



XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

BÀI: CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN – CÔNG THỨC BAYES



LÝ THUYẾT.

I. Công thức xác suất toàn phần

Cho hai biến cố A và B , ta có: $P(B) = P(A).P(B|A) + P(\bar{A}).P(B|\bar{A})$

II. Công thức Bayes

Cho hai biến cố A và B , với $P(B) > 0$, ta có

$$P(A|B) = \frac{P(A).P(B|A)}{P(A).P(B|A) + P(\bar{A}).P(B|\bar{A})}$$

Nhận xét: Theo công thức xác suất toàn phần $P(B) = P(A).P(B|A) + P(\bar{A}).P(B|\bar{A})$

Nên công thức Bayes còn có dạng: $P(A|B) = \frac{P(A).P(B|A)}{P(B)}$.



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Công thức xác suất toàn phần: $P(A) = P(B).P(A|B) + P(\bar{B}).P(A|\bar{B})$

2. Công thức Bayes:

$$P(B|A) = \frac{P(B).P(A|B)}{P(A)} \text{ hoặc } P(B|A) = \frac{P(B).P(A|B)}{P(B).P(A|B) + P(\bar{B}).P(A|\bar{B})}$$

✓ **Chú ý 1:** Các công thức cần nhớ

$$\gg P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$\gg P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$$

$$\gg P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$$

$$\gg P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B)$$

✓ **Chú ý 2:** Công thức xác suất toàn phần và Công thức Bayes được áp dụng trong các trường hợp sự việc bài toán đề cập đến gồm **nhiều giai đoạn** có sự **liên đới nhau** trong quá trình xảy ra.



DẠNG 1. MÔ TẢ CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN THÔNG QUA BẢNG DỮ LIỆU THỐNG KÊ 2X2 VÀ SƠ ĐỒ HÌNH CÂY.

Phương pháp

- Bước 1. Xác định các biến cố: xác định các biến cố liên quan và biến cố cần tính xác suất.
- Bước 2. Tính các xác suất của các biến cố liên quan.
- Bước 3. Lập bảng dữ liệu thống kê 2x2 hoặc sơ đồ hình cây.
- Bước 4. Thực hiện tính toán.

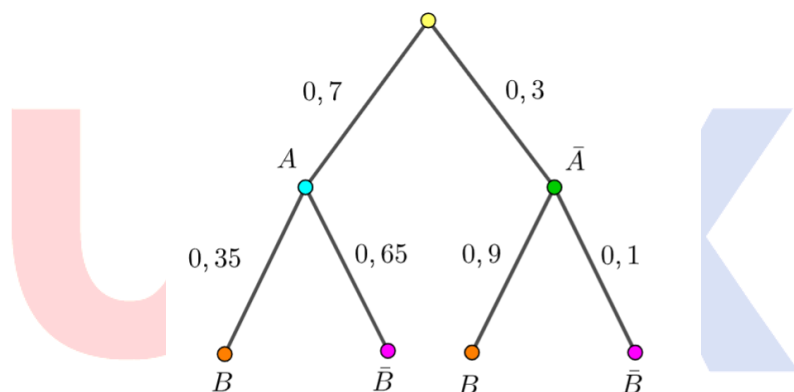
Câu 1: Số khán giả đến xem buổi biểu diễn ca nhạc ngoài trời phụ thuộc vào thời tiết. Giả sử, nếu trời không mưa thì xác suất để bán hết vé là 0,9; còn nếu trời mưa thì xác suất để bán hết vé chỉ là 0,35. Dự báo thời tiết cho thấy xác suất để trời mưa vào buổi biểu diễn là 0,7. Tính xác suất để bán hết vé.

Lời giải

Gọi A là biến cố: “Trời mưa”; B là biến cố: “Bán hết vé”.

Ta có: $P(A) = 0,7$ suy ra $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,3$.

Ta có sơ đồ hình cây như sau:



Trên nhánh cây OA và $O\bar{A}$ tương ứng ghi là $P(A)$ và $P(\bar{A})$.

Trên nhánh cây AB và $A\bar{B}$ tương ứng ghi là $P(B|A)$ và $P(\bar{B}|A)$.

Trên nhánh cây $\bar{A}B$ và $\bar{A}\bar{B}$ tương ứng ghi là $P(B|\bar{A})$ và $P(\bar{B}|\bar{A})$.

Có hai nhánh cây đi tới B là OAB và $O\bar{A}B$.

Vậy $P(B) = 0,7 \cdot 0,35 + 0,3 \cdot 0,9 = 0,515$.

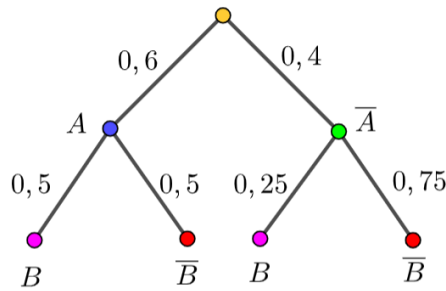
Câu 2: Một chiếc hộp có 2 loại bi là viên bi đỏ và viên bi vàng, trong đó có 60% là viên bi đỏ, các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Sau khi kiểm tra người ta thấy có 50% số viên bi màu đỏ đánh số và 25% số viên bi màu vàng đánh số. Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp, tính xác suất để viên bi lấy được đánh số.

Lời giải

Gọi A là biến cố: “Viên bi lấy được màu đỏ”; B là biến cố: “Viên bi lấy được đánh số”.

Ta có: $P(A) = 0,6$ suy ra $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,4$.

Ta có sơ đồ hình cây như sau:



Trên nhánh cây OA và OA tương ứng ghi là $P(A)$ và $P(\bar{A})$.

Trên nhánh cây AB và $A\bar{B}$ tương ứng ghi là $P(B|A)$ và $P(\bar{B}|A)$.

