấy giá trị gần đúng đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 5,48

Vì mặt cầu tiếp xúc với d nên bán kính $R = d(I, d) = IH$ với H là hình chiếu của I lên d .

Vì $H \in d$ nên gọi $H(2t-1; t+2; -t-3)$ mà $IH \perp d$ nên $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0$.

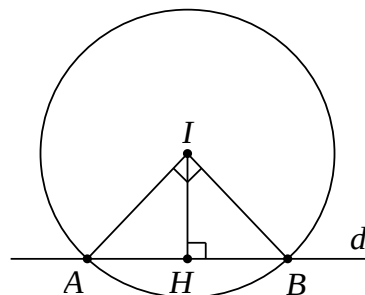
Ta có $\overrightarrow{IH}(2t+2; t+1; -t-7); \overrightarrow{u_d}(2; 1; -1)$

Suy ra $4t+4+t+1+t+7=0 \Leftrightarrow t=-2 \Rightarrow \overrightarrow{IH}(-2; -1; -5) \Rightarrow R = \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30} \approx 5,48$.

Câu 25: Cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{2}$ và điểm $I(0; 0; 3)$. Mặt cầu (S) có tâm I và cắt d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I . Diện tích tam giác IAB bằng

Lời giải

Trả lời: 1



Đường thẳng d đi qua $M(-1; 0; 2)$ và có VTCP $\vec{u}(1; 2; 2)$.



Do đó: $\overline{IM}(-1;0;-1) \Rightarrow [\vec{u}, \overline{IM}] = (-2;-1;2)$, suy ra $d(I, d) = \frac{|\vec{u}, \overline{IM}|}{|\vec{u}|} = 1$.

Vì tam giác IAB là tam giác vuông cân tại I nên $IBA = 45^\circ$.

Khi đó tam giác IBH là tam giác vuông cân tại H .

$$\Rightarrow IB = IH\sqrt{2} \Leftrightarrow R = \sqrt{2}.d(I, d) \Leftrightarrow R = \sqrt{2}.$$

$$S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2}IA.IB = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 = 1$$

Câu 26: Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 9 = 0$, $(Q): 2y + z + 5 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ cắt d tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 16$. Bán kính của mặt cầu (S) bằng

Lời giải

Trả lời: 9

(P) có vector pháp tuyến $\vec{n}_1(1;-2;1)$, (Q) có vector pháp tuyến $\vec{n}_2(0;2;1)$ nên d có vector chỉ phương $\vec{u} = [\vec{n}_1; \vec{n}_2] = (-4;-1;2)$.

d đi qua điểm $N(14;0;-5) \Rightarrow \overline{IN} = (13;-1;-6) \Rightarrow [\overline{IN}, \vec{u}] = (-8;-2;-17)$

Khoảng cách từ I đến d là

Gọi h là hình chiếu của I trên d là trung điểm của AB và h .

Bán kính mặt cầu là R .

Câu 27: Tính bán kính mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$, biết mặt phẳng $(P): 4x + 3y + 12z + 1 = 0$ cắt mặt cầu theo một giao tuyến là đường tròn có diện tích bằng 16π . (làm tròn đến hàng phần trăm)

Giá trị bằng

Lời giải

Trả lời: 4,47

$$d(I; (P)) = \frac{|4 - 3 + 12.2 + 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}} = 2.$$

Ta có $S = \pi r^2 \Leftrightarrow 16\pi = \pi r^2 \Leftrightarrow r = 4$.

$$R_{mc} = \sqrt{d^2(I; (P)) + r^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} \approx 4,47.$$

Câu 28: Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ và bán kính R , biết mặt phẳng $(P): 9x + 12y + 8z + 5 = 0$ cắt mặt cầu theo một giao tuyến là đường tròn có bán kính $r = m + 1$. Tìm tổng các giá trị nguyên của tham số m để bán kính mặt cầu nhỏ hơn 5.

Giá trị bằng

Lời giải

Trả lời: 3

Ta có: $r = m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$

$$d(I; (P)) = \frac{|9.2 + 12.3 + 8.(-1) + 5|}{\sqrt{9^2 + 12^2 + 8^2}} = 3.$$

Ta có



$$0 < R_{mc} < 5 \Leftrightarrow \sqrt{d^2(I; (P)) + r^2} < 5 \Leftrightarrow 3^2 + (m+1)^2 < 25 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 15 < 0 \Leftrightarrow -5 < m < 3.$$

Kết hợp điều kiện ta được: $-1 < m < 3$. Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Tổng các giá trị nguyên của m bằng 3.

Câu 29: Gọi $I(m; n; p)$ là tâm của mặt cầu (S) đi qua 4 điểm $M(2; 2; 2)$, $N(4; 0; 2)$, $P(4; 2; 0)$ và $Q(4; 2; 2)$. Khi đó $T = 2m + n - 3p$ bằng

Lời giải

Trả lời: 4

Gọi phương trình mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, $(a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$.

$$\text{Do } M(2; 2; 2) \in (S) \Leftrightarrow -4a - 4b - 4c + d = -12 \quad (1)$$

$$N(4; 0; 2) \in (S) \Leftrightarrow -8a - 4c + d = -20 \quad (2)$$

$$P(4; 2; 0) \in (S) \Leftrightarrow -8a - 4b + d = -20 \quad (3)$$

$$Q(4; 2; 2) \in (S) \Leftrightarrow -8a - 4b - 4c + d = -24 \quad (4)$$

Giải hệ (1), (2), (3), (4) ta có $a = 3$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 8$, suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(3; 1; 1)$

$$\text{Khi đó } T = 2m + n - 3p = 2.3 + 1 - 3.1 = 4$$

Câu 30: Cho 3 điểm $A(2; 0; 1)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 1)$ và mặt phẳng $P: x + y + z - 2 = 0$. Phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng P có bán kính là

Lời giải

Trả lời: 1

Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C .

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } IA = IB = IC &\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a-2^2 + b^2 + c-1^2 = a-1^2 + b^2 + c^2 \\ a-2^2 + b^2 + c-1^2 = a-1^2 + b-1^2 + c-1^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=2 \\ a-b=1 \end{cases} \end{aligned}$$

Do tâm của mặt cầu thuộc mặt phẳng P nên $a + b + c - 2 = 0$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a+c=2 \\ a-b=1 \\ a+b+c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}$$

Bán kính của mặt cầu là: $R = IA = 1$.

Câu 31: Cho 3 điểm $A(0; 8; 0)$, $B(4; 6; 2)$, $C(0; 12; 4)$. Phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C và có tâm $I(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng Oyz . Khi đó, $a + b + c = \dots$

Lời giải

Trả lời: 12

Do tâm I thuộc mặt phẳng Oyz nên $I(0; b; c) \Rightarrow a = 0$.



Mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C nên $IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b-8^2 + c^2 = 4^2 + b-6^2 + c-2^2 \\ b-8^2 + c^2 = b-12^2 + c-4^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=7 \\ c=5 \end{cases}$$

Vậy tâm $I(0; 7; 5)$. Nên $a+b+c=12$.

Câu 32: Cho các điểm $A(1; 3; 1); B(3; 2; 2)$. Bán kính mặt cầu đi qua hai điểm A, B và tâm thuộc trục Oz bằng (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 3,74

Do tâm I thuộc trục Oz nên $I(0; 0; z)$

$$IA^2 = 1^2 + 3^2 + (z-1)^2$$

$$IB^2 = 3^2 + 2^2 + (z-2)^2$$

Do mặt cầu đi qua 2 điểm A, B nên $IA = IB$

$$\Rightarrow IA^2 = IB^2$$

$$\Rightarrow 1^2 + 3^2 + (z-1)^2 = 3^2 + 2^2 + (z-2)^2$$

$$\Leftrightarrow 2z = 6 \Leftrightarrow z = 3$$

$$\Rightarrow I(0; 0; 3); R^2 = IA^2 = 14$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{14} \approx 3,74$$

Câu 33: Cho các điểm $A(0; 1; 3)$ và $B(2; 2; 1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$. Bán kính mặt cầu đi qua hai điểm A, B và tâm thuộc đường thẳng d bằng (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 2,29

Do tâm I thuộc trục Oz nên $I(0; 0; z)$

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$$

$$\text{Phương trình tham số của } d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

Gọi I là tâm của mặt cầu, do I thuộc d nên $I(1+2t; 2-t; 3-2t)$

Ta có:

$$IA^2 = (1+2t)^2 + (2-t-1)^2 + (3-2t-3)^2 = 9t^2 + 2t + 2$$

$$IB^2 = (1+2t-2)^2 + (2-t-2)^2 + (3-2t-1)^2 = 9t^2 - 4t + 5$$

Do mặt cầu đi qua 2 điểm A, B nên $IA = IB$

$$\Rightarrow IA^2 = IB^2$$

$$\Rightarrow 9t^2 + 2t + 2 = 9t^2 - 4t + 5$$

$$\Leftrightarrow t = 1/2$$



$$\Rightarrow I(2; 3/2; 2); R^2 = IA^2 = 21/4$$

$$\Rightarrow R = \frac{\sqrt{21}}{2} \approx 2,29$$

Câu 34: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ nằm trên đường thẳng

$$(d): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1} \text{ và tiếp xúc với hai mặt phẳng } (P): 2x - z - 4 = 0, (Q): x - 2y - 2 = 0.$$

Tổng $P = a + b + c$ bằng

Lời giải

Trả lời: 6

Gọi tâm mặt cầu là $I(a; a+1; a+2) \in (d)$. Do mặt cầu tiếp xúc với (P) và (Q) nên $d(I; (P)) = d(I; (Q))$.

$$\text{Suy ra } \frac{|2a - a - 2 - 4|}{\sqrt{5}} = \frac{|a - 2(a+1) - 2|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |a - 6| = |-a - 4| \Leftrightarrow a = 1.$$

Tâm mặt cầu là $I(1; 2; 3) \Rightarrow P = 6$

Câu 35: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm thuộc Ox và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 1 = 0, (Q): x - 2y - 2z + 3 = 0$ có bán kính R bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,67

Gọi $I(a; 0; 0)$ là tâm của mặt cầu (S) . Ta có $d(I; (P)) = d(I; (Q)) \Leftrightarrow \frac{|a - 1|}{3} = \frac{|a + 3|}{3} \Leftrightarrow a = -1$

Khi đó, bán kính của mặt cầu (S) là $R = d(I; (P)) = \frac{|a - 1|}{3} = \frac{2}{3}$.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-2}$ và $\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$

