

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

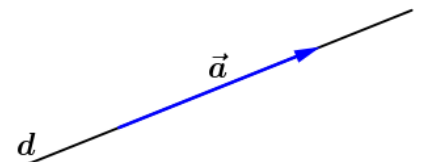
1

Vectơ trong không gian

Định nghĩa: Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng. Độ dài của vectơ trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:

- Vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$
- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$
- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$
- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ đó (Hình 1).



Hình 1. Đường thẳng d là giá của vectơ $\vec{a}$

Tương tự như trường hợp của vectơ trong mặt phẳng, ta có các khái niệm sau đối với vectơ trong không gian:

- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, ta có tính chất và các quy ước sau đối với vectơ trong không gian:

- Trong không gian, với mỗi điểm O và vectơ $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$
- Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \dots$ gọi là các vectơ-không.
- Ta quy ước vectơ không có độ dài là 0, cùng hướng (và vì vậy cùng phương) với mọi vectơ.
- Do đó, các vectơ không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.

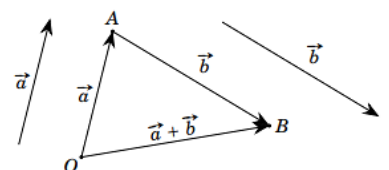
2

Tổng và hiệu của hai vectơ trong không gian

a) Tổng của hai vectơ trong không gian

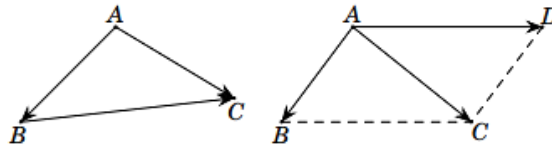
Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm O bất kì và các điểm A, B sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và

$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó, vectơ $\overrightarrow{AB}$ được gọi là **tổng của hai vectơ** $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ký hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.

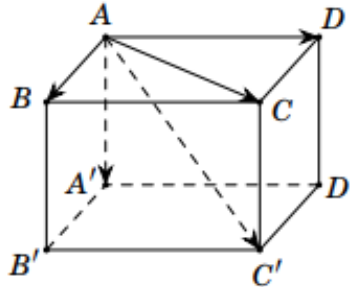


Trong không gian, phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là **phép cộng vectơ**.

Nhận xét: Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành trong mặt phẳng vẫn đúng trong không gian:



- **Quy tắc ba điểm:** Nếu A, B, C là ba điểm bất kì thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- **Quy tắc hình bình hành:** Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$



- **Quy tắc hình hộp chữ nhật:** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.
Hệ thức tương tự: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$

Chú ý: Tương tự như phép cộng vector trong mặt phẳng, phép cộng vector trong không gian có các tính chất sau:

- **Tính chất giao hoán:** Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vector bất kì thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- **Tính chất kết hợp:** Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ là ba vector bất kì thì $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- **Tính chất cộng với vector $\vec{0}$:** Nếu $\vec{a}$ là một vector bất kì thì $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Từ tính chất kết hợp của phép cộng vector trong không gian, ta có thể viết tổng của ba vector $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ là $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ mà không cần sử dụng các dấu ngoặc. Tương tự đối với tổng của nhiều vector trong không gian.

b) Hiệu của hai vector trong không gian

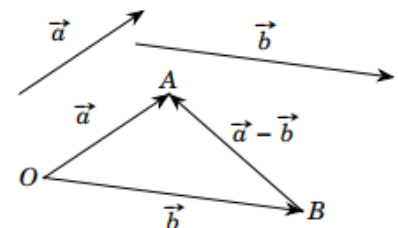
Vector đối: Trong không gian, vector có cùng độ dài và ngược hướng với vector $\vec{a}$ được gọi là vector đối của vector $\vec{a}$

- Vector đối của $\vec{a}$ kí hiệu là $-\vec{a}$
- Vector đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$, nghĩa là $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ (dùng để làm mất dấu trừ trước vector)
- Vector $\vec{0}$ được coi là vector đối của chính nó

Định nghĩa: Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$. Ta gọi $\vec{a} + (-\vec{b})$ là hiệu của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$. Phép lấy hiệu của hai vector được gọi là phép trừ vector.

Nhận xét:

- Với ba điểm O, A, B bất kì trong không gian thì ta có $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.
- Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đối nhau thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$



3 Tích của một số với một vector trong không gian

Trong không gian, tích của một số thực $k \neq 0$ với một vector $\vec{a} \neq \vec{0}$ là một vector, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

Tư vấn hướng nghiệp cho học sinh bằng phân tích nhân tướng học – xem chỉ tay – tử vi

- Cùng hướng với vector $\vec{a}$ nếu $k > 0$; ngược hướng với vector $\vec{a}$ nếu $k < 0$
- Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

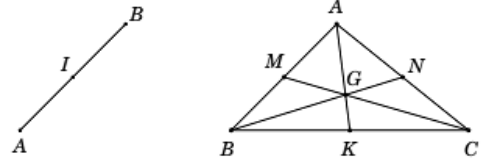
Phép lấy tích của một số với một vector được gọi là **phép nhân một số với một vector**.

Chú ý: Quy ước $k\vec{a} = \vec{0}$ nếu $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

- Nếu $k\vec{a} = \vec{0}$ thì $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.
- Trong không gian, điều kiện cần và đủ để hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là có một số thực k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

Hệ thức trung điểm, trọng tâm:

- Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$; $\vec{IA} = -\vec{IB}$; $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$;...
- Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$; $\vec{GA} = -\frac{2}{3}\vec{AK}$; $\vec{GA} = -2\vec{GK}$;...



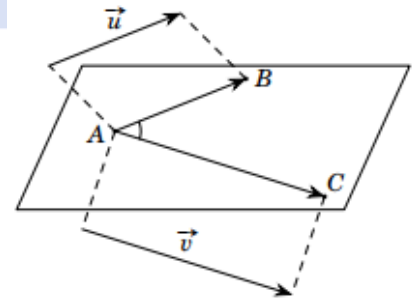
Nhận xét:

- Với hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kỳ, với mọi số h và k , ta luôn có:
 - $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$
 - $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$
 - $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$
 - $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
 - $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$
 - $k \cdot \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = \vec{0} \\ k = 0 \end{cases}$
- Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$
- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số $k \neq 0$ sao cho $\vec{AB} = k\vec{AC}$

4 Tích vô hướng của hai vector trong không gian

Góc giữa hai vector

Trong không gian, cho hai vector $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kỳ và gọi B, C là hai điểm sao cho $\vec{AB} = \vec{u}, \vec{AC} = \vec{v}$. Khi đó, góc $\widehat{BAC}$ ($0^\circ \leq \widehat{BAC} \leq 180^\circ$) được gọi là góc giữa hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$.



- Nếu $\vec{u}$ cùng hướng với $\vec{v}$ thì $(\vec{u}, \vec{v}) = 0^\circ$; ngược hướng thì $(\vec{u}, \vec{v}) = 180^\circ$; vuông góc thì $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$

Định nghĩa tích vô hướng của hai vector: Trong không gian, cho hai vector $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u} \cdot \vec{v}$, được xác định bởi công thức: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

- Trong trường hợp $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$ ta quy ước $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$; $\vec{u}^2 \geq 0$; $\vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
- Với hai vector $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$
- Với hai vector $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Tính chất: Với ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ và số thực k ta có:

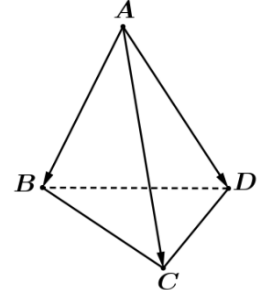
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$

Dạng 1: Xác định vectơ, chứng minh đẳng thức vectơ, độ dài vectơ

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1

- Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện
- Trong các vectơ tìm được ở câu a, những vectơ nào có giá nằm trong mặt phẳng (ABC)
- Tính độ dài của các vectơ tìm được ở câu a.