Trên nhánh cây $\bar{A}B$ và $\bar{A}\bar{B}$ tương ứng ghi là $P(B|\bar{A})$ và $P(\bar{B}|\bar{A})$.

Có hai nhánh cây đi tới B là OAB và $O\bar{A}B$. Vậy

$$P(B) = 0,6 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,25 = 0,4.$$

DẠNG 2: MÔ TẢ CÔNG THỨC BAYES THÔNG QUA BẢNG DỮ LIỆU THỐNG KÊ 2X2 VÀ SƠ ĐỒ HÌNH CÂY.

Phương pháp

Bước 1: Xác định các biến cố và gọi các biến cố liên quan để trả lời câu hỏi cần tìm có dạng “Nếu xảy ra biến cố B (hoặc $\bar{B}$) thì xác suất xảy ra biến cố A (hoặc $\bar{A}$) bằng bao nhiêu?”.

Bước 2: Tính các xác suất của các biến cố liên quan.

Bước 3: Lập bảng dữ liệu thống kê 2x2 hoặc sơ đồ hình cây.

Bước 4: Áp dụng công thức Bayes để tính toán.

Câu 3: Một thống kê cho thấy tỉ lệ dân số mắc bệnh hiểm nghèo Y là 0,5%. Biết rằng, có một loại xét nghiệm mà nếu mắc bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất 94% xét nghiệm cho kết quả dương tính; nếu không bị bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất 97% xét nghiệm cho kết quả âm tính. Hỏi khi một người xét nghiệm cho kết quả dương tính thì xác suất mắc bệnh hiểm nghèo Y của người đó là bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Xét hai biến cố A : “Người được chọn ra bị mắc bệnh hiểm nghèo Y ”,

B : “Người được chọn ra có xét nghiệm cho kết quả dương tính”

Do tỉ lệ người mắc bệnh hiểm nghèo Y là 0,5% = 0,005 nên trước khi tiến hành xét nghiệm, xác suất mắc bệnh hiểm nghèo Y của một người là $P(A) = 0,005$ và

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,005 = 0,995.$$

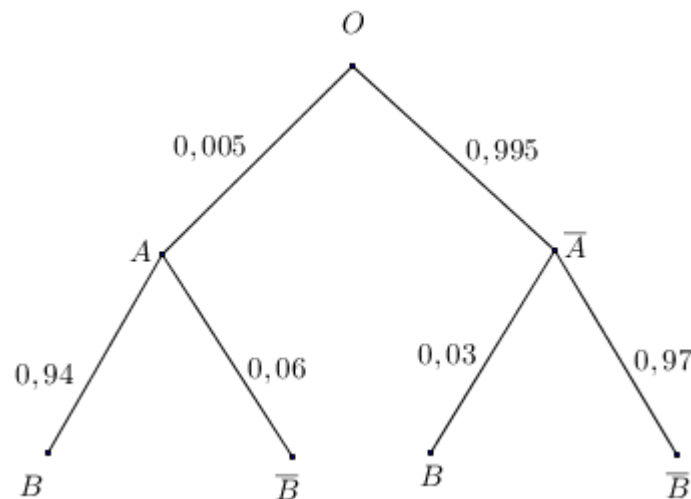
Nếu mắc bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất 94% xét nghiệm cho kết quả dương tính nên

$$P(B|A) = 94\% = 0,94.$$

Nếu không bị bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất 97% xét nghiệm cho kết quả âm tính nên

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = 97\% = 0,97$$

Ta có sơ đồ hình cây như sau



Ta thấy xác suất mắc bệnh hiểm nghèo Y của một người khi xét nghiệm cho kết quả dương tính là $P(A|B)$. Áp dụng công thức Bayes, ta có:

$$P(A|B) = \frac{P(A).P(B|A)}{P(A).P(B|A) + P(\bar{A}).P(B|\bar{A})} = \frac{0,005.0,94}{0,005.0,94 + 0,995.0,03} \approx 13,6\%.$$

Vậy xác suất mắc bệnh hiểm nghèo Y của một người khi xét nghiệm cho kết quả dương tính là 13,6%.

Câu 4: Một loại linh kiện do hai nhà máy số I và số II cùng sản xuất. Tỷ lệ phế phẩm của các nhà máy I và II lần lượt là 4% và 3%. Trong một lô linh kiện để lẫn lộn 80 sản phẩm của nhà máy số I và 120 sản phẩm của nhà máy số II. Một khách hàng lấy ngẫu nhiên một linh kiện từ lô hàng đó. Giả sử linh kiện được lấy ra là linh kiện phế phẩm. Xác suất linh kiện đó do nhà máy nào sản xuất là cao hơn?

Lời giải

Xét hai biến cố sau: A: “Linh kiện lấy ra do nhà máy I sản xuất”,

B: “Linh kiện lấy ra là phế phẩm”

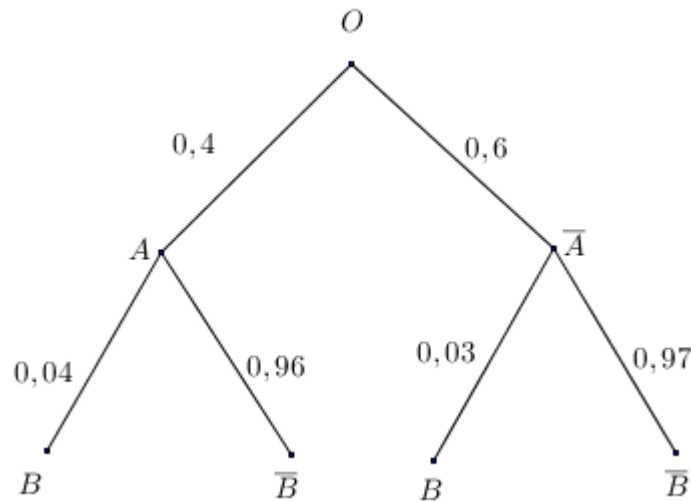
Vì trong lô linh kiện có tổng cộng $80 + 120 = 200$ linh kiện nên $P(A) = \frac{80}{200} = 0,4$;

$$P(\bar{A}) = 0,6.$$

Vì tỷ lệ phế phẩm của các nhà máy I và II lần lượt là 4% và 3% nên $P(B|A) = 4\% = 0,04$ và

$$P(B|\bar{A}) = 3\% = 0,03.$$

Ta có sơ đồ cây.