. Trong tất cả mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 . Gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất. Diện tích của mặt cầu đó có kết quả là (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 18,8

Ta dễ dàng kiểm chứng được Δ_1 và Δ_2 chéo nhau

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và có bán kính nhỏ nhất. Suy ra mặt cầu (S) là mặt cầu đường kính AB (với AB là đoạn vuông góc chung của Δ_1, Δ_2)

Ta có: Δ_1 đi qua $M(4; 1; -5)$ và có VTCP $\vec{u}_{\Delta_1} = (3; -1; -2)$

Δ_2 đi qua $N(2; -3; 0)$ và có VTCP $\vec{u}_{\Delta_2} = (1; 3; 1)$

$$\text{Suy ra } d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|\left[\vec{u}_{\Delta_1}, \vec{u}_{\Delta_2} \right] \cdot \overrightarrow{MN}|}{\left| \left[\vec{u}_{\Delta_1}, \vec{u}_{\Delta_2} \right] \right|} = 2\sqrt{6}$$

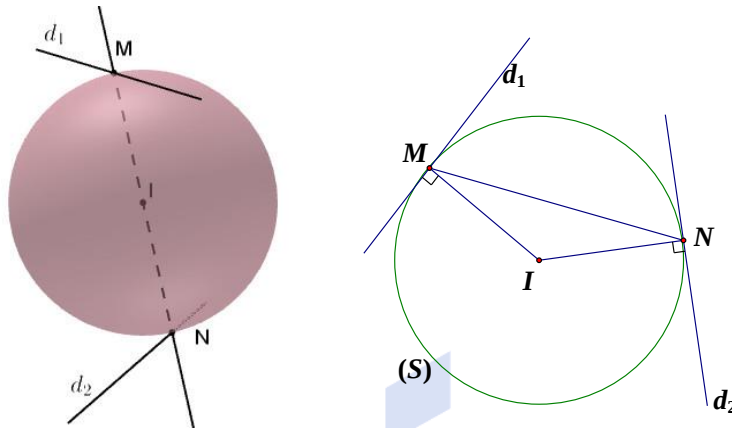


Vậy bán kính $R = \frac{AB}{2} = \frac{d(\Delta_1, \Delta_2)}{2} = \sqrt{6}$. Diện tích mặt cầu (S) là $S = \pi R^2 = 6\pi \approx 18.8$

Câu 37: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{-4} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{3}$ và $d_2: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z+10}{-3}$. Gọi (S) là mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ có bán kính nhỏ nhất trong số các mặt cầu tiếp xúc với cả d_1 và d_2 . Giá trị $T = a^2 - b + c$ có kết quả là

Lời giải

Trả lời: -4



Gọi (S) là mặt cầu tâm I , bán kính R tiếp xúc với d_1 và d_2 lần lượt tại M và N .

Suy ra $IM \perp d_1$ và $IN \perp d_2$. Khi đó ta có $IM + IN \geq MN \Leftrightarrow 2R \geq MN \Leftrightarrow R \geq \frac{MN}{2}$.

Để bán kính R đạt giá trị nhỏ nhất thì MN đạt giá trị nhỏ nhất hay M, I, N thẳng hàng.

Để nhận thấy d_1 và d_2 chéo nhau. Suy ra MN là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 . Khi đó. Mặt cầu (S) là mặt cầu đường kính MN .

Thật vậy, ta có $d_1: \begin{cases} x = -4t \\ y = 3+t \\ z = 4+3t \end{cases}$ có VTCP $\vec{u}_{d_1} = (-4; 1; 3)$. $M \in d_1 \Rightarrow M(-4t; 3+t; 4+3t)$.

$d_2: \begin{cases} x = 2+4t' \\ y = -2t' \\ z = -10-3t' \end{cases}$ có VTCP $\vec{u}_{d_2} = (4; -2; -3)$. $N \in d_2 \Rightarrow N(2+4t'; -2t'; -10-3t')$

Suy ra $\vec{MN} = (2+4t'+4t; -3-2t'-t; -14-3t'-3t)$

Có $\begin{cases} \vec{MN} \perp \vec{u}_{d_1} \\ \vec{MN} \perp \vec{u}_{d_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{MN} \cdot \vec{u}_{d_1} = 0 \\ \vec{MN} \cdot \vec{u}_{d_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27t' + 26t = -53 \\ 29t' + 27t = -56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -1 \Rightarrow N(-2; 2; -7) \\ t = -1 \Rightarrow M(4; 2; 1) \end{cases}$

Vì mặt cầu (S) là mặt cầu đường kính MN suy ra tâm $I(1; 2; -3)$ hay $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases}$

Vậy $T = a^2 - b + c = 1^2 - 2 + (-3) = -4$.



Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = mt \\ z = 2 \end{cases} (m \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R})$ và mặt cầu

$(S): x^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2 = 25$. Biết đường thẳng d không cắt mặt cầu (S) .

Số giá trị nguyên dương m tương ứng bằng

Lời giải

Trả lời: 0

Gọi $M(1 - t; mt; 2) \in d$ là giao điểm (nếu có) của đường thẳng d và mặt cầu (S) .

Thay điểm $M(1 - t; mt; 2)$ vào phương trình mặt cầu, ta có: $(1 - t)^2 + (mt - 2)^2 + (2 + 2)^2 = 25$

$$\Leftrightarrow 1 - 2t + t^2 + m^2 t^2 - 4mt + 4 - 9 = 0 \Leftrightarrow (m^2 + 1)t^2 - 2(1 + 2m)t - 4 = 0 \quad (1)$$

Để đường thẳng d không cắt mặt cầu (S) khi

$$\Delta'_{(1)} < 0 \Leftrightarrow (1 + 2m)^2 + 4(m^2 + 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 4m + 4m^2 + 4m^2 + 4 < 0$$

$$\Leftrightarrow 8m^2 + 4m + 5 < 0 \quad (VN)$$

$$\Leftrightarrow m \in \emptyset$$

Câu 39: Cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$ và đường thẳng $d: \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 4}{1} = \frac{z - 3}{3}$. Khoảng cách ngắn nhất từ tâm mặt cầu (S) đến đường thẳng d bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 3,38

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3)$, bán kính $R = 4$

Thay tâm $I(1; -2; 3)$ vào phương trình đường thẳng d , ta được: $\frac{0}{2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{6}{3}$

Nên tâm $I(1; -2; 3)$ không thuộc đường thẳng d .

$$\text{Chọn } M(1; -4; -3) \in d \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (0; -2; -6) \Rightarrow [\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{u_d}] = (0; -12; 4).$$

$$\text{Vậy } d_{(I,d)} = \frac{[\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{u_d}]}{|\overrightarrow{u_d}|} = \frac{\sqrt{0^2 + (-12)^2 + 4^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} \approx 3,38$$

Câu 40: Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + mt \end{cases} (m \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R})$.

Biết d cắt mặt cầu tại hai điểm A, B phân biệt và độ dài $AB = 6$.

Số giá trị m nguyên thỏa đề bài là

Lời giải

Trả lời: 0

Mặt cầu có dạng: $(S): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$ và tâm $I(1; -2; 3)$, bán kính $R = 3$

$$\text{Chọn } M(2; -1; 2) \in d \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (1; 1; -1) \Rightarrow [\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{u_d}] = (m + 1; -m - 1; 0)$$



$$\text{Ta có } d_{(I,d)} = \frac{\left| \left[\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{u_d} \right] \right|}{\left| \overrightarrow{u_d} \right|} = \frac{\sqrt{(m+1)^2 + (-m-1)^2 + 0^2}}{\sqrt{2+m^2}} = \frac{\sqrt{2m^2 + 4m + 2}}{\sqrt{2+m^2}}$$

$$\text{Vì } d \text{ cắt mặt cầu tại hai điểm } A, B \text{ phân biệt nên } R^2 = d_{(I,d)}^2 + \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow 9 = \frac{2m^2 + 4m + 2}{2+m^2} + \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m^2 + 4m + 2}{2+m^2} = \frac{27}{4} \Leftrightarrow 19m^2 - 16m + 46 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy không có giá trị tham số m thỏa đề bài.

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đi qua 4 điểm có tọa độ lần lượt là $A(2;0;0)$, $B(-1;0;1)$, $C(0;0;3)$, $D(1;1;-1)$. Tâm của mặt cầu (S) là $I(a;b;c)$. Tính giá trị của biểu thức $T = 4a + b - c$.

Lời giải

Trả lời: 3

Gọi phương trình tổng quát của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Thay tọa độ 4 điểm vào phương trình mặt cầu, ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4 - 4a + d = 0 \\ 1 + 1 + 2a - 2c + d = 0 \\ 9 - 6c + d = 0 \\ 1 + 1 + 1 - 2a - 2b + 2c + 2d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + d = -4 \\ 2a - 2c + d = -2 \\ -6c + d = -9 \\ -2a - 2b + 2c + 2d = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{11}{14} \\ b = \frac{17}{14} \\ c = \frac{19}{14} \\ d = -\frac{6}{7} \end{cases} \Rightarrow T = 4a + b - c = 4 \cdot \frac{11}{14} + \frac{17}{14} - \frac{19}{14} = 3.$$

Câu 42: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;3;2)$ và có một tiếp tuyến là đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$ có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. Tính $T = a + b + c - d$.

