

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

BÀI

01

TÍNH ĐƠN ĐIỀU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

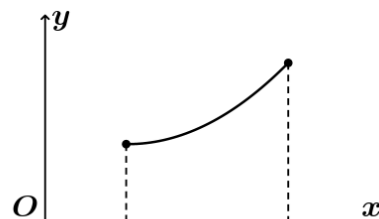
A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

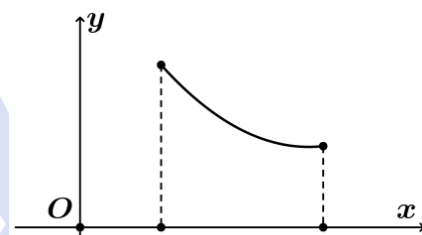
1 Tính đơn điệu của hàm số

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K với K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của hàm số đi lên từ trái sang phải (Hình 1)

Hình 1. Hàm số đồng biến trên $(a; b)$

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị của hàm số đi xuống từ trái sang phải (Hình 2)
- Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là đơn điệu trên K .
- Khi xét tính đơn điệu mà không chỉ rõ tập K thì ta hiểu là xét trên tập xác định của hàm số đó.

Hình 2. Hàm số nghịch biến trên $(a; b)$

Liên hệ giữa đạo hàm và tính đơn điệu:

Định lý 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

- Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên K thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng K .
- Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên K thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng K .

Chú ý: Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên tập K hoặc nghịch biến trên tập K thì hàm số $y = f(x)$ còn được gọi là đơn điệu trên tập $K \subset \mathbb{R}$.

Định lý 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên tập $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng. Nếu $f'(x) \geq 0$ (hoặc $f'(x) \leq 0$) với mọi x thuộc K và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên K .

2

Cực trị của hàm số

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$.

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0 .
- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 .

Ghi chú:

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số, kí hiệu f_{CD} hay y_{CD} , còn điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số.
- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực tiểu của hàm số, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số, kí hiệu f_{CT} hay y_{CT} , còn điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.
- Các điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại (còn gọi là cực đại) và giá trị cực tiểu (còn gọi là cực tiểu) được gọi chung là giá trị cực trị (hay cực trị) của hàm số.
- Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và có điểm cực trị là $x_0 \in (a; b)$ thì $f'(x_0) = 0$

Định lí: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$, với $h > 0$.

- Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

Nhận xét: Định lí trên có thể hiểu một cách đơn giản như sau: Điều kiện đủ để hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại một điểm x_0 là đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu khi x qua x_0 với $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$.

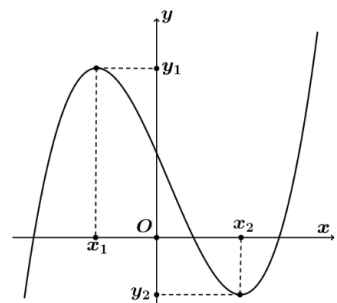
x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$			

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$			

Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$ hoặc $f'(x_0)$ không tồn tại.

Các tên gọi từ đồ thị hàm số:

- $(x_1; y_1)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số trong đó: x_1 là điểm cực đại của hàm số; y_1 là giá trị cực đại của hàm số.
- $(x_2; y_2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số trong đó: x_2 là điểm cực tiểu của hàm số; y_2 là giá trị cực tiểu của hàm số.



B

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tìm khoảng đơn điệu, cực trị của hàm số cho trước

Để xét tính đồng biến, nghịch biến, cực trị của hàm số $y = f(x)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$.
- **Bước 2:** Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
- **Bước 3:** Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4:** Căn cứ vào bảng biến thiên, nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến, cực trị của hàm số.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến và các điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2024$

b) $y = x^4 + 2024$

c) $y = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 2$

d) $y = x^4 - 2x^2 - 2$

Lời giải

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2024$

Ta có: $y' = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2044	2017	$+\infty$	

Quan sát bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$, $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-2; 1)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -2$, giá trị cực đại $y = 2044$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$, giá trị cực tiểu $y = 2017$.

b) $y = x^4 + 2024$

Ta có tập xác định $D = \mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = 4x^3$; $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	2024	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$, giá trị cực tiểu $y = 2024$.

c) $y = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 2$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Đạo hàm $y' = -x^3 + 4x = -x(x^2 - 4)$; $y' = 0 \Leftrightarrow -x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	6	2	6	$-\infty$

Tư vấn hướng nghiệp cho học sinh bằng phân tích nhân tướng học – xem chỉ tay – tử vi

Suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$, đồng biến trên các khoảng $(0; 2)$ và $(-\infty; -2)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \pm 2$, giá trị cực đại $y = 6$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$, giá trị cực tiểu $y = 2$.

d) $y = x^4 - 2x^2 - 2$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x, y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm 1$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-3	-2	-3	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$ và đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$, giá trị cực đại $y = -2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = \pm 1$, giá trị cực tiểu $y = -3$.