Khi linh kiện lấy ra là phế phẩm thì xác suất linh kiện đó do nhà máy I sản xuất là $P(A|B)$ và xác suất linh kiện đó do nhà máy II sản xuất là $P(\bar{A}|B)$.

Áp dụng công thức Bayes, ta có:

$$P(A|B) = \frac{P(A).P(B|A)}{P(A).P(B|A) + P(\bar{A}).P(B|\bar{A})} = \frac{0,4.0,04}{0,4.0,04 + 0,6.0,03} \approx 47\%.$$

Suy ra $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) \approx 53\%$.

Vậy xác suất linh kiện đó do nhà máy II sản xuất là cao hơn.

DẠNG 3. CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN VÀ CÔNG THỨC BAYES.

Phương

Công thức xác suất toàn phần: Cho hai biến cố A và B với $0 < P(B) < 1$. Khi đó:

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$

Chú ý: Công thức xác suất toàn phần cũng đúng với biến cố B bất kì.

Công thức Bayes: Giả sử A và B là hai biến cố ngẫu nhiên thoả mãn $P(A) > 0$ và $0 < P(B) < 1$. Khi đó

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})}$$

Chú ý: Với $P(A) > 0$, $P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}$ cũng được gọi là công thức Bayes.

Câu 5: Giả sử tỉ lệ người dân của tỉnh Khánh Hòa nghiện thuốc lá là 20%; tỉ lệ người bị bệnh phổi trong số người nghiện thuốc lá là 70%, trong số người không nghiện thuốc lá là 15%.

- Hỏi khi ta gặp ngẫu nhiên một người dân của tỉnh Khánh Hòa thì khả năng mà đó bị bệnh phổi là bao nhiêu %?
- Tính xác suất mà người đó là nghiện huốc lá khi biết bị bệnh phổi.

Lời giải

- Gọi A là biến cố “người nghiện thuốc lá”, suy ra $\bar{A}$ là biến cố “người không nghiện thuốc lá”



Gọi B là biến cố “người bị bệnh phổi”

Để người mà ta gặp bị bệnh phổi thì người đó nghiện thuốc lá hoặc không nghiện thuốc lá

Ta cần tính $P(B)$

$$\text{Với } P(B) = P(A).P(B|A) + P(\bar{A}).P(B|\bar{A})$$

Ta có

$$P(A) = 0,2$$

$$P(B|A) = 0,7$$

$$P(\bar{A}) = 0,8$$

$$P(B|\bar{A}) = 0,15$$

$$\text{Vậy } P(B) = P(A).P(B|A) + P(\bar{A}).P(B|\bar{A}) = 0,2.0,7 + 0,8.0,15 = 0,26$$

Do đó, tỉ lệ người mắc bệnh phổi của tỉnh Khánh Hòa là 26%

b)

xác suất mà người đó là nghiện Thuốc lá khi biết bị bệnh phổi là $P(A|B)$

Theo công thức Bayes, ta có

$$P(A|B) = \frac{P(A).P(B|A)}{P(B)} = \frac{0,2.0,7}{0,26} = \frac{7}{13}$$

Như vậy trong số người bị bệnh phổi của tỉnh Khánh Hòa, có khoảng $\frac{7}{13}$ số người nghiện thuốc lá.

Câu 6: Cho hai biến cố A và B có $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,8$ và $P(AB) = 0,16$. Khi đó, $P(A|B)$ bằng

Lời giải

$$\text{Ta có } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0,16}{0,8} = 0,2$$

Câu 7: Cho hai biến cố A và B có $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,5$ và $P(B|A) = 0,2$. Khi đó, $P(AB)$ bằng

Lời giải

$$P(AB) = P(A).P(B|A) = 0,3.0,2 = 0,06$$

Câu 8: Có 2 đội thi đấu bơi lội. Đội I có 6 vận động viên, đội II có 8 vận động viên. Xác suất đạt huy chương vàng của mỗi vận động viên đội I và đội II tương ứng là 0,75 và 0,6. Chọn ngẫu nhiên một vận động viên. Giả sử vận động viên được chọn đạt huy chương vàng. Xác suất để vận động viên thuộc đội I là

Lời giải

Gọi A là biến cố “Vận động viên thuộc đội I”, suy ra $\bar{A}$ là biến cố: “Vận động viên thuộc đội II”

Gọi B là biến cố “Vận động viên đạt huy chương vàng”.

Theo công thức xác suất toàn phần ta có

$$P(B) = P(A).P(B|A) + P(\bar{A}).P(B|\bar{A})$$

$$P(A) = \frac{6}{14}, P(\bar{A}) = \frac{8}{14}$$



$P(B|A)$ là xác suất để vận động viên thuộc đội I đạt huy chương vàng. $P(B|A) = 0,75$.

$P(B|\bar{A})$ là xác suất để vận động viên thuộc đội II đạt huy chương vàng. $P(B|\bar{A}) = 0,6$.

Theo công thức Bayes ta có

$$P(A|B) = \frac{P(A).P(B|A)}{P(A).P(B|A) + P(\bar{A}).P(B|\bar{A})} = \frac{\frac{6}{14}.0,75}{\frac{6}{14}.0,75 + \frac{8}{14}.0,6} \approx 0,4839$$

Câu 9: Có 10 lọ hóa chất trong đó có 4 lọ loại I, 6 lọ loại II. Nếu dùng lọ loại I thì kết quả tốt với xác suất 0,9, nếu dùng lọ loại II thì kết quả tốt với xác suất 0,5. Tìm xác suất để lọ hóa chất tốt này thuộc loại I.