Lời giải

Trả lời: 0

Ta có đường thẳng $\Delta: \begin{cases} M_0(1;1;0) \in \Delta \\ \text{VTCP } \vec{u} = (1;1;-1) \end{cases}$. Suy ra $\overrightarrow{MM_0} = (0;-2;-2)$.

$$\text{Vì } \Delta \text{ là một tiếp tuyến của mặt cầu } (S) \text{ nên } R = d(M, \Delta) = \frac{\left| \left[\vec{u}, \overrightarrow{MM_0} \right] \right|}{\left| \vec{u} \right|} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}.$$

Khi đó phương trình mặt cầu (S) có dạng: $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 8$

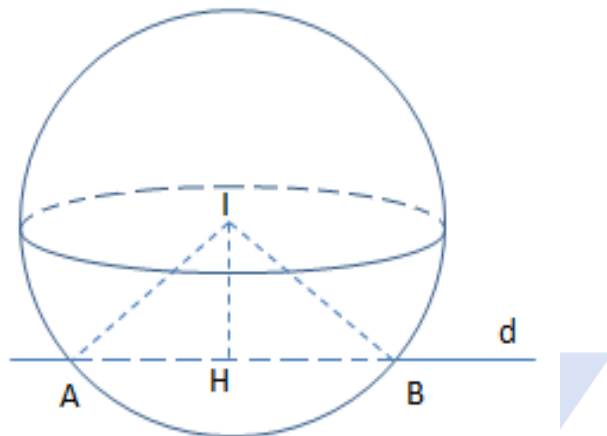


$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 4z + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 2 \\ d = 6 \end{cases} \Rightarrow T = a + b + c - d = 0.$$

Câu 43: Cho điểm $I(0;0;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$. Tìm bán kính mặt cầu (C) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho $AB = 6$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 3,21



• Gọi $H(-1+t; 2t; 2+t) \in d$ là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d
 $\Rightarrow \overrightarrow{IH} = (-1+t; 2t; -1+t)$

• Ta có vector chỉ phương của $d: \vec{u} = (1; 2; 1)$ và $IH \perp d$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -1+t+4t-1+t=0 \Leftrightarrow -2+6t=0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow H\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$$

$$\Rightarrow IH = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Vậy bán kính của cầu: } R = IA = IB = \sqrt{IH^2 + HA^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{93}}{3} \approx 3,21$$

Câu 44: Trong không gian với tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $C: x-1^2 + y-2^2 + z+3^2 = 11$. Đường thẳng d là tiếp tuyến của mặt cầu C tại điểm $A(2;1;0)$ có vector chỉ phương là $\vec{u}_d = (-1; b; c)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$. Tính giá trị $b+c$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 0,71



Mặt cầu C có tâm $I = (1; 2; -3)$, khi đó $\overrightarrow{IA} = (1; -1; 3)$

Đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta} = (1; 2; 1)$

Do d là tiếp tuyến của mặt cầu tại điểm $A(2; 1; 0)$ nên $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow -b + 3c - 1 = 0$

Lại có d vuông góc với đường thẳng Δ nên $\overrightarrow{u_\Delta} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow 2b + c - 1 = 0$

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} -b + 3c - 1 = 0 \\ 2b + c - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2}{7} \\ c = \frac{3}{7} \end{cases}$$

Vậy $b + c = \frac{5}{7} \approx 0,71$.

Câu 45: Trong không gian Oxy , tổng tất cả bao nhiêu số tự nhiên của tham số m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m-2)y - 2(m+3)z + 3m^2 + 7 = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

Lời giải

Trả lời: 6

Ta có:
$$\begin{cases} a = 0 \\ b = m - 2 \\ c = -(m + 3) \\ d = 3m^2 + 7 \end{cases}$$

Phương trình trên là phương trình mặt cầu khi:

$$a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 + (m+3)^2 - (3m^2 + 7) > 0$$

$$\Leftrightarrow -m^2 + 2m + 6 > 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{7} < m < 1 + \sqrt{7}.$$

Mà $m \in \mathbb{N} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3\}$. Nên $0 + 1 + 2 + 3 = 6$

Câu 46: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; m; 1)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z - 9 = 0$. Tập các giá trị của m để điểm A nằm trong khối cầu có dạng $(a; b)$ với $a; b$ là các số nguyên. Giá trị của a^b bằng.

Lời giải

Trả lời: -1

Mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z - 9 = 0$.

Điểm $A(1; m; 1)$ nằm trong khối cầu $(S) \Leftrightarrow 1^2 + m^2 + 1^2 - 2m + 4 \cdot 1 - 9 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 < 0$

$$\Leftrightarrow m \in (-1; 3).$$

Vậy $a^b = -1$

Câu 47: Trong không gian $Oxyz$, có bao nhiêu giá trị nguyên dương m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu?

Lời giải



Trả lời: 5

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 6 - m$.

Để phương trình trên là phương trình mặt cầu thì $6 - m > 0 \Leftrightarrow m < 6$.

Vậy giá trị nguyên dương m cần tìm là 1; 2; 3; 4; 5.

Vậy có 5 giá trị thỏa đề.

Câu 48: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; 2)$ và đi qua $A(5; -1; 4)$ có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c + R^2$.

Lời giải

Trả lời: 24

Tâm $I(1; -3; 2)$

Bán kính $R = IA = \sqrt{16 + 4 + 4} = \sqrt{24}$

Vậy phương trình mặt cầu (S) : $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 24$.

Ta có: $a + b + c + R^2 = 1 + (-3) + 2 + 24 = 24$.

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -4)$, $B(1; -3; 1)$, $C(2; 2; 3)$. Tính đường kính l của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Lời giải

Trả lời: 10,2

Gọi tâm mặt cầu là: $I(x; y; 0)$.

$$\begin{cases} AI = BI \\ AI = CI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 4^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2 + 1^2} \\ \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 4^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + 3^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)^2 + 4^2 = (y+3)^2 + 1^2 \\ (x-1)^2 + 4^2 = (x-2)^2 + 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 4y + 4 + 4^2 = y^2 + 6y + 9 + 1^2 \\ x^2 - 2x + 1 + 16 = x^2 - 4x + 4 + 9 \end{cases}$$

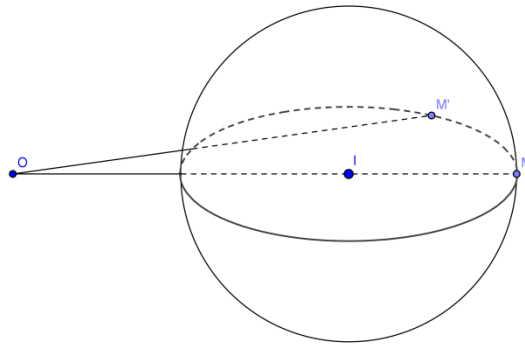
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10y = 10 \\ 2x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}. \text{ Suy ra } I(-2; 1; 0)$$

$$\text{Vậy } l = 2R = 2\sqrt{(-2-1)^2 + (1-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{26} \approx 10,2.$$

Câu 50: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-2; 2; -2)$, $B(3; -3; 3)$ và điểm M không cố định trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Lời giải

Trả lời: 20,8



Gọi $M(x; y; z)$.

Ta có: $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 9MA^2 = 4MB^2$

$$\Leftrightarrow 9[(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2] = 4[(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 12y + 12z = 0$$

Suy ra M thuộc mặt cầu (S) tâm $I(-6; 6; -6)$ bán kính $R = 6\sqrt{3}$.

Khi đó $OM_{\max} = d(O; I) + R = OI + R = 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \approx 20,8$.

Câu 51: Trong không gian $Oxyz$, khi phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 7m^2 - 1 = 0$ là phương trình mặt cầu. Xác định m để mặt cầu có bán kính lớn nhất.

Lời giải

Trả lời: 2

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 7m^2 - 1 = 0$ là phương trình mặt cầu

$$\Leftrightarrow (m+2)^2 + 4m^2 + m^2 - (7m^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow -m^2 + 4m + 5 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 5.$$

Với $m \in (-1; 5)$ ta có mặt cầu có bán kính là $R = \sqrt{-m^2 + 4m + 5} = \sqrt{-(m-2)^2 + 9}$.

$$\text{Ta có } (m-2)^2 \geq 0 \Rightarrow -(m-2)^2 + 9 \leq 9 \Leftrightarrow \sqrt{-(m-2)^2 + 9} \leq 3.$$

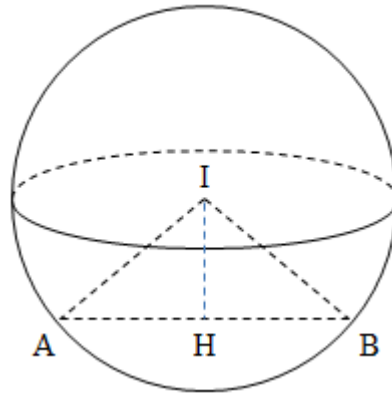
Vậy, bán kính mặt cầu lớn nhất bằng 3 khi $m = 2$.

Câu 52: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1; -2; 3)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$. Khi đó, phương trình mặt cầu (S) có dạng là

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2, \text{ tính giá trị của } P = \frac{abc}{R}?$$

Lời giải

Trả lời: -1,5



Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên trục $Ox \Rightarrow H(1;0;0) \Rightarrow IH = \sqrt{13}$

Mà $HA = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3}$.

Nên bán kính mặt cầu cần tìm là $R = IA = \sqrt{IH^2 + HA^2} = 4$.

Khi đó, phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.

Vậy giá trị của $P = \frac{abc}{R} = \frac{1 \cdot (-2) \cdot 3}{4} = -\frac{3}{2} = -1,5$.

Câu 53: Cho các điểm $A(-2;4;1)$, $B(2;0;3)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=-2+t \end{cases}$. Gọi (S) là mặt cầu đi qua A, B

và có tâm thuộc đường thẳng d . Bán kính của mặt cầu (S) là $R = a\sqrt{b}$, tính giá trị của $P = a + b$?

Lời giải

Trả lời: 6

Tâm $I \in d \Rightarrow I(1+t; 1+2t; -2+t)$.

$\vec{AI} = (3+t; -3+2t; -3+t)$; $\vec{BI} = (-1+t; 1+2t; -5+t)$.

Vì (S) đi qua A, B nên ta có:

$$IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (3+t)^2 + (-3+2t)^2 + (-3+t)^2 = (-1+t)^2 + (1+2t)^2 + (-5+t)^2$$

$$\Leftrightarrow 4t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow \vec{IA} = (3; -3; -3).$$

Suy ra, bán kính mặt cầu (S) : $R = IA = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{3}$.

Vậy giá trị của $P = a + b = 3 + 3 = 6$.

Câu 54: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 3 = 0$.

Gọi mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ thuộc Δ và tiếp xúc với (P) tại $H(1; -1; 0)$. Khi đó giá trị $a^2 + b^2 + c^2$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 14



Ta có: phương trình tham số của Δ là
$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$
. Vì $I \in \Delta \Rightarrow I(1 - 2t; 2t; 2 + t)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1 - 2t; 2t; 2 + t) \in \Delta$ và tiếp xúc với (P) tại $H(1; -1; 0)$ nên ta có:

$$d(I, (P)) = IH \Leftrightarrow \frac{|2(1 - 2t) - 2t + (2 + t) - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \sqrt{(2t)^2 + (-1 - 2t)^2 + (-2 - t)^2}$$

$$\Leftrightarrow (-5t + 1)^2 = 6(9t^2 + 8t + 5) \Leftrightarrow -29t^2 - 58t - 29 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

$$t = -1 \Rightarrow I(3; -2; 1) \Rightarrow a = 3, b = -2, c = 1.$$

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 + c^2 = 14.$$

Câu 55: Trong hệ trục $Oxyz$ cho trước (đơn vị trên trục là mét), cho một trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600m được đặt ở vị trí $I(200; 450; 60)$. Tìm giá trị lớn nhất của m (làm tròn đến hàng đơn vị) để một người dùng điện thoại ở vị trí $A(m + 100; m + 370; 0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm nói trên.