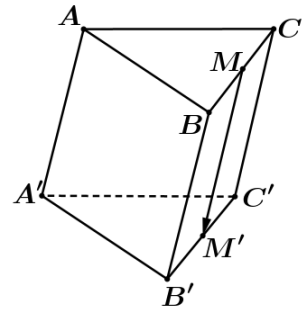


Lời giải

- Có ba vectơ là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$.
- Trong ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$ chỉ có hai vectơ là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ có giá nằm trong mặt phẳng (ABC) .
- Vì tứ diện $ABCD$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 nên $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = 1$.

Bài tập 2: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- Trong ba vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ thì vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$? Giải thích vì sao.
- Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$.



Lời giải

- Hai đường thẳng AA' và BC chéo nhau nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương.

Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$ không bằng nhau.

Tứ giác $ACC'A'$ là hình bình hành nên $AA' \parallel CC'$ và $AA' = CC'$.

Hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{CC'}$ có cùng độ dài và cùng hướng nên hai vectơ đó bằng nhau.

Tương tự, hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ không bằng nhau.

- Gọi M' là trung điểm của cạnh $B'C'$. Vì tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành nên $MM' \parallel BB'$ và $MM' = BB'$.

Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' \parallel BB'$ và $AA' = BB'$, suy ra $MM' \parallel AA'$ và $MM' = AA'$.

Hai vectơ $\overrightarrow{MM'}$ và $\overrightarrow{AA'}$ có cùng độ dài và cùng hướng nên $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$.

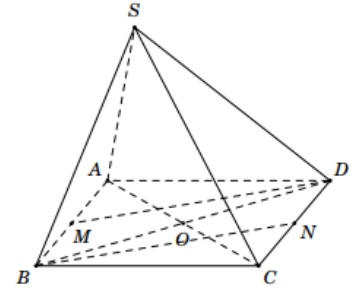
Vậy trung điểm của cạnh $B'C'$ là điểm M' cần tìm.

Bài tập 3: Cho hình lăng trụ $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, O lần lượt là trung điểm AB, CD và AC . Chứng minh rằng:

a) Hai vector $\overrightarrow{BM}$ và $\overrightarrow{DN}$ đối nhau

b) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$

c) $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{SC}$



Lời giải

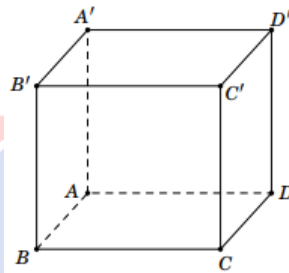
a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $AB = CD$ và AB song song với $CD \Rightarrow BM = DN$

Suy ra $BM \parallel DN$ nên tứ giác là hình bình hành. Hai vector $\overrightarrow{BM}$ và $\overrightarrow{DN}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên chúng đối nhau.

b) Ta có $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO}$; $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$ suy ra $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$

c) Từ câu a ta có $\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{DM}$ suy ra $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{SC}$

Bài tập 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'D'$



a) Tìm vector $\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'A'}$
 $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$

b) Chứng minh $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} +$

c) Chứng minh $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{B'D}$

d) Chứng minh $\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{C'B'} + \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{BD'}$

e) Chứng minh $\overrightarrow{A'C} = 3\overrightarrow{A'G}$

f) Tính độ dài $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{AA'}$

Lời giải

a) Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{CB}$

Suy ra $\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA'}$.

b) Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

Áp dụng quy tắc hình hộp suy ra $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$

c) Ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B'C'}$ và $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{B'A'}$ do đó $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{B'D}$

d) Ta có $\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{C'B'} - \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{BB'} - (\overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{C'B'}) = \overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{D'B'} = \overrightarrow{BB'} + (-\overrightarrow{D'B'})$

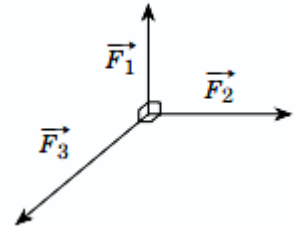
$$= \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BD}$$

e) Do G là trọng tâm tam giác $AB'D'$ nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GD'} = \vec{0}$. Khi đó theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{A'G} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{A'G} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{A'G} + \overrightarrow{GD'} = 3\overrightarrow{A'G}$

f) Ta có $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{A'D'} + \vec{AA'} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$. Suy ra $|\vec{u}| = AC = a\sqrt{3}$

Bài tập 5: Ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ cùng tác dụng vào một vật có phương đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn lần lượt là 2N, 3N và 4N.

- a) Tính độ lớn hợp hai lực $\vec{F}_2, \vec{F}_3$
b) Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho



Lời giải

a) Gọi O là vị trí trên vật mà ba lực cùng tác động vào. Gọi A, B, C là các điểm sao cho $\vec{F}_1 = \vec{OA}, \vec{F}_2 = \vec{OB}, \vec{F}_3 = \vec{OC}$. Khi đó $|\vec{F}_2 + \vec{F}_3| = OE = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\text{N}$

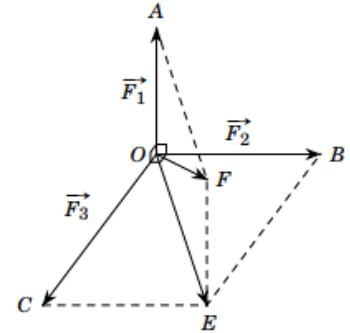
b) Dựng các hình chữ nhật $OBEC$ và $OEFA$ thì ta có

$$\begin{cases} \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OE} \\ \vec{OA} + \vec{OE} = \vec{OF} \end{cases}$$

Do đó $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OE} = \vec{OF}$

Vậy độ lớn hợp lực của cả ba lực là:

$$|\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3| = |\vec{OF}| = \sqrt{OA^2 + OE^2} = \sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}\text{N}.$$



Bài tập 6: Cho tứ diện $ABCD$ có AC và BD cùng vuông góc với AB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, CD . Chứng minh rằng:

- a) $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{BD})$ b) $\vec{MN} \cdot \vec{AB} = 0$

Lời giải

a) Ta có: $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AC} + \vec{CN}$ và $\vec{MN} = \vec{MB} + \vec{BD} + \vec{DN}$.

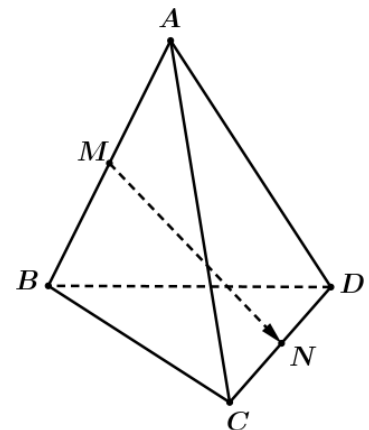
$$\text{Do đó } 2\vec{MN} = (\vec{MA} + \vec{MB}) + (\vec{AC} + \vec{BD}) + (\vec{CN} + \vec{DN}).$$

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD nên

$$\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{CN} + \vec{DN} = \vec{0}.$$

$$\text{Suy ra } 2\vec{MN} = \vec{AC} + \vec{BD}, \text{ hay } \vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{BD}).$$

b) Từ giả thiết, ta có $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = \vec{BD} \cdot \vec{AB} = 0$.



$$\text{Vì vậy } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Bài tập 6: Tính khoảng cách từ trọng tâm của một khối Rubik (đồng chất) hình tứ diện đều đến một mặt của nó, biết rằng chiều cao của khối Rubik là 8 cm.

Lời giải

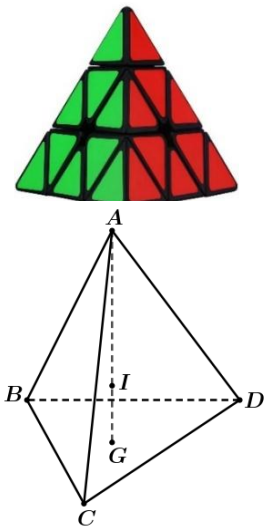
Giả sử khối Rubik (đồng chất) hình tứ diện đều được mô phỏng như hình vẽ.