Lời giải

Gọi B_1 là biến cố: "Lấy được lọ hóa chất loại I", B_2 là biến cố: "Lấy được lọ hóa chất loại II", A là biến cố: "Lấy được lọ hóa chất có kết quả tốt".

$$\text{Ta có: } P(B_1) = \frac{4}{10}; P(B_2) = \frac{6}{10}; P(A|B_1) = 0,9; P(A|B_2) = 0,5$$

Theo công thức xác suất đầy đủ

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) = \frac{4}{10} \times 0,9 + \frac{6}{10} \times 0,5 = 0,66$$

Khi đó ta cần tính xác suất $P(B_1|A)$, theo công thức Bayes

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{10} \times 0,9}{0,66} = \frac{6}{11} \approx 0,55.$$

Câu 10: Có hai hộp đựng bi. Hộp thứ nhất có 2 viên bi màu xanh, 5 viên bi màu đỏ, hộp thứ hai có 3 viên bi màu xanh, 2 viên bi màu đỏ. Chọn ngẫu nhiên một hộp, từ đó lấy ngẫu nhiên ra một viên bi.

a) Tính xác suất lấy được viên bi màu đỏ.

b) Giả sử đã lấy được viên bi màu đỏ. Tính xác suất để viên bi đỏ lấy ra là từ hộp thứ hai.

Lời giải

a)

Gọi A là biến cố: "Lấy được viên bi màu đỏ"

Gọi H_i là biến cố: "Lấy được hộp thứ i ($i = 1; 2$)"

$$\text{Nhận xét } P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|H_1) = \frac{5}{7}; P(A|H_2) = \frac{2}{5}$$

Áp dụng xác suất toàn phần ta có xác suất lấy được viên bi màu đỏ là

$$P(A) = P(H_1).P(A|H_1) + P(H_2).P(A|H_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{39}{70} \approx 0,56.$$



b)

Theo công thức Bayes ta có
$$P(H_2 | A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A | H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{39}{70}} = \frac{14}{39} \approx 0,36.$$

Vậy xác suất để viên bi đỏ lấy ra là từ hộp thứ hai là 0,36.

Câu 11: Lớp 10A có tỉ lệ học sinh học giỏi môn Toán là 20%. Tỉ lệ học sinh học giỏi môn Anh Văn trong số học sinh học giỏi môn Toán là 70%, trong số học sinh không giỏi môn Toán là 15%. Chọn ngẫu nhiên một học sinh lớp 10A tham dự trại hè toàn quốc tại Nha Trang.

a) Tính xác suất học sinh được chọn giỏi môn Anh Văn.

b) Tính xác suất học sinh được chọn học giỏi môn Toán biết rằng học sinh đó giỏi môn Anh Văn.

Lời giải

a)

Gọi A là biến cố: “Học sinh học giỏi môn Toán” suy ra

$\bar{A}$ là biến cố: “Học sinh không học giỏi môn Toán”

Gọi B là biến cố: “Học sinh học giỏi môn Anh Văn”

Để học sinh được chọn là học sinh giỏi môn Toán thì học sinh đó hoặc giỏi môn Anh Văn hoặc không giỏi môn Anh Văn.

Ta có $P(A) = 0,2 \Rightarrow P(\bar{A}) = 0,8$

$P(B | A) = 0,7$

$P(B | \bar{A}) = 0,15$

Vậy $P(B) = P(A) \cdot P(B | A) + P(\bar{A}) \cdot P(B | \bar{A}) = 0,2 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,15 = 0,26$

Xác suất học sinh được chọn giỏi môn Anh Văn là 0,26.

b)

Xác suất học sinh được chọn học giỏi môn Toán biết rằng học sinh đó giỏi môn Anh Văn là $P(A | B)$

theo công thức Bayes ta có
$$P(A | B) = \frac{P(A) \cdot P(B | A)}{P(B)} = \frac{0,2 \cdot 0,7}{0,26} = \frac{7}{13} \approx 0,54.$$



DẠNG 4. CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN.

Phương pháp

» **Công thức xác suất toàn phần:** Cho hai biến cố A và B với $0 < P(B) < 1$. Khi đó:

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$

▪ **Chú ý:** Công thức xác suất toàn phần cũng đúng với biến cố B bất kì.

Câu 12: Người ta khảo sát khả năng chơi nhạc cụ của một nhóm học sinh nam nữ tại một trường phổ thông H. Xét phép thử chọn ngẫu nhiên 1 học sinh trong nhóm đó.
gọi A là biến cố “học sinh được chọn biết chơi ít nhất một nhạc cụ”,
và B là biến cố “học sinh được chọn là nam”.
Biết xác suất học sinh được chọn là nam bằng 0,6; xác suất học sinh được chọn là nam và biết chơi ít nhất một nhạc cụ là 0,3; xác suất học sinh được chọn là nữ và biết chơi ít nhất một nhạc cụ là 0,15. Tính $P(A)$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $P(B) = 0,6 \Rightarrow P(\bar{B}) = 1 - 0,6 = 0,4$; $P(A|B) = 0,3$; $P(A|\bar{B}) = 0,15$.

Theo công thức xác suất từng phần, ta có:

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}) = 0,6 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,15 = 0,24.$$

Câu 13: Trong một trường học, tỉ lệ học sinh nữ là 53%. Tỉ lệ học sinh nữ và tỉ lệ học sinh nam tham gia câu lạc bộ nghệ thuật X lần lượt là 21% và 17%. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh của trường. Tính xác suất học sinh đó có tham gia câu lạc bộ nghệ thuật X.

Lời giải

Gọi A : “Học sinh được chọn là nữ”,

$\Rightarrow \bar{A}$: “Học sinh được chọn là nam”;

B : “học sinh được chọn có tham gia câu lạc bộ nghệ thuật X”.