Lời giải

Trả lời: 512

Để một người dùng điện thoại ở vị trí $A(m + 100; m + 370; 0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600m được đặt ở vị trí $I(200; 450; 60)$

$$\text{thì } IA \leq 600 \Leftrightarrow (m - 100)^2 + (m - 80)^2 + (-60)^2 \leq 600^2$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 360m - 340000 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{180 - \sqrt{712400}}{2} \leq m \leq \frac{180 + \sqrt{712400}}{2}.$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } m \text{ là } \frac{180 + \sqrt{712400}}{2} \approx 512.$$

Câu 56: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$, $(P): x + 2y - 2z - 2 = 0$, $(Q): x + 2y - 2z + 4 = 0$. Gọi mặt cầu $S(I, R)$ có tâm I thuộc Δ và tiếp xúc với $(P), (Q)$. Khi đó đường kính của mặt cầu có giá trị bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 2

Ta có: phương trình tham số của Δ là
$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$
. Vì $I \in \Delta \Rightarrow I(2 - 3t; 1 + 2t; 1 + 2t)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2 - 3t; 1 + 2t; 1 + 2t)$ thuộc Δ và tiếp xúc với $(P), (Q)$ nên ta có:

$$d(I, (P)) = d(I, (Q)) \Leftrightarrow \frac{|(2 - 3t) + 2(1 + 2t) - 2(1 + 2t) - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|(2 - 3t) + 2(1 + 2t) - 2(1 + 2t) + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}}$$



$$\Leftrightarrow |-3t| = |-3t + 6| \Rightarrow t = 1.$$

Suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 3; 3)$ và bán kính $R = 1$.

Vậy đường kính của mặt cầu (S) bằng 2.

Câu 57: Cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-3}{3}$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt trong đó $M(x_M; y_M; z_M)$ với $x_M > 0$. Giá trị biểu thức $T = x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$ bằng (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 70,5

Thay tọa độ tâm $I(1; -2; 3)$ vào phương trình đường thẳng d , ta được: $-\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1} \neq 0$.

Nên đường thẳng d không đi qua tâm $I(1; -2; 3)$.

$$\text{Ta có đường thẳng } d: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -4 + t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 + 3t \end{cases} \text{ với } M \in d \Leftrightarrow M(2 + 2t; -4 + t; 3 + 3t)$$

Thay điểm $M(2 + 2t; -4 + t; 3 + 3t)$ vào phương trình mặt cầu (S), ta được:

$$\Leftrightarrow (2 + 2t - 1)^2 + (-4 + t + 2)^2 + (3 + 3t - 3)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow (2t + 1)^2 + (t - 2)^2 + (3t)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow 14t^2 + 5 = 25$$

$$\Leftrightarrow t^2 = \frac{10}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{70}}{7} \Rightarrow M\left(2 + \frac{2\sqrt{70}}{7}; -4 + \frac{\sqrt{70}}{7}; 3 + \frac{3\sqrt{70}}{7}\right) \\ t = -\frac{\sqrt{70}}{7} \Rightarrow N\left(2 - \frac{2\sqrt{70}}{7}; -4 - \frac{\sqrt{70}}{7}; 3 - \frac{3\sqrt{70}}{7}\right) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = \left(2 + \frac{2\sqrt{70}}{7}\right)^2 + \left(-4 + \frac{\sqrt{70}}{7}\right)^2 + \left(3 + \frac{3\sqrt{70}}{7}\right)^2 \approx 70,5$$

Câu 58: Cho 3 điểm $M(2; 3; 3), N(2; -1; -1), P(-2; -1; 3)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + 3y - z + 2 = 0$. Phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm M, N, P và có tâm thuộc mặt phẳng α có bán kính là:

Lời giải

Trả lời: 4

Phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với

$$a^2 + b^2 + c^2 - d > 0.$$

$$\text{Mặt cầu qua } M, N, P \Rightarrow \begin{cases} 4a + 6b + 6c - d = 22 \\ 4a - 2b - 2c - d = 6 \\ 4a + 2b - 6c + d = -14 \end{cases}$$

$$\text{Mặt cầu có tâm } I(a; b; c) \text{ thuộc mặt phẳng } (\alpha) \Rightarrow 2a + 3b - c + 2 = 0.$$



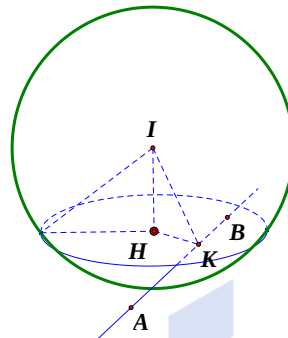
Giải hệ ta được:
$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \Rightarrow I(2; -1; 3) \\ c = 3 \end{cases}$$

Bán kính của mặt cầu là: $R = IM = 4$.

Câu 59: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(3; -2; 6)$, $B(0; 1; 0)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 2 = 0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c = \dots$

Lời giải

Trả lời: 3



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = 5$.

Mặt phẳng (P) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}_p = (a; b; c)$

Theo giả thiết $B(0; 1; 0) \in (P): b - 2 = 0 \Leftrightarrow b = 2$.

Ta có: $\vec{AB} = (-3; 3; -6)$ cùng phương với $\vec{u} = (1; -1; 2)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến.

K là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng AB ,

H là hình chiếu vuông góc của I lên (P)

Ta có: $K \in AB \Rightarrow K(t; 1-t; 2t) \Rightarrow \vec{IK} = (t-1; -t-1; 2t-3)$

$IK \perp AB \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{IK} = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \vec{IK} = (0; -2; -1)$

$$r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))} = \sqrt{25 - d^2(I, (P))} = \sqrt{25 - IH^2}$$

Ta có: $r_{\min} \Leftrightarrow IH_{\max}$

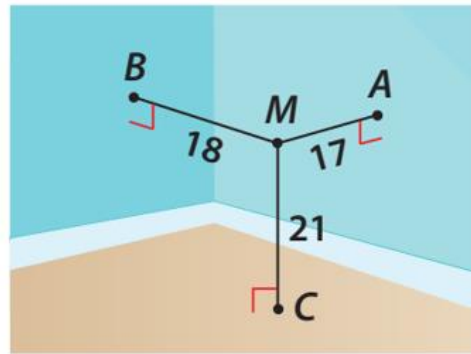
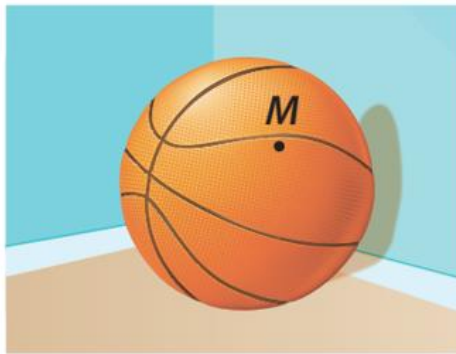
Mà $IH \leq IK \Rightarrow IH_{\max} = IK \Leftrightarrow H \equiv K \Rightarrow (P) \perp IK \Rightarrow \vec{n}_p$ và $\vec{IK}$ cùng phương.

$$\Rightarrow \vec{n}_p = k \cdot \vec{IK} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -2k \\ c = -k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ k = -1 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow T = a + b + c = 0 + 2 + 1 = 3.$$

Câu 60: Một quả bóng rổ được đặt ở một góc của căn phòng hình hộp chữ nhật, sao cho quả bóng chạm và tiếp xúc với hai bức tường và nền nhà của căn phòng đó thì có một điểm trên quả bóng có khoảng cách lần



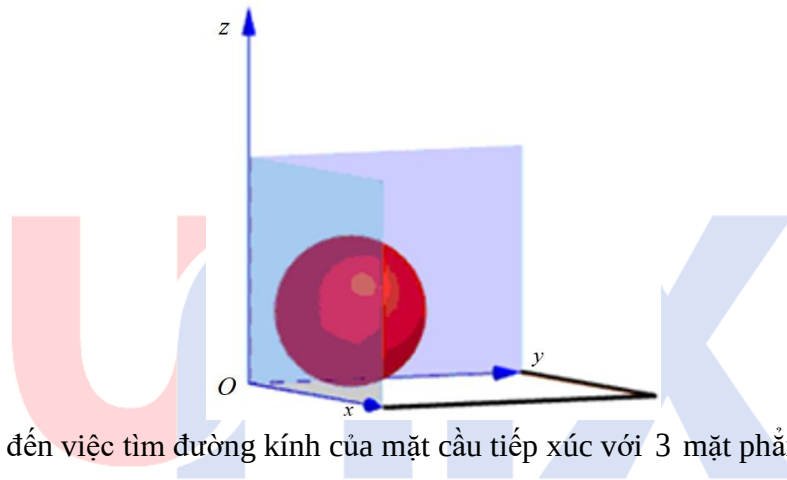
lượt đến hai bức tường và nền nhà là 17 cm, 18 cm, 21 cm (tham khảo hình minh họa). Hỏi độ dài đường kính của quả bóng bằng bao nhiêu cm biết rằng quả bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm? *Kết quả là tròn đến một chữ số thập phân.*



Lời giải

Trả lời: 23,9

Ta đặt hệ trục vào căn phòng sao cho có hai bức tường là mặt (Oxz) , (Oyz) , và nền là (Oxy) .



Vậy bài toán dẫn đến việc tìm đường kính của mặt cầu tiếp xúc với 3 mặt phẳng tọa độ và chứa điểm $M(17;18;21)$.

Ta có thể gọi phương trình mặt cầu là $(S): (x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = a^2$, với $a > 0$ (do mặt cầu tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ nên $a = b = c = R$).