Vì G là trọng tâm $DBCD$ nên I là trọng tâm của tứ diện.

Vì $ABCD$ là hình tứ diện đều nên $AG \perp (BCD)$ và $AG = 8 \text{ cm}$.

Mặt khác $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{IG}$ nên 3 điểm A, I, G thẳng hàng và $IG = \frac{1}{4} AG$.

Do đó $IG \perp (BCD) \Rightarrow d(I, (BCD)) = IG = \frac{1}{4} AG = 2 \text{ cm}$.



Bài tập 7: Ba sợi dây không giãn với khối lượng không đáng kể được buộc chung một đầu và được kéo căng về ba hướng khác nhau. Nếu các lực kéo làm cho ba sợi dây ở trạng thái đứng yên thì khi đó ba sợi dây nằm trên cùng một mặt phẳng. Hãy giải thích vì sao?

Lời giải

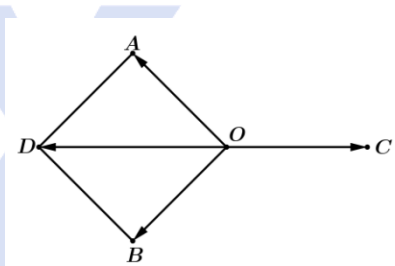
Giả sử lực kéo trên mỗi sợi dây được biểu diễn bởi các vector $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ với O là đầu chung của ba sợi dây. Khi ba sợi dây cân bằng thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

Vẽ hình bình hành $OADB$. Theo quy tắc hình bình hành thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$.

Do đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OD}$.

Hay O là trung điểm của CD . Do đó các điểm O, A, B, C cùng thuộc mặt phẳng $(ABCD)$.

Suy ra ba sợi dây cùng nằm trong mặt phẳng đó.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

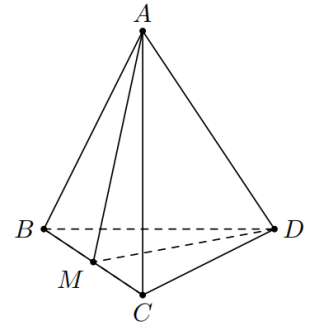
C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm của $CD \Rightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$.

$$\begin{aligned}\text{Mặt khác } \overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).\end{aligned}$$



Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của đoạn BC . Đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})$.

B. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} -$

$\vec{c})$.

C. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})$.

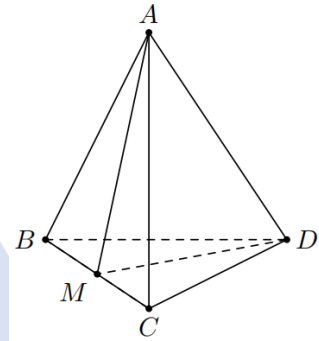
D. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} -$

$\vec{c})$.

Lời giải

Vì M là trung điểm của $BC \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

$$\begin{aligned}\text{Mặt khác } \overrightarrow{DM} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})\end{aligned}$$



Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b})$.

B. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c})$.

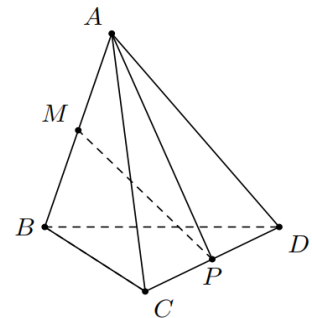
C. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d})$.

D. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$.

Lời giải

Vì M, P lần lượt là trung điểm của $AB, CD \Rightarrow \begin{cases} 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AP} \end{cases}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \\ &= -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})\end{aligned}$$



Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_0 là giao điểm của GA và mặt phẳng (BCD) . Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{G_0G}$.

B. $\overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{G_0G}$.

C. $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{G_0G}$.

D. $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{G_0G}$.

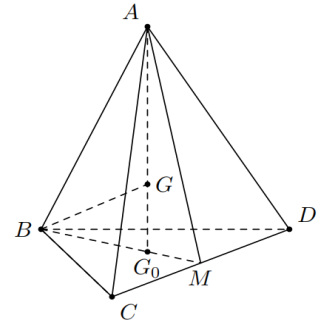
Lời giải

Vì G_0 là giao điểm của AG và mặt phẳng $(BCD) \Rightarrow G_0$ là trọng tâm tam giác BCD .

$$\Rightarrow \overrightarrow{G_0B} + \overrightarrow{G_0C} + \overrightarrow{G_0D} = \vec{0}$$

$$\text{mà } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GG_0} + \overrightarrow{G_0B} + \overrightarrow{G_0C} + \overrightarrow{G_0D} = \vec{0}$$

$$\text{Suy ra } \Rightarrow \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GG_0} = \vec{0} \rightarrow \overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{G_0G}.$$

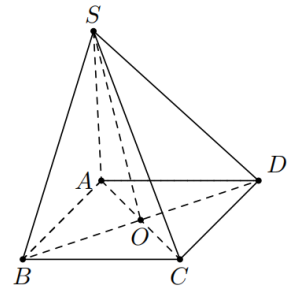


Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A.** $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$. **B.** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. **C.** $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$. **D.** $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$.

Lời giải

Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO} = \vec{a} + \vec{c} \\ \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO} = \vec{b} + \vec{d} \end{cases} \Rightarrow \vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$



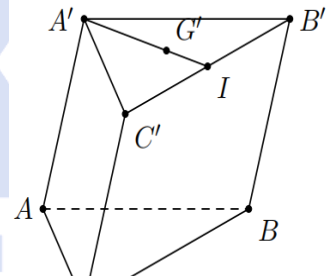
Câu 6: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Vectơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng?

- A.** $\frac{1}{3}(\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c})$. **B.** $\frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. **C.** $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c})$. **D.** $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm $B'C'$. Vì G' là trọng tâm tam giác $A'B'C' \Rightarrow \overrightarrow{A'G'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$.

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{AG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G'} = \overrightarrow{AA'} + \frac{2}{3}\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'}) \\ = \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(3\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

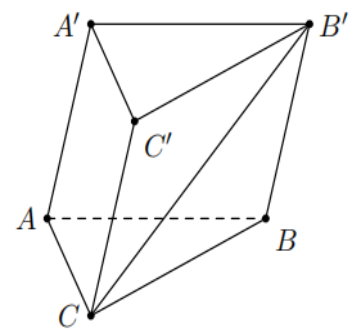


Câu 7: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{B'C}$ theo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

- A.** $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
B. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
C. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
D. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Lời giải

$$\text{Vì } BB'C'C \text{ là hình bình hành nên } \overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AA'} \\ = -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$$



Câu 8: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của cạnh BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$. **B.** $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$. **C.** $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

Lời giải

$$\text{Vì } M \text{ là trung điểm } BB' \rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}.$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = -\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

Câu 9: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O . Gọi I là tâm của hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CA'} = \vec{v}$, $\overrightarrow{BD'} = \vec{x}$, $\overrightarrow{DB'} = \vec{y}$. Khi đó:

A. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

B. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

C. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

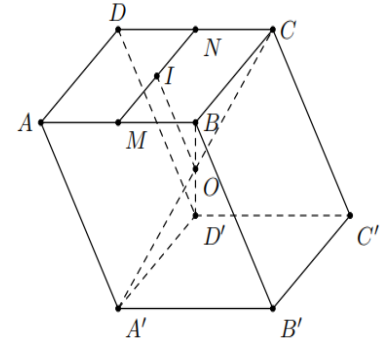
D. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

Lời giải

Gọi M, N lần lượt là trung điểm $AB, CD \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON} \end{cases}$

Vì I là trung điểm $MN \Rightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OI}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB'}\right) = -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}). \end{aligned}$$



Câu 10: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

C. $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{d} = \vec{c} - \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.

B. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.

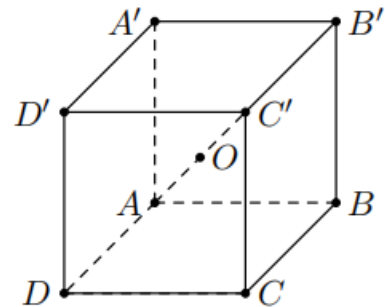
C. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.

D. $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$

Mặt khác O là trung điểm $AC' \Rightarrow \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.



Câu 12: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$.

Phân tích vector $\overrightarrow{AC'}$ theo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

A. $\overrightarrow{AC'} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

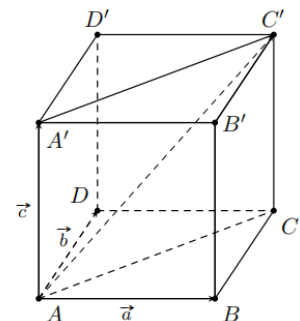
B. $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

C. $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

D. $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.



Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$. Điểm N xác định bởi đẳng thức sau $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào đúng?

A. N là trung điểm BD . B. N là đỉnh hình bình hành $BCDN$.

C. N là đỉnh hình bình hành $CDBN$.

D. $N \equiv A$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{DC}$.

Suy ra N là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CDBN$.

Câu 14: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm được xác định bởi đẳng thức sau $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'} = \vec{0}$. Mệnh đề nào đúng?

A. M là tâm mặt đáy $ABCD$.

B. M là tâm mặt đáy $A'B'C'D'$.

C. M là trung điểm đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.

D. tập hợp điểm M là đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.

Lời giải

Gọi $O = AC \cap BD$ và $O' = A'C' \cap B'D' \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \\ \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'} + \overrightarrow{O'C'} + \overrightarrow{O'D'} = \vec{0} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{MO} \\ \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'} = 4\overrightarrow{MO'} + \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'} + \overrightarrow{O'C'} + \overrightarrow{O'D'} = 4\overrightarrow{MO'} \end{cases}$

$\Rightarrow 4\overrightarrow{MO} + 4\overrightarrow{MO'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO'} = \vec{0} \Rightarrow M$ là trung điểm của OO' .

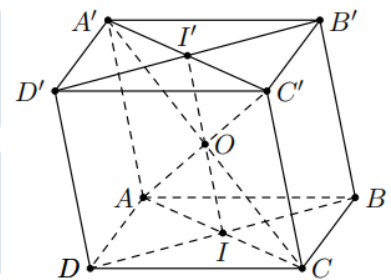
Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Điểm M xác định bởi đẳng thức $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm BB' .

B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.

C. M là trung điểm CC' .

D. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.



Lời giải

Gọi I, I' lần lượt là tâm các mặt đáy $ABCD, A'B'C'D' \Rightarrow O$ là trung điểm II' .

Mặt khác $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{IB}$.

Suy ra M là trung điểm BB' .

Câu 16: Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Điều kiện nào dưới đây khẳng định $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng?

A. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m + n + p = 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.

B. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m + n + p \neq 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.

C. Tồn tại ba số thực m, n, p sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.

D. Giá của $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng qui.

Lời giải

Xét $m = n = p = 0$ ta luôn có $m + n + p = 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ nhưng không thể suy ra được $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Xét $m + n + p \neq 0$ thì chắc chắn có một trong ba số m, n, p khác 0.

Giả sử $m \neq 0 \rightarrow m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = -\frac{n}{m}\vec{b} - \frac{p}{m}\vec{c} \rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Câu 17: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ và $\vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng.

B. $\vec{x}, \vec{a}$ cùng phương.

C. $\vec{x}, \vec{b}$ cùng phương.

D. $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đôi một cùng phương.

Lời giải

Giả sử ba vectơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng khi đó $\vec{x} = m\vec{y} + n\vec{z}$.

$$\Leftrightarrow 2\vec{a} + \vec{b} = m\vec{a} - (m + 3n)\vec{b} - (m + 2n)\vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m + 3n = -1 \\ m + 2n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = -1 \end{cases}.$$

Vậy $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng.

Câu 18: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$ và $\vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 6\vec{c}$ và $\vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 6\vec{c}$ đồng phẳng.

B. $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$ và $\vec{y} = 3\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$ và $\vec{z} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 3\vec{c}$ đồng phẳng.

C. $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ và $\vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ và $\vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 3\vec{c}$ đồng phẳng.

D. $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ và $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ và $\vec{z} = -\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ đồng phẳng.

Lời giải

Ta có $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\exists m, n: \vec{x} = m\vec{y} + n\vec{z}$.

$$\text{Với } \begin{cases} \vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c} \\ \vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 6\vec{c} \\ \vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 6\vec{c} \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = \frac{4}{3}\vec{y} + \frac{5}{3}\vec{z} \rightarrow \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \text{ đồng phẳng.}$$

Câu 19: Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu một trong ba vectơ đó bằng $\vec{0}$.

B. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu có hai trong ba vectơ đó cùng phương.

C. Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng.

D. $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ luôn đồng phẳng với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải

Giả sử cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và gọi M là trung điểm $C'D'$ khi đó:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM} \text{ không đồng phẳng với } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}.$$

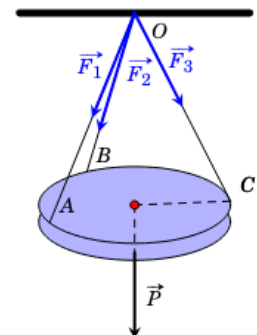
Câu 20: Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15 \text{ (N)}$. Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.

A. $14\sqrt{3} \text{ N}$.

B. $15\sqrt{3} \text{ N}$.

C. $17\sqrt{3} \text{ N}$.

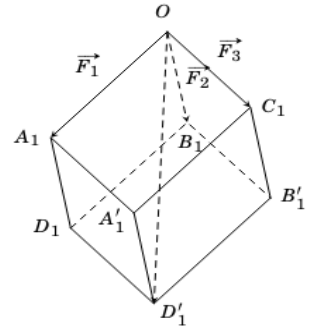
D. $16\sqrt{3} \text{ N}$.



Lời giải

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1} = \vec{F_1}, \overrightarrow{OB_1} = \vec{F_2}, \overrightarrow{OC_1} = \vec{F_3}$. Lấy các điểm D_1, A'_1, B'_1, D'_1 sao cho $OA_1D_1B_1 \cdot C_1A'_1D'_1B'_1$ là hình hộp (như hình bên). Khi đó, áp dụng quy tắc hình hộp ta có

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OD'_1}.$$



Mặt khác, do các lực căng $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ đôi một vuông góc và $|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}| = |\vec{F_3}| = 15(N)$ nên hình hộp $OA_1D_1B_1 \cdot C_1A'_1D'_1B'_1$ có ba cạnh OA_1, OB_1, OC_1 đôi một vuông góc và bằng nhau. Vì thể hình hộp đó là hình lập phương có độ dài cạnh bằng 15. Suy ra độ dài đường chéo OD'_1 của hình lập phương đó bằng $15\sqrt{3}$.

Do chiếc đèn ở vị trí cân bằng nên $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \vec{P}$, σ đó $\vec{P}$ là trọng lực tác dụng lên chiếc đèn. Suy ra trọng lượng của chiếc đèn là $|\vec{P}| = |\overrightarrow{OD'_1}| = 15\sqrt{3}N$

Câu 21: Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 5 \text{ kg}$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 60^\circ$. Tìm độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích. Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$.

A. $\frac{15\sqrt{3}}{3} N$.

B. $\frac{20\sqrt{3}}{3} N$.

C. $\frac{25\sqrt{3}}{3} N$.

D. $\frac{30\sqrt{3}}{3} N$.

Lời giải

Ta có $\vec{P} = m\vec{g}$ nên $|\vec{P}| = m|\vec{g}| = 5.10 = 50 N$.