Từ giả thiết ta có $P(A) = 0,53 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - 0,53 = 0,47$; $P(B|A) = 0,21$; $P(B|\bar{A}) = 0,17$.

Theo công thức xác suất từng phần, ta có xác suất học sinh được chọn có tham gia câu lạc bộ nghệ thuật X là:

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = 0,53 \cdot 0,21 + 0,47 \cdot 0,17 = 0,1912.$$

Câu 14: Tan giờ học buổi chiều một sinh viên có 60% về nhà ngay, nhưng do giờ cao điểm nên có 30% ngày (số ngày về nhà ngay) bị tắc đường nên bị về nhà muộn. Còn 20% số ngày sinh viên đó vào quán Internet để chơi game, những ngày này xác suất về muộn là 80%. Còn lại những ngày khác sinh viên đó đi chơi với bạn bè và những ngày này có xác suất về muộn là 90%. Xác suất sinh viên đó về muộn là bao nhiêu?

Giải

Gọi biến cố A : “sinh viên đó đi học về muộn”.

Biến cố B_1 : “sinh viên đó tan học về nhà ngay”.

Biến cố B_2 : “sinh viên đó tan học đi chơi game”.



Biến cố B_3 : “sinh viên đó tan học đi chơi với bạn bè”.

Ta có: $P(B_1) = 0,6; P(A|B_1) = 0,3;$

$P(B_2) = 0,2; P(A|B_2) = 0,8;$

$P(B_3) = 0,2; P(A|B_3) = 0,9.$

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có

$$P(A) = P(B_1).P(A|B_1) + P(B_2).P(A|B_2) + P(B_3).P(A|B_3) \\ = 0,6.0,3 + 0,2.0,8 + 0,2.0,9 = 0,52.$$

Câu 15: Có hai cái hộp. Hộp thứ nhất có 4 bi trắng và 5 bi đen. Hộp thứ hai có 5 bi trắng và 4 bi đen. Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi ở hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai rồi sau đó chọn ngẫu nhiên 1 viên bi ở hộp thứ hai. Khi đó xác suất để lấy được bi trắng là bao nhiêu?

Giải

Gọi biến cố B_k : “lấy ra được k viên bi trắng từ hộp thứ nhất” trong đó $k = 0, 1, 2, 3$.

Biến cố A : “lấy được viên bi trắng từ hộp thứ hai”. Khi đó:

Xác suất lấy ra được 0 viên bi trắng từ hộp thứ nhất là $P(B_0) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{5}{42}.$

Xác suất lấy ra được 1 viên bi trắng từ hộp thứ nhất là $P(B_1) = \frac{C_4^1 C_5^2}{C_9^3} = \frac{10}{21}.$

Xác suất lấy ra được 2 viên bi trắng từ hộp thứ nhất là $P(B_2) = \frac{C_4^2 C_5^1}{C_9^3} = \frac{5}{14}.$

Xác suất lấy ra được 3 viên bi trắng từ hộp thứ nhất là $P(B_3) = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{1}{21}.$

Xác suất lấy được 1 bi trắng từ hộp thứ hai với điều kiện lấy được 0 bi trắng từ hộp thứ nhất là

$P(A|B_0) = \frac{5}{12}.$

Xác suất lấy được 1 bi trắng từ hộp thứ hai với điều kiện lấy được 1 bi trắng từ hộp thứ nhất là

$P(A|B_1) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$

Xác suất lấy được 1 bi trắng từ hộp thứ hai với điều kiện lấy được 2 bi trắng từ hộp thứ nhất là

$P(A|B_2) = \frac{7}{12}.$

Xác suất lấy được 1 bi trắng từ hộp thứ hai với điều kiện lấy được 3 bi trắng từ hộp thứ nhất là

$P(A|B_3) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có

$$P(A) = P(B_0).P(A|B_0) + P(B_1).P(A|B_1) + P(B_2).P(A|B_2) + P(B_3).P(A|B_3) \\ = \frac{5}{42} \cdot \frac{5}{12} + \frac{10}{21} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{14} \cdot \frac{7}{12} + \frac{1}{21} \cdot \frac{2}{3} = \frac{19}{36}.$$

Vậy xác suất để lấy được bi trắng từ hộp thứ hai theo đề bài trên là $\frac{19}{36}.$



DẠNG 5. CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN CÔNG THỨC BAYES.

Phương pháp

Công thức Bayes: Giả sử A và B là hai biến cố ngẫu nhiên thoả mãn $P(A) > 0$ và $0 < P(B) < 1$. Khi đó

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})}$$

• **Chú ý:** Với $P(A) > 0$, $P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}$ cũng được gọi là công thức Bayes.

Công thức xác suất toàn phần và Công thức Bayes được áp dụng trong các trường hợp sự việc bài toán đề cập đến gồm nhiều giai đoạn có sự liên đới nhau trong quá trình xảy ra. Khi áp dụng giải toán, biến cố cần tìm xác suất chi phối bởi hệ đầy đủ biến cố trước đó. Vì vậy, để giải toán xác suất này ta cần:

- Phân tích kỹ đề bài, linh hoạt liên tưởng vào thực tế.
- Xác định nhóm biến cố đầy đủ ở giai đoạn đầu của sự việc mà bài toán đã đưa ra.
- Gọi tên biến cố xảy ra ở giai đoạn sau liên quan đến nhóm biến cố đầy đủ được xác định trước đó.
- Xác định xác suất của từng biến cố ở hệ đầy đủ, các xác suất có điều kiện của biến cố ở giai đoạn sau với từng biến cố trong hệ đầy đủ.
- Nếu biết biến cố xảy ra trong giai đoạn sau, để xác định xác suất của một biến cố nào đó ở giai đoạn trước liên quan đến biến cố ở giai đoạn sau như thế nào ta sử dụng công thức Bayes.

Câu 16: Một hộp có 4 viên bi, mỗi viên có thể là màu đen hoặc trắng. Lấy ngẫu nhiên ra 2 viên bi. Tính xác suất để lấy được 2 bi trắng.