Do $M(17;18;21) \in (S)$ nên $(17-a)^2 + (18-a)^2 + (21-a)^2 = a^2$

$$\Rightarrow 2a^2 - 112a + 1054 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 28 - \sqrt{257} \\ a = 28 + \sqrt{257} \end{cases}$$

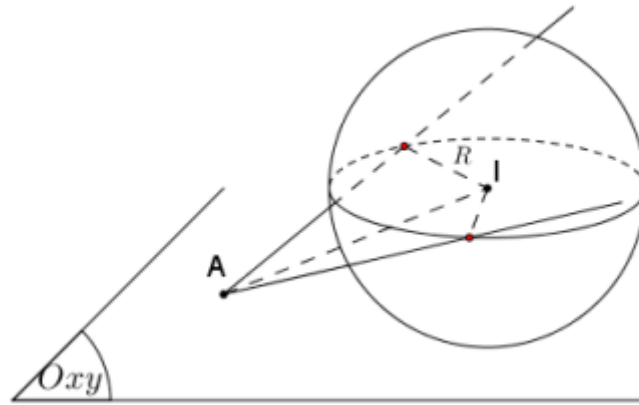
Vì quả bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm nên $a = 28 - \sqrt{257}$ thỏa.

Vậy đường kính quả bóng bằng $2a = 56 - 2\sqrt{257} \approx 23,9(\text{cm})$.

Câu 61: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y)^2 + (z-2)^2 = 3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a,b,c)$ (a,b,c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

Lời giải

Trả lời: 12



Mặt cầu có tâm $I(0;0;2)$, bán kính $R = \sqrt{3}$.

Vì $A \in (Oxy)$ nên $c = 0$. Các tiếp tuyến của A đến mặt cầu (nếu $IA > R$) tạo nên một mặt nón đỉnh A . Để mặt nón này có hai đường sinh vuông góc thì góc ở đỉnh của mặt nón phải $\geq 90^\circ$ hay $IA \leq R\sqrt{2}$.

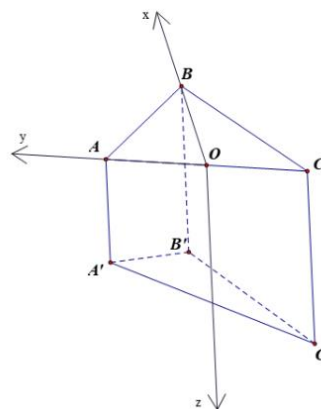
$$\text{Vậy } R \leq IA \leq R\sqrt{2} \Leftrightarrow 3 \leq a^2 + b^2 + 2 \leq 6 \Leftrightarrow 1 \leq a^2 + b^2 \leq 4$$

Ta có cặp số $(a;b)$ thỏa mãn là $(0;\pm 1); (0;\pm 2); (\pm 1;0); (\pm 2;0); (1;1); (1;-1); (-1;1); (-1;-1)$.

Câu 62: Từ mặt nước trong một bể nước, tại ba vị trí đôi một cách nhau 4m, người ta lần lượt thả dây dọi để quả dọi chạm đáy bể. Phần dây dọi (thẳng) nằm trong nước tại ba vị trí đó lần lượt có độ dài 8m; 8,8m; 9,6m. Biết đáy bể là phẳng. Đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc là (làm tròn tới hàng phần chục) (đơn vị độ)

Lời giải

Trả lời: 21,8.



Gọi 3 điểm ở trên mặt nước lần lượt là A, B, C và ba điểm tương ứng ở đáy bể là A', B', C' sao cho $AA' = 8\text{m}, BB' = 8,8\text{m}, CC' = 9,6\text{m}$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, O là trung điểm của AC

Ta có $A(0;2;0), B(2\sqrt{3};0;0), C(0;-2;0), A'(0;2;8), B'(2\sqrt{3};0;8,8), C'(0;-2;9,6)$.

Ta có $\overrightarrow{AB'} = (2\sqrt{3};-2;0,8), \overrightarrow{AC'} = (0;-4;1,6)$.



$$\text{Có } [\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}] = \left(\begin{vmatrix} -2 & 0,8 \\ -4 & 1,6 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0,8 & 2\sqrt{3} \\ 1,6 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \right) = \left(0; -\frac{16\sqrt{3}}{5}; -8\sqrt{3} \right).$$

Mặt phẳng đáy bể là mặt phẳng $(A'B'C')$ có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (0; -\frac{16\sqrt{3}}{5}; -8\sqrt{3})$.

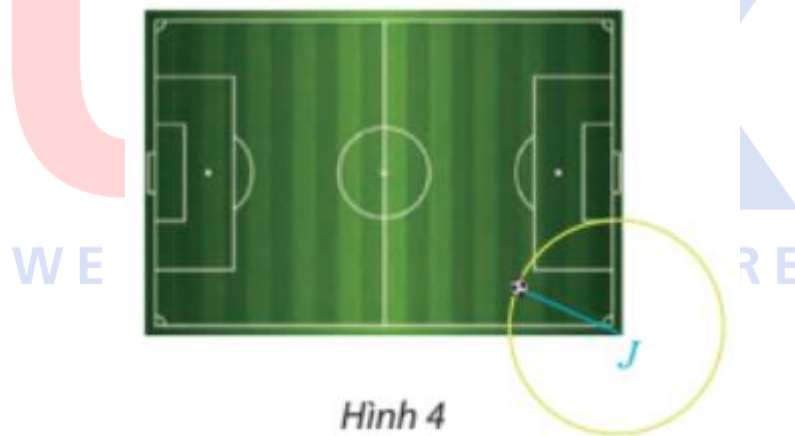
Mặt phẳng nằm ngang (mặt nước) chính là mặt phẳng $(Oxy): z = 0$ có một vector pháp tuyến là: $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

$$\text{Do đó } \cos((A'B'C'), (Oxy)) = \frac{|0 \cdot 0 - \frac{16\sqrt{3}}{5} \cdot 0 - 8\sqrt{3} \cdot 1|}{\sqrt{0^2 + (-\frac{16\sqrt{3}}{5})^2 + (-8\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{5\sqrt{29}}{29}.$$

Suy ra $((A'B'C'), (Oxy)) \approx 21,8^\circ$.

Vậy đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc khoảng $21,8^\circ$.

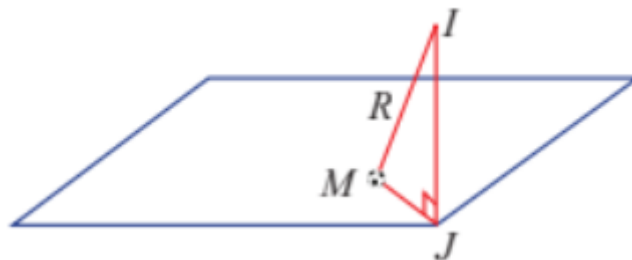
Câu 63: Công nghệ hỗ trợ trọng tài VAR (Video Assistant Referee) thiết lập một hệ toạ độ Oxyz để theo dõi vị trí của quả bóng M . Cho biết M đang nằm trên mặt sân có phương trình $z = 0$, đồng thời thuộc mặt cầu $(S): (x-22)^2 + (y-4)^2 + (z-13)^2 = 194$ (đơn vị độ dài tính theo mét). Gọi J là hình chiếu tâm I của mặt cầu (S) xuống mặt sân bóng. Khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J là:



Hình 4

Lời giải

Trả lời: 5.



Mặt cầu (S) có phương trình

$$(x-22)^2 + (y-4)^2 + (z-13)^2 = 194$$



nên có tâm $I(22; 4; 13)$ và bán kính $R = \sqrt{194}$.

Trong không gian Oxyz, mặt sân có phương trình $z = 0$ trùng với mặt phẳng tọa độ (Oxy), suy ra hình chiếu vuông góc của điểm $I(22; 4; 13)$ xuống mặt sân có tọa độ $J(22; 4; 0)$.

Trong tam giác vuông IJM, ta có $IJ = 13, IM = R = \sqrt{194}$, suy ra

$$JM = \sqrt{IM^2 - IJ^2} = \sqrt{194 - 169} = 5$$

Vậy khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J là 5 m.

Câu 64: Trong hệ trục tọa độ Oxyz, sàn nhà của một công trình thuộc mặt phẳng Oxy, tay vịn của lan can cầu thang là một đường thẳng đi qua hai điểm $A(5; 1; 9)$ và $B(2; 1; 12)$. Góc tạo bởi tay vịn của lan can cầu thang và mặt sàn nhà bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

Trả lời: 45.

Mặt phẳng Oxy có một vector pháp tuyến là $\vec{k} = (0; 0; 1)$

Đường thẳng AB nhận $\overrightarrow{AB} = (-3; 0; 3)$ là một vector chỉ phương

$$\text{Ta có: } \sin(AB, (Oxy)) = \left| \cos(\overrightarrow{AB}, \vec{k}) \right| = \frac{|-3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1|}{\sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 3^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

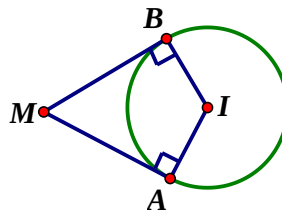
Suy ra $(AB, (Oxy)) = 45^\circ$

Vậy góc tạo bởi tay vịn lan can cầu thang và mặt sàn nhà bằng 45° .

Câu 65: Phía trước của một sân vận động, người ta có đặt một quả bóng đá khổng lồ. Cách đó không xa, có một bóng đèn. Trong không gian Oxyz (đơn vị đo là mét), giả sử mặt ngoài quả bóng (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$ và bóng đèn ở vị trí $M(15; 1; 6)$. Khi đó, khoảng cách xa nhất mà bóng đèn có thể chiếu đến một điểm trên quả bóng bằng MA, với MA chính là tiếp tuyến kẻ từ M đến (S) và A là tiếp điểm. Vậy MA bằng bao nhiêu mét?

Lời giải

Trả lời: 14.



Bề mặt ngoài của quả bóng (S) là một mặt cầu có tâm $I(1; 1; 3)$ và bán kính $R = 3$

$$\text{Ta có: } MI = \sqrt{(1-15)^2 + (1-1)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{205}$$

$$\text{Suy ra } MA = \sqrt{MI^2 - IA^2} = \sqrt{205 - 9} = \sqrt{196} = 14$$

Vậy $MA = 14 \text{ m}$.

Câu 66: Trong không gian Oxyz (đơn vị của các trục tọa độ là mét), một thiết bị phát sóng wifi đặt tại vị trí $A(3; 1; 1)$ như hình vẽ. Vùng phủ sóng tốt nhất của thiết bị có bán kính bằng 11 (m). Hỏi số giá trị



nguyên của tham số m để một người sử dụng điện thoại tại điểm $E(-3;8;m)$ có thể bắt được tín hiệu wifi tốt nhất của thiết bị nói trên.