Vậy độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm là $50 N$.

Gọi O là trọng tâm của chiếc đèn chùm cũng là chân đường cao hình chóp đều $S.ABCD$.

Vẽ $\overrightarrow{OP}$ biểu diễn trọng lực tác động lên đèn chùm với $OP \perp (ABCD)$.

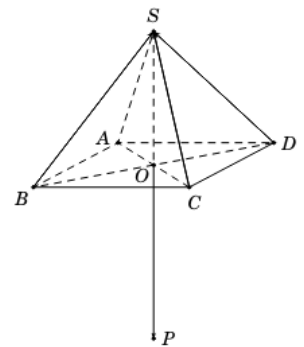
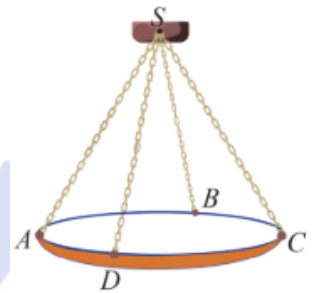
Khi đó lực căng mỗi sợi xích sẽ là $\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CS}, \overrightarrow{DS}$.

Chiếc đèn chùm đứng yên nên $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{DS} + \overrightarrow{OP} = \vec{0}$.

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO} \Rightarrow SO = \frac{1}{4}OP = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}$$

Tam giác SAC cân tại S có $\cos \widehat{OSA} = \frac{SO}{SA}$

$$\text{Suy ra lực căng của mỗi sợi dây xích là: } SA = \frac{SO}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{25}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{25\sqrt{3}}{3} N$$



Câu 22: Theo định luật II Newton (*Vật lí 10 - Chân trời sáng tạo, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2023, trang 60*) thì gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật: $\vec{F} = m\vec{a}$ trong đó $\vec{a}$ là vector gia tốc (m/s^2), $\vec{F}$ là vector lực (N). Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng 0,5 kg một gia tốc $50 m/s^2$ thì cần một lực đá có độ lớn là bao nhiêu?



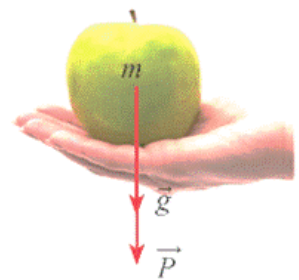
- A. 10 N. B. 15 N. C. 20 N. **D. 25 N.**

Lời giải

Ta có $\vec{F} = m\vec{a}$ suy ra $|\vec{F}| = m|\vec{a}| = 0,5.50 = 25(N)$.

Vậy muốn truyền cho quả bóng khối lượng 0,5 kg một gia tốc $50 m/s^2$ thì cần một lực đá có độ lớn là 25 N.

Câu 23: Nếu một vật có khối lượng $m(kg)$ thì lực hấp dẫn $\vec{P}$ của Trái Đất tác dụng lên vật được xác định theo công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, trong đó $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8 m/s^2$. Tính độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một quả táo có khối lượng 105 gam.



- A. 1,029N. B. 1,433N. C. 2,096N. **D. 1,477N.**

Lời giải

Đổi $105g = 0,105 kg$.

Độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một quả táo là:

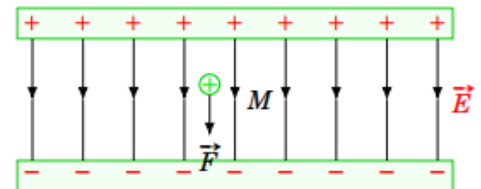
$$|\vec{P}| = m|\vec{g}| = 0,105.9,8 = 1,029 N$$

Câu 24: Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q = 10^{-9}C$ và độ lớn điện trường $E = 10^5 (N/C)$

- A.** $10^{-4}N$. B. $2.10^{-6}N$.
C. $10^{-2}N$. D. $1,8.10^{-6}N$.

Lời giải

Độ lớn của lực tĩnh điện là $|\vec{F}| = q \cdot |\vec{E}| = 10^{-9} \cdot 10^5 = 10^{-4} N$.



PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G .

- a) $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$ b) $\vec{OG} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$

c) $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$

d) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

Lời giải

a) Đúng: Theo công thức vì G là trọng tâm tứ diện $ABCD \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

b) Đúng: Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OG}) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DG}) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})\end{aligned}$$

c) Đúng: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = -\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{BG}$

d) Sai: $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{AO} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{AO} + \frac{1}{4}(4\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

$$= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm MN

a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

c) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$

d) $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

Lời giải

a) Đúng: Vì M, N lần lượt là trung điểm

$$AB, CD \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM} \\ \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN} \end{cases}$$

Mặt khác G là trung điểm

$$MN \rightarrow \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

b) Đúng: Khi đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = 4\overrightarrow{MG}$

c) Sai: Dễ chứng minh được $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$; $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}$. Do đó: $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

Câu 3: Trong không gian cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O .

a) $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

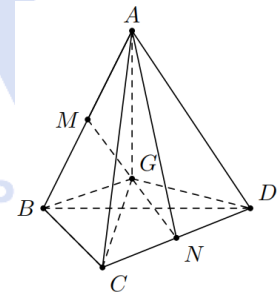
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$.

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$.

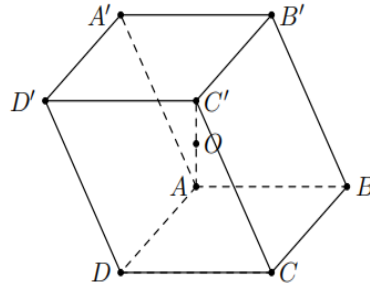
d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$.

Lời giải

a) Đúng: Theo quy tắc hình hộp thì $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$



b) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$. Do đó: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$.



c) Sai: Vì $\begin{cases} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB'} \\ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AD'} \end{cases}$ mà $\overrightarrow{AB'} \neq \overrightarrow{AD'} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} \neq \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$.

d) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'}$; $\overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{AC'}$

Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$

Câu 4: Trong không gian, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

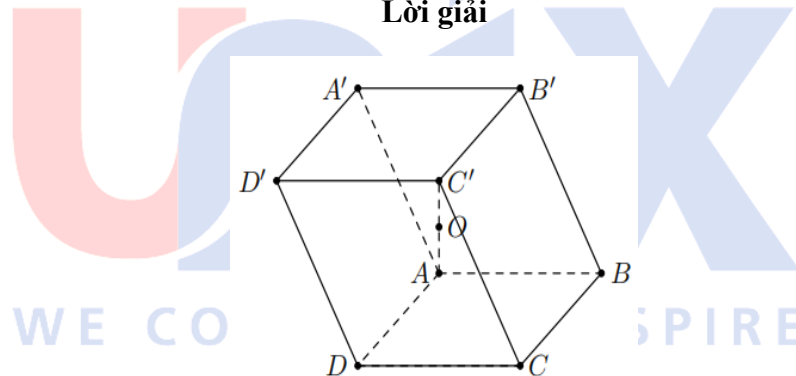
a) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'A'}$.

b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{DC}$.

c) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$.

d) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BC}$.

Lời giải



a) Đúng: Ta có $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{B'D'}$ mà $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B'D'}$

b) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'B'} = \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{D'B'} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{DC}$

c) Đúng: Ta có: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$

d) Sai: Vì $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{BD'} \neq \overrightarrow{BC}$

Câu 5: Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

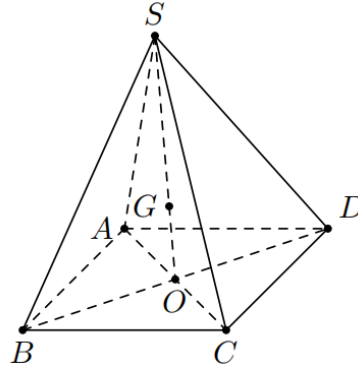
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{SO}$

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

c) $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$.