Lời giải

* Số lượng bi trắng và đen trong hộp chỉ có thể xảy ra 1 trong 5 trường hợp sau:

$$H_4 : 4 \text{ bi trắng} \Rightarrow P(H_4) = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$H_3 : 3 \text{ bi trắng, 1 đen} \Rightarrow P(H_3) = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$H_2 : 2 \text{ bi trắng, 2 đen} \Rightarrow P(H_2) = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$H_1 : 1 \text{ bi trắng, 3 đen} \Rightarrow P(H_1) = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$H_0 : 0 \text{ bi trắng, 4 đen} \Rightarrow P(H_0) = \frac{1}{5} = 0.2$$

Gọi biến cố A là biến cố lấy được 2 bi trắng.

$$P(A|H_4) = 1, P(A|H_3) = \frac{C_3^2}{C_4^2} = \frac{1}{2}, P(A|H_2) = \frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{6}, P(A|H_1) = 0, P(A|H_0) = 0$$



$$P(A) = P(H_0).P(A|H_0) + P(H_1).P(A|H_1) + P(H_2).P(A|H_2) + P(H_3).P(A|H_3) + P(H_4).P(A|H_4)$$

$$\Leftrightarrow P(A) = 0.2 \times 0 + 0.2 \times 0 + 0.2 \times \frac{1}{6} + 0.2 \times \frac{1}{2} + 0.2 \times 1 \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{3}.$$

Câu 17: Một căn bệnh có 1% dân số mắc phải. Một phương pháp chuẩn đoán được phát triển có tỷ lệ chính xác là 99%. Với những người bị bệnh, phương pháp này sẽ đưa ra kết quả dương tính 99% số trường hợp. Với người không mắc bệnh, phương pháp này cũng chuẩn đoán đúng 99 trong 100 trường hợp. Nếu một người kiểm tra và kết quả là dương tính (bị bệnh), xác suất để người đó thực sự bị bệnh là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi A : “người đó mắc bệnh”

Và B : “kết quả kiểm tra người đó là dương tính (bị bệnh)”

Xác suất để người đó mắc bệnh khi chưa kiểm tra: $P(A) = 1\% = 0,01$.

Do đó xác suất để người đó không mắc bệnh khi chưa kiểm tra: $P(\bar{A}) = 1 - 0,01 = 0,99$.

Xác suất kết quả dương tính nếu người đó mắc bệnh là: $P(B|A) = 99\% = 0,99$.

Xác suất kết quả dương tính nếu người đó không mắc bệnh là: $P(B|\bar{A}) = 1 - 0,99 = 0,01$

$$P(A|B) = \frac{P(A).P(B|A)}{P(A).P(B|A) + P(\bar{A}).P(B|\bar{A})} = \frac{0,01.0,99}{0,01.0,99 + 0,99.0,01} = 0,5.$$

Xác suất kết để người đó mắc bệnh nếu kết quả kiểm tra người đó là dương tính là 0,5

Câu 18: Giả sử tỉ lệ người dân của tỉnh X nghiện thuốc lá là 20%; tỉ lệ người bị bệnh phổi trong số người nghiện thuốc lá là 70%, trong số người không nghiện thuốc lá là 15%.

a) Hỏi khi ta gặp ngẫu nhiên một người dân của tỉnh X thì khả năng mà đó bị bệnh phổi là bao nhiêu %?

b) Tính xác suất mà người đó là nghiện huốc lá khi biết bị bệnh phổi.

Lời giải

a) Hỏi khi ta gặp ngẫu nhiên một người dân của tỉnh X thì khả năng mà đó bị bệnh phổi là bao nhiêu %?

Gọi A : “người nghiện thuốc lá”,

$\Rightarrow \bar{A}$: “người không nghiện thuốc lá”

và B : “người bị bệnh phổi”

Để người mà ta gặp bị bệnh phổi thì người đó nghiện thuốc lá hoặc không nghiện thuốc lá

Ta cần tính $P(B)$

$$\text{Với } P(B) = P(A).P(B|A) + P(\bar{A}).P(B|\bar{A})$$

Ta có

$$P(A) = 0,2 \Rightarrow P(\bar{A}) = 0,8$$

$$P(B|A) = 0,7$$

$$P(B|\bar{A}) = 0,15$$

$$\text{Vậy } P(B) = P(A).P(B|A) + P(\bar{A}).P(B|\bar{A}) = 0,2.0,7 + 0,8.0,15 = 0,26$$

Do đó, tỉ lệ người mắc bệnh phổi của tỉnh X là 26%



b) Tính xác suất mà người đó là nghiện huốc lá khi biết bị bệnh phổi.

xác suất mà người đó là nghiện huốc lá khi biết bị bệnh phổi là $P(A|B)$

Theo công thức Bayes, ta có
$$P(A|B) = \frac{P(A).P(B|A)}{P(B)} = \frac{0,2.0,7}{0,26} = \frac{7}{13}$$

Như vậy trong số người bị bệnh phổi của tỉnh X, có khoảng $\frac{7}{13}$ số người nghiện thuốc lá.

Câu 19: Một trạm chỉ phát hai tín hiệu A và B với xác suất tương ứng 0,85 và 0,15. do có nhiễu trên đường truyền nên $\frac{1}{7}$ tín hiệu A bị méo và thu được như tín hiệu B còn $\frac{1}{8}$ tín hiệu B bị méo cả thu được như A .

a) Xác suất thu được tín hiệu A là bao nhiêu?

b) Giả sử đã thu được tín hiệu A . Tìm xác suất thu được đúng tín hiệu lúc phát.

Lời giải

a) Xác suất thu được tín hiệu A là bao nhiêu?