Lời giải

Trả lời: 13

Vùng phủ sóng của thiết bị đã cho là mặt cầu (S) tâm $A(3;1;1)$, bán kính $R=11$.

$$\text{Ta có } AE = \sqrt{6^2 + 7^2 + (m-1)^2} = \sqrt{m^2 - 2m + 86},$$

Để điện thoại của người đó bắt được tín hiệu wifi tốt nhất của thiết bị nói trên thì

$$AE \leq R \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 2m + 86} \leq 11 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 86 \geq 0 \\ m^2 - 2m + 86 \leq 121 \end{cases} \Leftrightarrow -5 \leq m \leq 7.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-5; -4; -3; \dots; 7\}$.

Vậy có 13 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 67: Trong The Transporter, Jason Statham đang ở trên một cây cột cao, cách mặt đất khoảng 50m, gốc cây cột là gốc tọa độ O của một hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước, đơn vị trên mỗi trục là 1 mét, mặt phẳng (Oxy) là mặt đất. Cách đó không xa, có một bóng đèn mà phạm vi chiếu sáng của nó có dạng hình cầu (S) và hai điểm $A(10;15;15)$, $B(10;25;25)$ luôn thuộc mặt cầu (S) . Biết vị trí mục tiêu mà Jason đang nhắm bắn là điểm tiếp xúc của (S) và mặt đất. Tìm khoảng cách xa nhất từ vị trí của Jason đến mục tiêu của anh ta (kết quả tính theo đơn vị mét và làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Trả lời: 62



Gọi $\{M\} = AB \cap (Oxy) \Rightarrow M(a; b; 0)$. Khi đó, $M \in AB: \begin{cases} x = 10 \\ y = 15 + t \Rightarrow M(0; 15 + t; 15 + t) \\ z = 15 + t \end{cases}$

Mặt khác $M \in (Oxy) \Rightarrow 15 + t = 0 \Rightarrow t = -15 \Rightarrow M(10; 0; 0) \Rightarrow \begin{cases} MA = 15\sqrt{2} \\ MB = 25\sqrt{2} \end{cases}$

Do $\{M\} = AB \cap (Oxy)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại C nên MC là một tiếp tuyến của mặt cầu.

Theo tính chất của phương tích $MC^2 = MA \cdot MB = 750 \Rightarrow MC = 5\sqrt{30}$.

Do C thuộc mặt phẳng (Oxy) nên C thuộc đường tròn tâm M bán kính $R = MC = 5\sqrt{30}$.

Gọi $E(0; 0; 50)$ là tọa độ của Jason Statham $\Rightarrow EC = \sqrt{EO^2 + OC^2}$ là khoảng cách từ Jason Statham đến mục tiêu.

Ta có: $OC \leq OM + MC = 10 + 5\sqrt{30} \Rightarrow EC \leq \sqrt{50^2 + (10 + 5\sqrt{30})^2} \approx 62(m)$.

Câu 68: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là ki – lô - mét), đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $(-64; 128; 64)$. Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát không quá 500 km thì sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay N xuất hiện trên màn hình ra đa và một máy bay M nằm trong mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1458 = 0$ sao cho hai máy bay M, N thuộc đường thẳng có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 1; 1)$. Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai máy bay M, N là bao nhiêu km? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

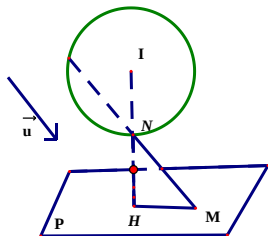
Trả lời: 260

Gọi tọa điểm đặt đài kiểm soát không lưu là $I(-64; 128; 64)$

Vì máy bay N xuất hiện trên màn hình ra đa nên $IN \leq 500$, tức N nằm trong hoặc trên mặt cầu tâm $I(-64; 128; 64)$, bán kính $R = 500$.

$d(I; (P)) = IH = 550 > 500$ (H là hình chiếu vuông góc của I lên (P))

Ta có: $M \in (P): x - 2y + 2z - 1458 = 0$ nên M nằm ngoài mặt cầu.



M, N thuộc đường thẳng có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 1; 1)$

Ta thấy MN không vuông góc với (P) , mặt khác: $\sin(d; (P)) = \left| \cos(\vec{u}_d; \vec{n}_P) \right| = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

Vậy để MN ngắn nhất thì N nằm trên mặt cầu (S) và $N \in IH$.

Khi đó, xét tam giác vuông NHI , có $MN = \frac{NH}{\sin NMH} = \frac{NH}{\sin(d, (P))}$.



Trong đó $NH = IH - IN = 550 - 500 = 50$; $\sin(d; (P)) = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

$$\text{Do đó } MN = \frac{50}{\frac{\sqrt{3}}{9}} = 150\sqrt{3} \approx 260.$$

Vậy khoảng cách nhỏ nhất giữa hai máy bay M, N là 260 km.

Câu 69: Hệ thống định vị toàn cầu GPS là một hệ thống cho phép xác định vị trí của một vật thể trong không gian. Trong cùng một thời điểm, vị trí của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước nhờ các bộ thu phát tín hiệu đặt trên các vệ tinh. Giả sử trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bốn vệ tinh lần lượt đặt tại các điểm $A(3; 4; 4), B(1; -1; 0), C(3; 2; 4), D(2; 0; 2)$; vị trí $M(a; b; c)$ nằm trên mặt phẳng (Oxy) thỏa mãn $P = (\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB})^2 + 2MB^2 + 3MC^2 - 4MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 7

$$2MB^2 + 3MC^2 - 4MD^2 = 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB})^2 + 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})^2 - 4(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD})^2$$

$$= MA^2 + 2\overrightarrow{MA} \cdot (2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AD}) + 2AB^2 + 3AC^2 - 4AD^2$$

$$\overrightarrow{AB} = (-2; -5; -4); \overrightarrow{AC} = (0; -2; 0); \overrightarrow{AD} = (-1; -4; -2) \Rightarrow 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 2MB^2 + 3MC^2 - 4MD^2 = MA^2 + 18$$

$$\text{Vậy } P = (\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB})^2 + MA^2 + 18 = MA^2 \cdot MB^2 \cdot \cos^2 BMA + MA^2 = MA^2 (MB^2 \cdot \cos^2 BMA + 1)$$

Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng Oxy . Khi đó ta có $MA \geq AH = 5$;

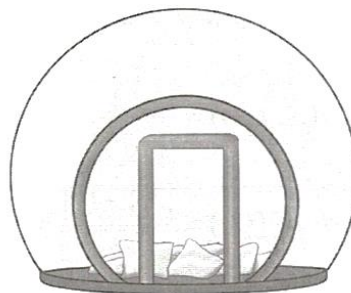
Hơn nữa $MB^2 \cdot \cos^2 BMA + 1 \geq 1$.

$$\text{Do đó } P \geq AH^2 + 18 = 43$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} MA \perp MB \\ M \equiv H \end{cases} \Rightarrow M(3; 4; 0).$$

$$\text{Do đó } a + b + c = 7.$$

Câu 70: Người ta muốn thiết kế một lều cắm trại có dạng là một phần mặt cầu bằng phần mềm 3D (như hình vẽ).



Cho biết phương trình bề mặt của lều là $(S): (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$, phương trình mặt phẳng chứa cửa lều là $(P): x = 2$, phương trình chứa sàn lều là $(Q): z = 0$. Tính tổng bán kính đường tròn cửa lều và đường tròn sàn lều (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải



Trả lời: 5,66

Bề mặt của lều $(S): (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$ có tâm $I(3;3;1)$, bán kính $R=3$.

Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với $(P): x=2$.

Ta có vector chỉ phương của d là $\vec{a}_d = (1;0;0)$, suy ra d có phương trình tham số:
$$\begin{cases} x=3+t \\ y=3 \\ z=1 \end{cases}$$

Gọi $A(3+t;3;1)$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P) . Thay tọa độ của A vào phương trình $(P): x=2$, ta được $(3+t)-2=0$, suy ra $t=-1$, suy ra $A(2;3;1)$.

Bán kính r_1 của đường tròn cửa lều là: $r_1 = \sqrt{R^2 - IA^2} = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$.

Gọi d' là đường thẳng đi qua I và vuông góc với $(Q): z=0$.

Ta có vector chỉ phương của d' là $\vec{a}_{d'} = (0;0;1)$, suy ra d' có phương trình tham số:
$$\begin{cases} x=3 \\ y=3 \\ z=1+t \end{cases}$$

Gọi $B(3;3;1+t)$ là hình chiếu vuông góc của I trên (Q) . Thay tọa độ của B vào phương trình $(Q): z=0$ ta được $1+t=0$, suy ra $t=-1$, suy ra $B(3;3;0)$.

Bán kính r_2 của đường tròn sàn lều là: $r_2 = \sqrt{R^2 - IB^2} = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$.

Vậy tổng bán kính cần tìm là: $4\sqrt{2} \approx 5,66$.

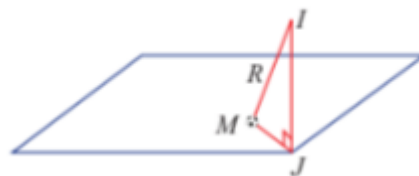
Câu 71: Trong công nghệ VAR (Video Assistant Referee) thiết lập một hệ tọa độ Oxyz để theo dõi vị trí của quả bóng M . Cho biết M đang nằm trên mặt sân có phương trình $z=0$, đồng thời thuộc mặt cầu $(S): (x-32)^2 + (y-50)^2 + (z-10)^2 = 109$. Gọi J là hình chiếu của tâm mặt cầu lên mặt sân. Tính khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J

Lời giải

Trả lời: 3

Do J là hình chiếu của tâm mặt cầu $I(32;50;10)$ lên mặt phẳng $z=0 \Rightarrow J(32;50;0)$

Ta có hình minh họa cho mặt phẳng



Trong tam giác vuông IJM , ta có $IJ=10, IM=R$, suy ra

$$JM = \sqrt{IM^2 - IJ^2} = \sqrt{109 - 100} = 3$$

Câu 72: Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian. Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS trong không gian như sau: trong cùng một thời điểm, tọa độ của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được một khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm tọa độ.



Ảnh: Vệ tinh GPS đang bay trên quỹ đạo quanh Trái Đất.