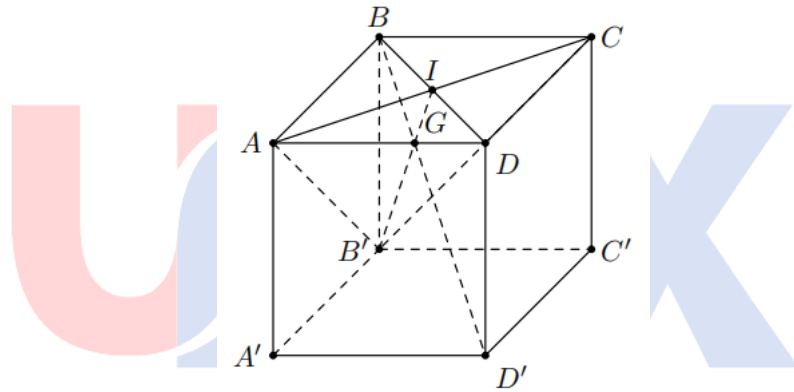
d) $\overrightarrow{GS} = 3\overrightarrow{OG}$.

Lời giải



- a) Sai: Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$
 b) Đúng: Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$
 c) Đúng: Ta có $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$; $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO}$ nên $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$
 d) Sai: Ta có $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GS} + 4\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GS} + 4\overrightarrow{GO} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}$

Câu 6: Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'C$ (tham khảo hình vẽ).



- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.
 b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.
 c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'C'}$.
 d) $\overrightarrow{BD'} = 2\overrightarrow{BG}$.

Lời giải

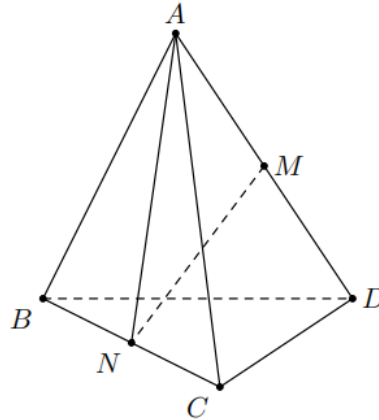
- a) Đúng: Theo quy tắc hình hộp thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$
 b) Sai: G là trọng tâm của tam giác $AB'C$ nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
 c) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$
 d) Sai: Ta có $\triangle BIG \sim \triangle D'B'G \Rightarrow \frac{BG}{D'G} = \frac{BI}{D'B'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BG}{BD'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{BD'} = 3\overrightarrow{BG}$

Câu 7: Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, BC

- a) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
 b) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.
 c) $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

d) $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải



a) Đúng: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

b) Đúng: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng vì MN không nằm trong (ABC)

c) Sai: $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng sai vì AN không nằm trong (MNC)

d) Đúng: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}) \Rightarrow \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

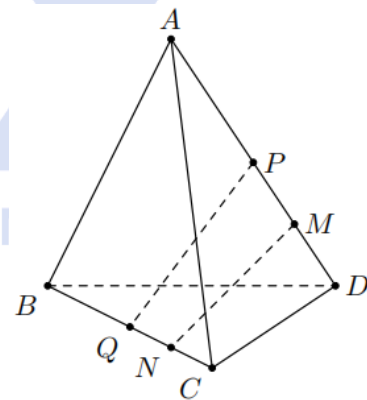
Câu 8: Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = 3MD$ và $BN = 3NC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm AD và BC .

a) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$

b) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$

c) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BN}$

d) $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.



Lời giải

a) Sai: Dễ chứng minh được $2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$ nên A sai

b) Đúng: Theo giả thuyết ta có M, N là trung điểm của PD, QC

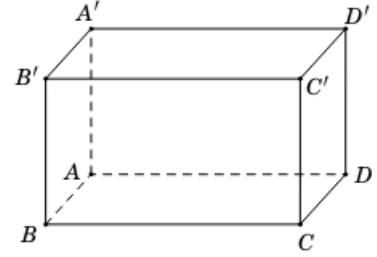
c) Đúng: $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BN} \end{cases}$

d) Đúng: Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ 3\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MD} + 3\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BN} \end{cases}$

$\Rightarrow 4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

Câu 9: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = a; AD = a\sqrt{3}; AA' = 2a$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{CD'} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{CB'} = \vec{0}$
- $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = a\sqrt{5}$
- $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'}| = 2\sqrt{2}a$

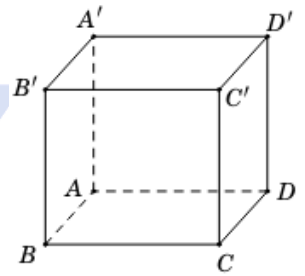


Lời giải

- Sai: $\overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{CD'}$ không đối nhau nên $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{CD'} \neq \vec{0}$
- Đúng: $\overrightarrow{A'D}$ và $\overrightarrow{CB'}$ đối nhau nên $\overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{CB'} = \vec{0}$
- Sai: $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a$
- Đúng: $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}| = AC' = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2} = 2\sqrt{2}a$

Câu 10: Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a

- $\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B'D}$
- $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD}$
- $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}| = a\sqrt{2}$
- $|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A}| = a$

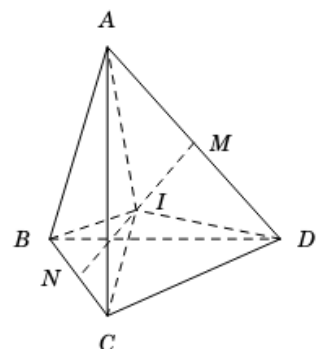


Lời giải

- Đúng: Ta có $\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B'B} + (-\overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B'D}$.
- Sai: Áp dụng quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$
- Sai: $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}| = |\overrightarrow{BD'}| = BD' = a\sqrt{3}$
- Đúng: Ta có $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{C'C}$. Do đó $|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A}| = C'C = a$

Câu 11: Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC, I là trung điểm MN .

- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$
- $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$



Lời giải

a) Sai: Sử dụng quy tắc ba điểm và quy tắc hiệu, ta có

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}.$$

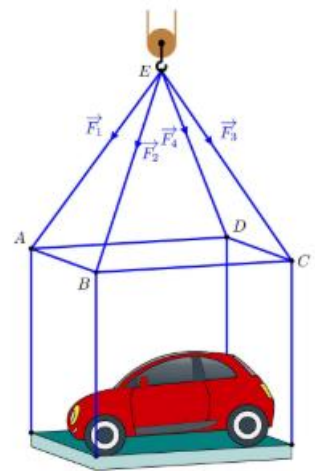
b) Đúng: Theo quy tắc ba điểm, ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

c) Đúng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$

d) Đúng: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$

Câu 12: Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là 4700 N và trọng lượng của khung sắt là 3000 N



a) $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4}$

b) $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_4}$

c) $|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3}| = 8141\text{ N}$ (làm tròn đến hàng đơn vị)

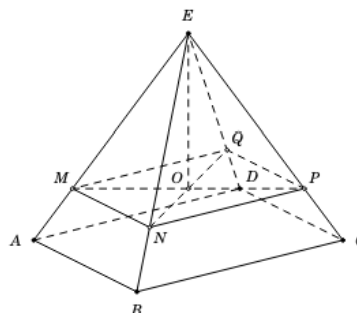
d) Trọng lượng của chiếc xe ô tô là 16282 N (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt trên các tia EA, EB, EC, ED sao cho

$$\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{EN} = \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{EP} = \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{EQ} = \overrightarrow{F_4}.$$

Do các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là 4700 N nên $EM = EN = EP = EQ = 4700$.



a) Sai: Ta có: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{EM} + \vec{EN} = 2\vec{EH}$, với H là trung điểm của MN

$\vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{EP} + \vec{EQ} = 2\vec{EK}$, với K là trung điểm của PQ suy ra $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \neq \vec{F}_3 + \vec{F}_4$

b) Đúng: Ta có $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = \vec{EM} + \vec{EP} = 2\vec{EO}$, với O là trung điểm của MP

$\vec{F}_2 + \vec{F}_4 = \vec{EN} + \vec{EQ} = 2\vec{EO}$, với O là trung điểm của MP suy ra $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_2 + \vec{F}_4$.

c) Đúng: $|\vec{F}_1 + \vec{F}_3| = |2\vec{EO}| = 2EO$. Theo giả thiết, góc giữa EA với $(ABCD)$ bằng 60° nên góc giữa EM với $(MNPQ)$ cũng bằng 60° hay $\widehat{SMO} = 60^\circ$.