Gọi A là biến cố “Phát tín hiệu A ”

B là biến cố “Phát tín hiệu A ”

T_A là biến cố “Phát được tín hiệu A ”

T_B là biến cố “Phát được tín hiệu B ”

Ta cần tính $P(T_A)$

Với
$$P(T_A) = P(A).P(T_A|A) + P(B).P(T_A|B)$$

Ta có

$$P(A) = 0,85$$

$$P(T_B|A) = \frac{1}{7} \Rightarrow P(T_A|A) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

$$P(B) = 0,15$$

$$P(T_A|B) = \frac{1}{8}$$

Do đó
$$P(T_A) = P(A).P(T_A|A) + P(B).P(T_A|B) = 0,85 \cdot \frac{6}{7} + 0,15 \cdot \frac{1}{8} = \frac{837}{1120}$$

b) Giả sử đã thu được tín hiệu A . Tìm xác suất thu được đúng tín hiệu lúc phát.

Theo công thức Bayes, ta có
$$P(A|T_A) = \frac{P(A).P(T_A|A)}{P(T_A)} = \frac{0,85 \cdot \frac{6}{7}}{\frac{837}{1120}} = \frac{272}{279}$$

Câu 20: Một nhà máy sản xuất điện thoại có hai dây chuyền sản xuất I và II. Sản phẩm điện thoại di động được sản xuất của dây chuyền I chiếm 70% còn điện thoại di động được sản xuất dây chuyền II chiếm 30% tổng sản phẩm của công ty. Tỷ lệ sản phẩm bị lỗi của dây chuyền I chiếm 2% còn của dây chuyền II chiếm 3% tổng sản phẩm công ty. Giả sử một chiếc điện thoại di động ngẫu nhiên được kiểm tra và phát hiện bị lỗi. Tính xác suất chiếc điện thoại này được sản xuất bởi dây chuyền I.



Lời giải

Gọi A là biến cố: “Sản phẩm bị lỗi”.

B là biến cố: “Điện thoại được chọn do dây chuyền I sản xuất”.

Suy ra $\bar{B}$ là biến cố: “Điện thoại được chọn do dây chuyền II sản xuất”.

Ta có $P(B) = 0,7$ và $P(\bar{B}) = 1 - 0,7 = 0,3$;

$P(A|B) = 0,02$ và $P(A|\bar{B}) = 0,03$.

Khi đó xác suất để điện thoại được chọn ra bị lỗi là:

$$P(A) = P(B).P(A|B) + P(\bar{B}).P(A|\bar{B}) = 0,7.0,02 + 0,3.0,03 = 0,023.$$

Do điện thoại lấy ra bị lỗi nên xác suất điện thoại đó do dây chuyền I sản xuất là:

$$P(B|A) = \frac{P(B).P(A|B)}{P(A)} = \frac{0,7.0,02}{0,023} = \frac{14}{23}.$$

Vậy xác suất một chiếc điện thoại bị lỗi được sản xuất bởi dây chuyền I là khoảng 60,87%.

Câu 21: Một nông trại trồng hai loại cây: cây Ngô và cây Đậu. Có 60% diện tích trồng cây của nông trại là cây Ngô và 40% diện tích là trồng cây Đậu. Tỷ lệ cây Ngô bị sâu bệnh là 15% còn tỷ lệ cây Đậu bị sâu bệnh là 10%. Giả sử một cây được kiểm tra và phát hiện bị sâu bệnh. Tính xác suất cây đó là cây Ngô.

Lời giải

Gọi A là biến cố: “Cây bị sâu bệnh”.

B là biến cố: “Cây được kiểm tra là cây Ngô”.

Suy ra $\bar{B}$ là biến cố: “Cây được kiểm tra là cây Đậu”.

Ta có $P(B) = 0,6$ và $P(\bar{B}) = 1 - 0,6 = 0,4$;

$P(A|B) = 0,15$ và $P(A|\bar{B}) = 0,1$.

Khi đó xác suất để cây được kiểm tra bị sâu bệnh là:

$$P(A) = P(B).P(A|B) + P(\bar{B}).P(A|\bar{B}) = 0,6.0,15 + 0,4.0,1 = 0,13.$$

Do cây bị kiểm tra bị sâu bệnh nên xác suất để cây được kiểm tra là cây Ngô là:

$$P(B|A) = \frac{P(B).P(A|B)}{P(A)} = \frac{0,6.0,15}{0,13} = \frac{9}{13}.$$

Vậy xác suất để cây được kiểm tra và phát hiện bị sâu bệnh là cây Ngô khoảng 69,23%.

Câu 22: Có hai đội thi đấu môn Bắn súng. Đội I có 5 vận động viên, đội II có 7 vận động viên. Xác suất đạt huy chương vàng của mỗi vận động viên đội I, đội II tương ứng là 0,65 và 0,55. Chọn ngẫu nhiên một vận động viên.

a) Tính xác suất để vận động viên này đạt huy chương vàng;

b) Giả sử vận động viên được chọn đạt huy chương vàng. Tính xác suất để vận động viên này thuộc đội I.

Lời giải

a) Gọi A là biến cố: “vận động viên thuộc đội I”; B là biến cố: “vận động viên thuộc đội II”; E là biến cố: “vận động viên đạt HCV”.

Ta có $B = \bar{A}$ và $P(A) = \frac{5}{12}$, $P(\bar{A}) = P(B) = \frac{7}{12}$

Theo công thức xác suất toàn phần ta có



$$P(E) = P(A)P(E|A) + P(\bar{A})P(E|\bar{A}),$$

Mà +) $P(E|A)$ là xác suất để VĐV thuộc đội I đoạt HCV. Theo bài ra ta có $P(E|A) = 0,65$.