(Nguồn: <https://vi.wikipedia.org>)

Bốn vệ tinh được đặt tại các điểm $A(9; -2; 7)$, $B(1; 4; 8)$, $C(7; -3; -5)$, $D(-4; -11; 12)$. Một con tàu đang ở vị trí điểm $M(x; y; z)$ mà khoảng cách từ nó đến các vệ tinh lần lượt là $MA = \sqrt{58}$, $MB = \sqrt{83}$, $MC = \sqrt{173}$, $MD = \sqrt{97}$. Khi đó tổng bình phương tọa độ điểm M là

Lời giải

Trả lời: 78

Ta có: $\overrightarrow{MA} = 9 - x; -2 - y; 7 - z$

$$\Rightarrow MA = \sqrt{58} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 18x + 4y - 14z = -76 \quad (1)$$

$$\overrightarrow{MB} = 1 - x; 4 - y; 8 - z$$

$$\Rightarrow MB = \sqrt{83} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8y - 16z = 2 \quad (2)$$

$$\overrightarrow{MC} = 7 - x; -3 - y; -5 - z$$

$$\Rightarrow MC = \sqrt{173} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 14x + 6y + 10z = 90 \quad (3)$$

$$\overrightarrow{MD} = -4 - x; -11 - y; 12 - z$$

$$\Rightarrow MD = \sqrt{97} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 22y - 24z = -184 \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 18x + 4y - 14z = -76 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8y - 16z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 14x + 6y + 10z = 90 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 22y - 24z = -184 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -16x + 12y + 2z = -78 \\ 12x - 14y - 26z = -88 \\ -22x - 16y + 34z = 274 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 18x + 4y - 14z = -76 \end{cases} *$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \\ z = 7 \end{cases} \text{ thỏa } *.$$

Vậy $T = x^2 + y^2 + z^2 = 78$.

Câu 73: Trong không gian Oxyz (đơn vị của các trục tọa độ là kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-2; 1; -4)$. Biết bán kính phủ sóng của trạm là 3km. Có 5 người sử dụng điện thoại tại các điểm $A(2; -1; 3)$, $B(0; 1; -4)$, $C(-2; 1; -3)$, $D(0; 1; -3)$, $E(-4; -2; 1)$. Hỏi trong số 5 người đó, có bao nhiêu người có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?



Lời giải

Trả lời: 3

$$IA = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 7^2} = \sqrt{69} > 3.$$

$$IB = \sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2} = 2 < 3.$$

$$IC = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1 < 3.$$

$$ID = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5} < 3.$$

$$IE = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{38} > 3.$$

Vậy có 3 người có thể sử dụng dịch vụ của trạm nói trên

Câu 74: Hệ thống định vị toàn cầu GPS là một hệ thống cho phép xác định vị trí của một vật thể trong không gian. Trong cùng một thời điểm, vị trí của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước nhờ các bộ thu phát tín hiệu đặt trên các vệ tinh. Giả sử trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bốn vệ tinh lần lượt đặt tại các điểm $A(3;1;0)$, $B(3;6;6)$, $C(4;6;2)$, $D(6;2;14)$; vị trí $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA=3$, $MB=6$, $MC=5$, $MD=13$. Khoảng cách từ điểm M đến điểm O bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 3

Ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} MA=3 \\ MB=6 \\ MC=5 \\ MD=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)^2 + (b-1)^2 + c^2 = 9 \\ (a-3)^2 + (b-6)^2 + (c-6)^2 = 36 \\ (a-4)^2 + (b-6)^2 + (c-2)^2 = 25 \\ (a-6)^2 + (b-2)^2 + (c-14)^2 = 169 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 - 6a - 2b = -1 \\ a^2 + b^2 + c^2 - 6a - 12b - 12c = -45 \\ a^2 + b^2 + c^2 - 8a - 12b - 4c = -31 \\ a^2 + b^2 + c^2 - 12a - 4b - 28c = -67 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta tìm được $a=1, b=2, c=2$

Do đó khoảng cách từ điểm M đến điểm O là: $OM = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3.$

Câu 75: Hệ thống định vị toàn cầu GPS (Global Positioning System) là một hệ thống cho phép xác định vị trí của một vật thể trong không gian. Trong cùng một thời điểm vị trí của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước nhờ các bộ thu phát tín hiệu đặt trên các vệ tinh. Giả sử trong không gian $Oxyz$, tỉ lệ dài trên các trục là 10km tính cho một đơn vị tỉ lệ trên mỗi trục, cho bốn vệ tinh có tọa độ lần lượt là $A(-1;2;-1)$, $B(1;4;0)$, $C(3;0;9)$, $D(7;10;-1)$ đang tiến hành theo dõi vật thể M (coi là một chất điểm). Các vệ tinh dùng sóng điện từ có tần số 1MHz. Ở một thời điểm cả 4 vệ tinh bắt tín hiệu về M thì sau nhận được tín hiệu trả về ngay sau đó trong những khoảng thời gian là $t_A = 0,4 \text{ ms}$, $t_B = 0,2 \text{ ms}$, $t_C = \frac{2}{3} \text{ ms}$, $t_D = 0,4 \text{ ms}$. Tính khoảng cách từ M đến O (Biết rằng vận tốc của sóng điện từ bằng vận tốc ánh sáng $c = 3.10^8 \text{ m/s}$ và kết quả tính được làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 6,78

Từ vệ tinh A sẽ phát tín hiệu đến điểm M và sẽ thu tín hiệu quay về A

$$\text{Từ đó ta có thể suy ra được: } 2AM = c.t_A \Rightarrow AM = \frac{c.t_A}{2}$$



Do đó $AM = \frac{c \cdot t_A}{2} = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3}}{2} = 60000 \text{ m} = 60 \text{ km}$ và ta quy đổi trong hệ trục Oxyz thì ta có $AM = 6$.

Tương tự: $BM = 3, CM = 10, DM = 6$.

Tại thời điểm bốn vệ tinh bắn tín hiệu về điểm M . Khi đó ta có hệ phương trình sau:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2 + (b-2)^2 + (c+1)^2 = 36 & (1) \\ (a-1)^2 + (b-4)^2 + c^2 = 9 & (2) \\ (a-3)^2 + b^2 + (c-9)^2 = 100 & (3) \\ (a-7)^2 + (b-10)^2 + (c+1)^2 = 36 & (4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2)-(1): -4a - 4b - 2c = -38 \\ (3)-(1): -8a + 4b - 20c = -20 \\ (4)-(1): -14a - 14b = -144 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta tìm được $a=3, b=6, c=1 \Rightarrow M(3;6;1)$

Vậy khoảng cách từ M đến O là: $\sqrt{(3-0)^2 + (6-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{46} \approx 6,78$.

Câu 76: Hệ thống định vị toàn cầu GPS (Global Positioning System) hiện tại có 24 vệ tinh, mỗi vệ tinh cách Trái Đất 20000 km, ta coi Trái Đất là khối cầu có bán kính $R = 6$ (nghìn km). Với một hệ tọa độ Oxyz đã chọn, O là tâm Trái Đất và đơn vị trên mỗi trục là nghìn km, hai vệ tinh có tọa độ $A(26;0;0), B(0;26;0)$. Xét điểm $M(x;y;z)$ thuộc bề mặt Trái Đất. Tính giá trị nhỏ nhất của $MA + MB$ theo đơn vị nghìn km (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Trả lời: 44

Mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ và gọi $M(x;y;z)$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } MA + MB &= \sqrt{(x-26)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + (y-26)^2 + z^2} \\ &\geq \sqrt{(x+y-52)^2 + (x+y)^2 + 4z^2} \geq \sqrt{(x+y-52)^2 + (x+y)^2} \text{ khi } z=0 \end{aligned}$$

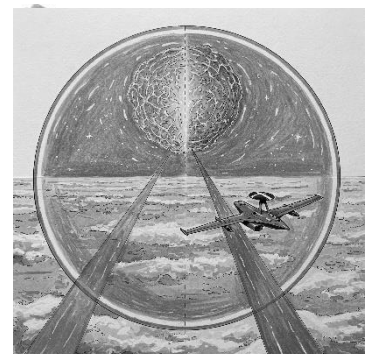
$$\text{Đặt } x+y=t \text{ suy ra } f(t) = \sqrt{(t-52)^2 + t^2} \text{ với } t \in [0; 6\sqrt{2}]$$

Do $f'(t) < 0$ với mọi $t \in [0; 6\sqrt{2}]$ nên $\min f(t) = f(6\sqrt{2}) \approx 44,3$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} x=y \\ x+y=6\sqrt{2} \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=3\sqrt{2} \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow M(3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}; 0)$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA + MB$ theo đơn vị nghìn km là 44.

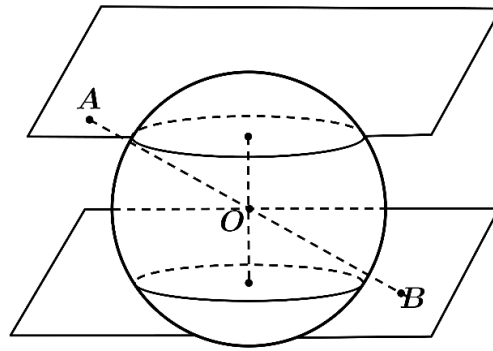
Câu 77: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, xét một vùng phòng thủ hình cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ và một hành lang bay an toàn được giới hạn bởi hai mặt phẳng song song (P_1): $x + y + z = 5$ và mặt phẳng (P_2): $x + y + z = -5$. Một máy bay trinh sát bắt đầu xâm nhập khu vực từ điểm $M_0(6;0;0)$ và bay theo đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-1;1;1)$. Tính chiều dài đoạn đường bay của máy bay nằm hoàn toàn trong phần giao của hành lang bay an toàn và vùng phòng thủ hình cầu (đơn vị: km).