Xét $\triangle EMO$ có $EM = 4700, \widehat{SMO} = 60^\circ$ suy ra $EO = EM \sin 60^\circ = 2350\sqrt{3}$.

d) Đúng: Từ đây ta tính được $|\vec{F}_1 + \vec{F}_3| = 2EO = 8141 \text{ N}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ biết rằng $\vec{AN} = -4\vec{AB} + k\vec{AA'} - 2\vec{AD}$ ($k \in \mathbb{R}$) và $\vec{AM} = 2\vec{AB} + \vec{AA'} - 3\vec{AD}$. Tìm giá trị k thích hợp để $\vec{AN} \perp \vec{AM}$

Lời giải

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $AB = AA' = AD$

Các vector $\vec{AB}, \vec{AA'}, \vec{AD}$ đôi một vuông góc với nhau.

Do đó: $\vec{AB} \cdot \vec{AA'} = 0; \vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0; \vec{AA'} \cdot \vec{AD} = 0$.

Để $\vec{AN} \perp \vec{AM}$ thì $\vec{AN} \cdot \vec{AM} = 0 \Leftrightarrow (-4\vec{AB} + k\vec{AA'} - 2\vec{AD}) \cdot (2\vec{AB} + \vec{AA'} - 3\vec{AD}) = 0$

$$\Leftrightarrow -8\vec{AB} \cdot \vec{AB} - 4\vec{AB} \cdot \vec{AA'} + 12\vec{AB} \cdot \vec{AD} + k\vec{AA'} \cdot (2\vec{AB} + \vec{AA'} - 3\vec{AD}) - 2\vec{AD} \cdot (2\vec{AB} + \vec{AA'} - 3\vec{AD}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -8(\vec{AB})^2 - 0 + 0 + 2k\vec{AA'} \cdot \vec{AB} + k\vec{AA'} \cdot \vec{AA'} - 3k\vec{AA'} \cdot \vec{AD} - 4\vec{AD} \cdot \vec{AB} - 2\vec{AD} \cdot \vec{AA'} + 6\vec{AD} \cdot \vec{AD} = 0$$

$$\Leftrightarrow -8(\vec{AB})^2 - 0 + 0 + 0 + k(\vec{AA'})^2 - 0 - 0 - 0 + 6(\vec{AD})^2 = 0$$

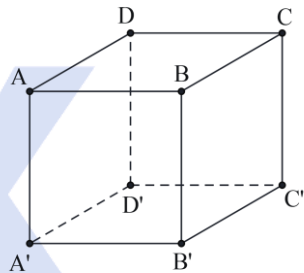
$$\Leftrightarrow -8AB^2 + kAA'^2 + 6AD^2 = 0 \text{ (mà } AB = AA' = AD)$$

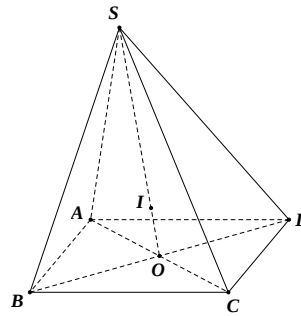
$$\Leftrightarrow -8AB^2 + kAB^2 + 6AB^2 = 0 \Leftrightarrow (-8 + k + 6)AB^2 = 0 \Leftrightarrow -8 + k + 6 = 0 \Leftrightarrow k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = 2.$$

Vậy giá trị k thích hợp để $\vec{AN} \perp \vec{AM}$ là $k = 2$.

Câu 2: Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , M là điểm thay đổi trên SO . Tìm số $\frac{SM}{SO}$ sao cho $P = MS^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ nhỏ nhất là bao nhiêu?

Lời giải





Gọi I là điểm thỏa mãn $\vec{SI} = 4\vec{IO}$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } P &= (\vec{MI} + \vec{IS})^2 + (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 + (\vec{MI} + \vec{IC})^2 + (\vec{MI} + \vec{ID})^2 \\ &= 5MI^2 + IS^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 + 2\vec{MI}(\vec{IS} + \vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID}) \\ &= 5MI^2 + IS^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 + 2\vec{MI}(\vec{IS} + 4\vec{IO} + \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}) \\ &= 5MI^2 + IS^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2. \text{ Vậy } P_{\min} \text{ khi } M \equiv I \Rightarrow \frac{SM}{SO} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Câu 3: Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$ có các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, BD và AC sao cho $BC = 4BM, AC = 3AP, BD = 2BN$. Mặt phẳng (MNP) cắt đường thẳng AD tại điểm Q . Tính tỉ số $\frac{AQ}{AD}$.

Lời giải

Đặt $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AC} = \vec{b}, \vec{AD} = \vec{c}, \vec{AQ} = k\vec{AD} = k\vec{c}$

Theo đề bài, ta có:

$$\vec{AM} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}; \vec{AN} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}); \vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{b}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = -\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \\ \vec{MP} = \vec{AP} - \vec{AM} = -\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{12}\vec{b} \\ \vec{MQ} = \vec{AQ} - \vec{AM} = -\frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + k\vec{c} \end{cases}$$

$$\text{Vì } M, N, P, Q \text{ đồng phẳng nên } x\vec{MN} + y\vec{MP} = \vec{MQ} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,25x + 0,75y = 0,75 \\ 0,25x - \frac{1}{12}y = 0,25 \\ 0,5x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{3}{5} \\ k = \frac{3}{5} \end{cases}$$

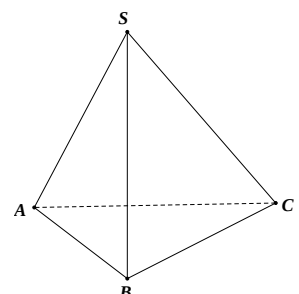
$$\text{Vậy } \vec{AQ} = \frac{3}{5}\vec{AD} \Rightarrow \frac{AQ}{AD} = \frac{3}{5}.$$

Câu 4: Trong không gian, cho tứ diện $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = 2, BC = 2\sqrt{2}$. Hãy tính $\vec{SC} \cdot \vec{AB}$.

Lời giải

Ta có: $BC^2 = SB^2 + SC^2 (2 \cdot 2^2 = 2^2 + 2^2) \Rightarrow \Delta SBC$ vuông cân tại S .

Mặt khác: $SA = AC = SC = 2 \Rightarrow \Delta SAC$ là tam giác đều.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{SC}(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SA} = 0 - SC \cdot SA \cdot \cos \widehat{ASC} = -2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = \\ &= -\frac{2^2}{2} = -2.\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = -2.$$

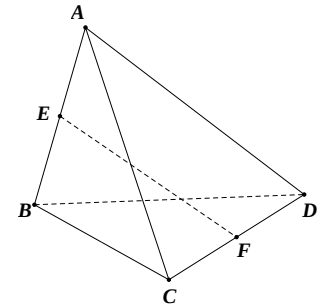
Câu 5: Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD . Cho $AB = 2a, CD = 2b, EF = 2c$. Với M là một điểm tùy ý, biết tổng $MA^2 + MB^2 = k$. $ME^2 + l \cdot a^2$. Tính $k + l$.