+) $P(E|\bar{A})$ là xác suất để VĐV thuộc đội II đoạt HCV. Theo bài ra ta có $P(E|\bar{A}) = 0,55$

Thay vào ta được $P(E) = \frac{5}{12} \cdot 0,65 + \frac{7}{12} \cdot 0,55 \approx 0,5917$

b) Theo công thức Bayes và ý a) ta có

$$P(A|E) = \frac{P(A)P(E|A)}{P(E)} \approx \frac{\frac{5}{12} \cdot 0,65}{0,5917} \approx 0,4577.$$

Câu 23: Một bộ lọc được sử dụng để chặn thư rác trong các tài khoản thư điện tử. Tuy nhiên, vì bộ lọc không tuyệt đối hoàn hảo nên một thư rác bị chặn với xác suất 0,95 và một thư đúng (không phải là thư rác) bị chặn với xác suất 0,01. Thống kê cho thấy tỉ lệ thư rác là 3%.

a) Chọn ngẫu nhiên một thư bị chặn. Tính xác suất để đó là thư rác.

b) Chọn ngẫu nhiên một thư không bị chặn. Tính xác suất để thư đó là thư đúng.

c) Trong số các thư bị chặn, có bao nhiêu phần trăm là thư đúng? Trong số các thư không bị chặn, có bao nhiêu phần trăm là thư rác?

Lời giải

a) Gọi A là biến cố: “Thư đó là thư rác”; B là biến cố: “Thư đó là bị chặn”.

Ta có $P(A) = 0,03$; $P(\bar{A}) = 0,97$; $P(B|A) = 0,95$; $P(B|\bar{A}) = 0,01$.

Theo công thức Bayes cho ta có

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} = \frac{0,03 \cdot 0,95}{0,03 \cdot 0,95 + 0,97 \cdot 0,01} \approx 0,746.$$

b) Ta phải tính $P(\bar{A}|\bar{B})$.

Ta có $P(B|\bar{A}) = 0,01 \Rightarrow P(\bar{B}|\bar{A}) = 0,99$; $P(B|A) = 0,95 \Rightarrow P(\bar{B}|A) = 0,05$.

Công thức Bayes cho ta

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A})}{P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A}) + P(A)P(\bar{B}|A)} = \frac{0,97 \cdot 0,99}{0,97 \cdot 0,99 + 0,03 \cdot 0,05} \approx 0,998.$$

c) +) Từ câu a, ta thấy xác suất một thư là thư rác nếu biết rằng thư đó bị chặn là 0,746. Nghĩa là trong số các thư bị chặn có khoảng 74,6% thư rác. Vậy trong số các thư bị chặn có $100\% - 74,6\% = 25,4\%$ là thư đúng.

+) Từ câu b, ta thấy xác suất để đó là thư đúng nếu biết rằng thư đó không bị chặn là 0,998. Nghĩa là trong số các thư không bị chặn có khoảng 99,8% thư đúng. Vậy trong số các thư không bị chặn có $100\% - 99,8\% = 0,2\%$ là thư rác.

Câu 24: Một hộp có 60 viên bi màu xanh và 40 viên bi màu đỏ; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Sau khi thống kê, người ta thấy: có 50% số viên bi màu xanh có dán nhãn và 75% số viên bi màu đỏ có dán nhãn; những viên bi còn lại không dán nhãn.

a) chọn số thích hợp điền vào ô trống trong bảng sau (đơn vị: viên bi)



Dán nhãn		
Màu bi	Có dán nhãn	Không dán nhãn
Đỏ		
Xanh		

b) Lấy ra ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Xét hai biến cố sau:

A: “Viên bi được chọn ra có dán nhãn”

B: “Viên bi được chọn ra có màu đỏ”

Sử dụng công thức xác suất toàn phần, tính xác suất để viên bi được lấy ra có dán nhãn.

Lời giải

a) Số viên bi màu đỏ có dán nhãn là $75\% \cdot 40 = 30$ (viên bi).

Số viên bi màu xanh có dán nhãn là $50\% \cdot 60 = 30$ (viên bi).

Ta có bảng sau:

Dán nhãn		
Màu bi	Có dán nhãn	Không dán nhãn
Đỏ	30	10
Xanh	30	30

b) Ta có:

$$P(B) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}; \quad P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5};$$

$$P(A|B) = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}; \quad P(A|\bar{B}) = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}.$$

Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{5}.$$

Vậy xác suất để viên bi được lấy ra có dán nhãn bằng $\frac{3}{5}$.

Câu 25: Năm 2001, Cộng đồng châu Âu có làm một đợt kiểm tra rất rộng rãi các con bò để phát hiện những con bò bị bệnh bò điên. Không có xét nghiệm nào cho kết quả chính xác 100%. Một loại xét nghiệm, mà ở đây ta gọi là xét nghiệm X, cho kết quả như sau: Khi con bò bị bệnh bò điên thì xác suất để có phản ứng dương tính trong xét nghiệm X là 70%, còn khi con bò không bị bệnh thì xác suất để có phản ứng dương tính trong xét nghiệm X là 10%. Biết rằng tỉ lệ bò bị



mắc bệnh bò điên ở Hà Lan là 13 con trên 1000 000 con. Khi một con bò ở Hà Lan có phản ứng dương tính với xét nghiệm X thì xác suất để nó bị mắc bệnh bò điên là:

Lời giải

Xét các biến cố:

A : “Con bò ở Hà Lan bị bệnh bò điên”;

B : “Con bò ở Hà Lan có phản ứng dương tính với xét nghiệm X”.

Theo giả thiết, ta có: $P(A) = 0,000013$; $P(B|A) = 0,7$; $P(B|\bar{A}) = 0,1$.

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(B) = P(A).P(B|A) + P(\bar{A}).P(B|\bar{A}) = 0,000013.0,7 + (1 - 0,000013).0,1 = 0,1000078.$$

Theo công thức Bayes, ta có: $P(A|B) = \frac{P(A).P(B|A)}{P(B)} = \frac{0,000013.0,7}{0,1000078} = \frac{91}{1000078}$.

Vậy xác suất để một con bò Hà Lan bị bệnh bò điên nếu nó phản ứng dương tính với xét nghiệm

A là $\frac{91}{1000078}$.