Lời giải

Trả lời: 10



Phương trình đường thẳng Δ là:
$$\begin{cases} x = 6 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng (P_1) là: $(6 - t) + t + t = 5 \Leftrightarrow t = -1$

Khi đó $A(7; -1; -1)$ suy ra $OA = \sqrt{7^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{51} > R$

Giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng (P_2) là: $(6 - t) + t + t = -5 \Leftrightarrow t = -11$

Khi đó $B(17; -11; -11)$ suy ra $OA = \sqrt{17^2 + (-11)^2 + (-11)^2} = \sqrt{531} > R$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (10; -10; -10) \parallel (1; -1; -1)$ nên phương trình đường bay là $(d): \begin{cases} x = 7 + t \\ y = -1 - t \\ z = -1 - t \end{cases}$

Giao điểm của đường thẳng và mặt cầu là: $(7 + t)^2 + (-1 - t)^2 + (-1 - t)^2 = 49$

$$\Leftrightarrow 3t^2 + 18t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{-9 + 5\sqrt{3}}{3} \\ t_2 = \frac{-9 - 5\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Khi đó $M(7 + t_1; -1 - t_1; -1 - t_1)$ và $N(7 + t_2; -1 - t_2; -1 - t_2)$

Chiều dài đoạn đường bay của máy bay là: $MN = \sqrt{(t_2 - t_1)^2 + (t_2 - t_1)^2 + (t_2 - t_1)^2}$

$$MN = \sqrt{3(t_2 - t_1)^2} = \sqrt{3[(t_1 + t_2)^2 - 4t_1t_2]} = \sqrt{3\left(6^2 - 4 \cdot \frac{2}{3}\right)} = 10$$

Vậy chiều dài đoạn đường bay của máy bay nằm hoàn toàn trong phần giao của hành lang bay an toàn và vùng phòng thủ hình cầu là 10km.

Câu 78: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là ki - lô - mét), đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $(-64; 128; 64)$. Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát không quá 500 km thì sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay N xuất hiện trên màn hình ra đa và một máy bay M nằm trong mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1458 = 0$ sao cho hai máy bay M, N thuộc đường thẳng có vectơ chỉ



phương là $\vec{u} = (1; 1; 1)$. Khoảng cách lớn nhất giữa hai máy bay M, N là bao nhiêu km? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 5456

Máy bay N xuất hiện trên màn hình ra đa nên N thuộc khối cầu (S) có tâm $I(-64; 128; 64)$, bán kính $R = 500$.

Ta có $d(I, (P)) = \frac{|x_I - 2y_I + 2z_I - 1458|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 550 > R$ nên (P) và (S) không giao nhau.

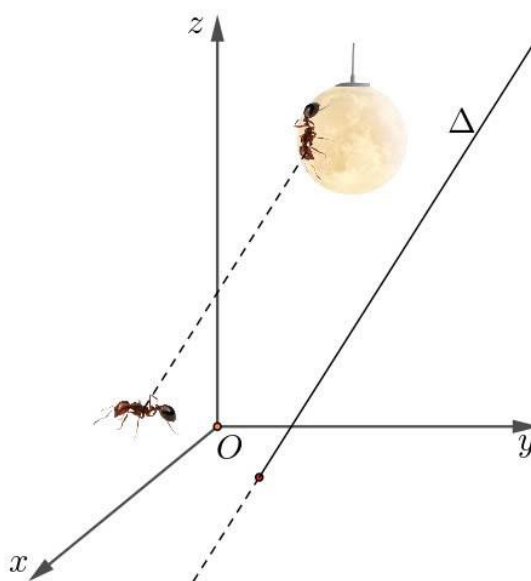
Gọi α là góc tạo bởi MN và mặt phẳng (P) .

Gọi H là hình chiếu của N lên mặt phẳng (P) .

Mặt khác $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với véc-tơ $\vec{u} = (1; 1; 1)$ và $\vec{n}_p = (1; -2; 2)$ suy ra $\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}_p|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}_p|} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

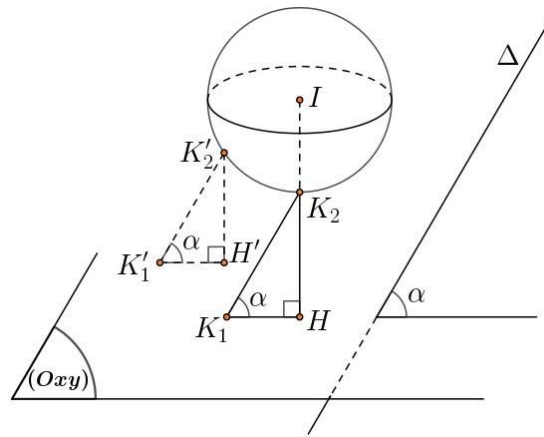
Khi đó $MN = \frac{NH}{\sin \alpha} \geq \frac{NH_{\min}}{\sin \alpha} = \frac{d(I, (P)) + R}{\sin \alpha} = \frac{550 + 500}{\frac{1}{3\sqrt{3}}} = 5456$

Câu 79: Trong không gian với hệ trục Oxyz, giả sử mặt đất trùng với mặt phẳng (Oxy). Một bóng đèn trang trí dạng khối cầu có tâm $I(-1; 2; 4)$ và bán kính R được treo cố định lên trần nhà (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là m). Một con kiến bò tùy ý trên bóng đèn và một con kiến khác bò tùy ý trên mặt đất, giả sử vectơ tạo bởi tọa độ vị trí của 2 con kiến luôn cùng phương với đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{2}$ (coi mỗi con kiến là một điểm). Biết lúc 2 con kiến gần nhau nhất có khoảng cách bằng $\frac{57}{10}(m)$. Bán khối cầu có độ dài bao nhiêu cm .



Lời giải

Trả lời: 20



+ Gọi α là góc tạo bởi Δ và mặt (Oxy) suy ra: $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Gọi H là hình chiếu của I lên (Oxy) , gọi K_2 là giao điểm của (IH) và khối cầu (I, R) . K_1 là giao điểm của đường thẳng qua K_2 và song song Δ với (Oxy) .

Vì K_2H là độ dài ngắn nhất giữa khối cầu (I, R) và (Oxy) nên lúc 2 con kiến gần nhau nhất thì một con ở K_2 và một con ở K_1 .

+ Theo giả thiết: $K_1 K_2 = \frac{57}{10}$, suy ra: $K_2 H = \frac{19}{5}$. Vậy $R = 4 - \frac{19}{5} = \frac{1}{5} = 0,2(m) = 20(cm)$

Câu 80: Hệ thống định vị toàn cầu GPS hiện tại có 24 vệ tinh, mỗi vệ tinh cách trái đất 20000 km, ta coi Trái đất là một khối cầu có bán kính $R = 6$ (nghìn km). Với hệ tọa độ $Oxyz$ đã chọn, O là tâm trái đất và đơn vị trên mỗi trục là nghìn km, hai vệ tinh có tọa độ $A(26;0;0)$, $B(0;26;0)$. Xét điểm $M(x;y;z)$ thuộc bề mặt Trái Đất. Tính giá trị nhỏ nhất của $MA + MB$ theo đơn vị nghìn km (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Trả lời: 44

Phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

Ta có $MA+MB=\sqrt{(x-26)^2+y^2+z^2}+\sqrt{x^2+(y-26)^2+z^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Minkowski ta có:

$$\begin{aligned} MA+MB &= \sqrt{(x-26)^2+y^2+z^2} + \sqrt{x^2+(y-26)^2+z^2} \geq \sqrt{(x+y-52)^2+(x+y)^2+4z^2} \\ &\geq \sqrt{(x+y-52)^2+(x+y)^2}. \end{aligned}$$

Điều kiện để $MA+MB=\sqrt{(x+y-52)^2+(x+y)^2}$ là khi $z=0$, khi đó $x^2+y^2=36$

Mặt khác, vì $M(x; y; z)$ thuộc mặt cầu tâm O , bán kính bằng 6 nên $-6 \leq x; y; z \leq 6$ đó đó $x + y > -12$

•

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có $x + y \leq \sqrt{(1^2 + 1^2)(x^2 + y^2)} = \sqrt{2.36} = 6\sqrt{2}$.

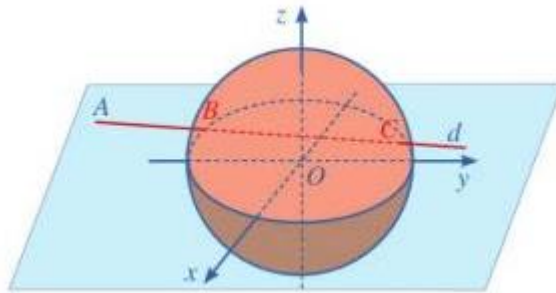
Đặt $t = x + y \Rightarrow -12 < t \leq 6\sqrt{2}$, khi đó $f(t) = MA + MB = \sqrt{(t-52)^2 + t^2} = \sqrt{2t^2 - 104t + 52^2}$.

$$f'(t) = \frac{2t - 52}{\sqrt{2t^2 - 104t + 52^2}}.$$



Dễ thấy hàm số $f'(t) \leq 0$ khi $-12 < t \leq 6\sqrt{2}$. Do đó $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $-12 < t \leq 6\sqrt{2}$ khi $t = 6\sqrt{2}$ và bằng $f(6\sqrt{2}) = \sqrt{2t^2 - 104t + 52^2} = \sqrt{2776 - 624\sqrt{2}} \approx 44$.

Câu 81: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $O(0;0;0)$, mỗi đơn vị trên trục ứng với 1km. Máy bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 417km sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay đang ở vị trí $A(222;565;8)$ chuyển động theo đường thẳng d có véc tơ chỉ phương $\vec{u}(91;75;0)$ và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ). Tọa độ của vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa là $M(a;b;c)$. Khi đó $a+b+c$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Trả lời: 463

Vùng phủ sóng Rada được phát ra từ trạm kiểm soát là tập hợp những điểm cách tâm $O(0;0;0)$ không quá 417km. Đây là những điểm nằm trên bề mặt và bên trong khối cầu có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 417^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 173889$ (*).

Quỹ đạo chuyển động của máy bay là một đường thẳng có phương trình $d: \begin{cases} x = 222 - 91t \\ y = 565 - 75t \\ z = 8 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

Máy bay bắt đầu thuộc vùng kiểm soát của ra đa khi $M(222 - 91t; 565 - 75t; 8)$ thỏa mãn (*)

$$\Rightarrow (222 - 91t)^2 + (565 - 75t)^2 + 8^2 = 173889 \Leftrightarrow 13906t^2 - 125154t + 194684 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 7 \end{cases}$$

$$t = 2 \Rightarrow M(40; 415; 8) \Rightarrow AM^2 = 55624$$

$$t = 7 \Rightarrow M(-415; 40; 8) \Rightarrow AM^2 = 681395$$

$$\text{Vậy } M(40; 415; 8) \Rightarrow a + b + c = 463.$$