Lời giải

Áp dụng công thức độ dài đường trung tuyến, ta có:

$$\begin{aligned}ME^2 &= \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} \Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2ME^2 + \frac{AB^2}{2} = \\ &= 2ME^2 + 2a^2.\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } k + l = 2 + 2 = 4.$$



Câu 6: Trong không gian, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $\overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC'} = l \cdot \overrightarrow{ND}$. Khi MN song song với BD' thì $k + l$ có giá trị là bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Đặt } \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}.$$

Ta có:

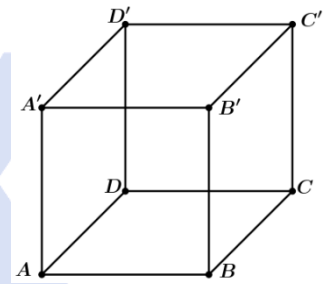
$$\overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AM} = k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{-k(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}}{1 - k}.$$

$$\text{Mặt khác: } \overrightarrow{NC} = l \cdot \overrightarrow{ND} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - l\vec{b}}{1 - l}.$$

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \left(-\frac{k}{1-k} - \frac{1}{1-l}\right)\vec{a} + \left(-\frac{k}{1-k} - 1\right)\vec{b} + \left(\frac{1}{1-k} - \frac{1}{1-l}\right)\vec{c}.$$

$$\text{Hơn nữa: } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD'} - \overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

$$\text{Vì } MN // BD' \text{ nên } \overrightarrow{MN} // \overrightarrow{BD'} \Leftrightarrow \frac{3k+1}{1-k} = -2 \Leftrightarrow k = -3 \Rightarrow l = -1. \text{ Vậy } k + l = -4.$$



Câu 7: Trong không gian, cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác BDA_1 và CB_1D_1 . Biết $\overrightarrow{AC_1} = a\overrightarrow{AG_1} + b\overrightarrow{AG_2}$. Tính $a + b$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{G_1B}; \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{G_1D}; \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{G_1A_1}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} = 3\overrightarrow{AG_1} \text{ mà } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC_1} \text{ suy ra } \overrightarrow{AC_1} = 3\overrightarrow{AG_1} \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có: } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG_2} + \overrightarrow{G_2C}; \overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AG_2} + \overrightarrow{G_2B_1}; \overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AG_2} + \overrightarrow{G_2D_1}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AD_1} = 3\overrightarrow{AG_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} = 3\overrightarrow{AG_2}.$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC_1} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG_2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AC_1} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG_1} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AG_2}$. Suy ra $a + b = \frac{9}{4}$

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ với $SA = 3, SB = 4, SC = 5$. Một mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua trọng tâm của $S.ABC$ cắt các cạnh SA, SB, SC tại các điểm A_1, B_1, C_1 . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{SA_1^2} + \frac{1}{SB_1^2} + \frac{1}{SC_1^2}$.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của $S.ABC$ khi đó $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GS} = \vec{0}$.

Từ đó $\overrightarrow{SG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})(1)$.

Do A_1, B_1, C_1 thuộc các tia SA, SB, SC nên $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SA_1}$ cùng hướng, $\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SB_1}$ cùng hướng, $\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SC_1}$ cùng hướng, từ đó $\frac{\overrightarrow{SA}}{SA} = \frac{\overrightarrow{SA_1}}{SA_1}, \frac{\overrightarrow{SB}}{SB} = \frac{\overrightarrow{SB_1}}{SB_1}, \frac{\overrightarrow{SC}}{SC} = \frac{\overrightarrow{SC_1}}{SC_1}$.

Vậy (1) tương đương với $\overrightarrow{SG} = \frac{1}{4}\left(\frac{SA}{SA_1}\overrightarrow{SA_1} + \frac{SB}{SB_1}\overrightarrow{SB_1} + \frac{SC}{SC_1}\overrightarrow{SC_1}\right)(2)$

Do G, A_1, B_1, C_1 thuộc một mặt phẳng nên từ (2) ta có $\frac{1}{4}\left(\frac{SA}{SA_1} + \frac{SB}{SB_1} + \frac{SC}{SC_1}\right) = 1$

Hay $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} + \frac{5}{z} = 4$ trong đó $x = SA_1, y = SB_1, z = SC_1$.

Vậy bài toán quy về tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$ trong điều kiện $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} + \frac{5}{z} = 4$ và

$0 < x < 3; 0 < y < 4; 0 < z < 5$. Ta có $16 = \left(\frac{3}{x} + \frac{4}{y} + \frac{5}{z}\right)^2 \leq (3^2 + 4^2 + 5^2)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)$.

Suy ra $P = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{8}{25}$

Câu 9: Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi N là điểm thỏa $\overrightarrow{C'N} = 2\overrightarrow{NB'}$, M là trung điểm của $A'D'$, I là giao điểm của $A'N$ và $B'M$. Biết $\overrightarrow{AI} = a\overrightarrow{AA'} + b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AD}$. Tính $a + b + c$.

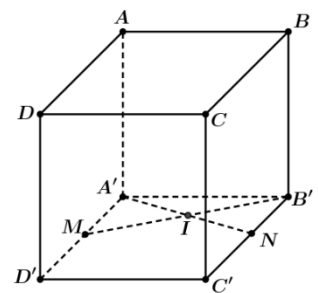
Lời giải

Ta có tam giác $IA'M$ đồng dạng với tam giác INB' nên suy ra:

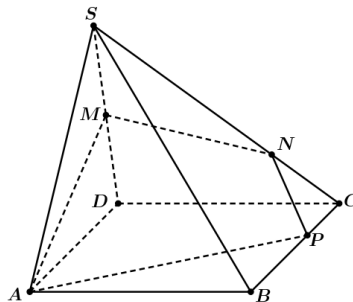
$$\frac{IA'}{IN} = \frac{A'M}{B'N} = \frac{\frac{1}{2}A'D'}{\frac{1}{3}A'D'} = \frac{3}{2} \Rightarrow A'I = \frac{3}{5}A'N$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{AA'} + \frac{3}{5}\overrightarrow{A'N} = \overrightarrow{AA'} + \frac{3}{5}(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'N}) \\ &= \overrightarrow{AA'} + \frac{3}{5}(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD})\end{aligned}$$

$= \overrightarrow{AA'} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$. Suy ra $a + b + c = \frac{9}{5}$



Câu 10: Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành. Gọi M và N là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MS} = \vec{0}, \overrightarrow{NB} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại P . Tính tỉ số $\frac{SP}{SC}$.



Lời giải

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{y}$, $\overrightarrow{AS} = \vec{z}$ và $\overrightarrow{SP} = k\overrightarrow{SC}$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AS}) = \frac{1}{2}\vec{y} + \frac{1}{2}\vec{z}$; $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \vec{x} + \frac{2}{3}\vec{y}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{AS} + k\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AS} + k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AS}) = \overrightarrow{AS} + k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AS}) \\ &= k\vec{x} + k\vec{y} + (1 - k)\vec{z}\end{aligned}$$

Vì 3 véc tơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AP}$ đồng phẳng nên $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AM} + n\overrightarrow{AN}$.

Khi đó: $k\vec{x} + k\vec{y} + (1 - k)\vec{z} = m\left(\frac{1}{2}\vec{y} + \frac{1}{2}\vec{z}\right) + n\left(\vec{x} + \frac{2}{3}\vec{y}\right) = n\vec{x} + \left(\frac{m}{2} + \frac{2n}{3}\right)\vec{y} + \frac{m}{2}\vec{z}$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} n = k \\ \frac{m}{2} + \frac{2n}{3} = k \\ \frac{m}{2} = 1 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = k \\ 1 - k + \frac{2k}{3} = k \\ \frac{m}{2} = 1 - k \end{cases}, \text{ từ phương trình } 1 - k + \frac{2k}{3} = k \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Vậy } \frac{SP}{SC} = \frac{3}{4}.$$

HẾT

WE COACH. WE INSPIRE