Bài tập 2: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$

c) $y = (x - 2)(x^2 + 1)$

b) $y = \frac{5x+9}{x-1}$

d) $y = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$

Lời giải

a) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$

Tập xác định: $D = -\infty; 1 \cup 5; +\infty$.

Ta có $y' = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}} > 0, \forall x \in (5; +\infty)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.

b) $y = \frac{5x+9}{x-1}$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \frac{-14}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$

Vậy hàm số luôn nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

c) $y = (x - 2)(x^2 + 1)$

Ta có: $y = (x - 2)(x^2 + 1) = x^3 - 2x^2 + x - 2$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 4x + 1$

Giải phương trình: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$

Ta có bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu đạo hàm ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ và đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right), (1; +\infty)$

d) $y = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	2	$+\infty$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2; -1), (-1; 0)$ và đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2), (0; +\infty)$.

Bài tập 3: Tìm các điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = -x^4 + 2x^2 + 3$

b) $y = \frac{2x+3}{x+1}$

c) $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$

d) $y = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$

Lời giải

a) $y = -x^4 + 2x^2 + 3$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y = -x^4 + 2x^2 + 3 \Rightarrow y' = -4x^3 + 4x = 0 \Rightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 4 \\ x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ x = -1 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	4	3	4	$-\infty$

Vậy đồ thị hàm số đạt cực đại tại $A(-1; 4), B(1; 4)$; đạt cực tiểu tại $C(0; 3)$.

b) $y = \frac{2x+3}{x+1}$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $y = \frac{2x+3}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0, \forall x \in D$ nên hàm số đã cho không có cực trị.

c) $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$

Ta có: $y' = 3x^2 - 8x + 5; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$

x	$-\infty$	1	$\frac{5}{3}$	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	$\frac{23}{27}$	$+\infty$	

Vậy đồ thị hàm số đạt cực đại tại $A(1; 1)$ và đạt cực tiểu tại $B\left(\frac{5}{3}; \frac{23}{27}\right)$.

d) $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có $y' = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		+	0	-		-	0	+	

Vậy các điểm cực trị của hàm số là $x = 0$ và $x = 4$.

Bài tập 4: Thể tích V (đơn vị: centimet khối) của 1kg nước tại nhiệt độ T ($0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}$) được tính bởi công thức

$$V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3$$

Hỏi thể tích $V(T)$, $0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}$, giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

Lời giải

Xét hàm số $V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3$ với $T \in [0; 30]$

Ta có $V'(T) = -0,0002037T^2 + 0,0170086T - 0,06426$

Khi $V'(T) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} T = 3,966514624 = T_1 \\ T = 79,53176716 \notin [0; 30] \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số $V(T)$ như sau:

T	0	T_1	30
$V'(T)$	-	0	+
$V(T)$	$V(0)$	$V(T_1)$	$V(30)$

Từ bảng biến thiên suy ra, thể tích $V(T)$, $0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}$ đến nhiệt độ 3,966514624°C.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

B. $y = x^3 - x^2 + 6x - 1$.

C. $y = \frac{x-2}{x+1}$.

D. $y = x^4 + 2x^2 - 1$.

Lời giải

Ta có: $y = x^3 - x^2 + 6x - 1$ suy ra $y' = 3x^2 - 2x + 6$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 6 = 0$ phương trình vô nghiệm. Do đó, $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $y = x^3 - x^2 + 6x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

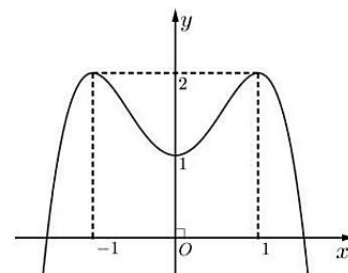
- A. $(2; +\infty)$. B. $(-\infty; -2)$. C. $(-2; +\infty)$. D. $(-2; 1)$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên dưới. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 1)$. B. $(1; +\infty)$.
C. $(0; 1)$. D. $(-1; +\infty)$.



Lời giải

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

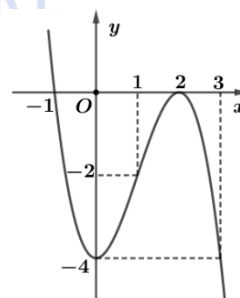
Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}$, khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
B. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
D. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Lời giải

Ta có: $y = \frac{-x+2}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(-1; 1)$. B. $(-\infty; -1)$.
C. $(2; +\infty)$. D. $(0; 1)$.

Lời giải

Quan sát đồ thị, ta thấy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

Câu 6: Hàm số $y = 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-1; 1)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(0; 2)$. D. $(1; 2)$.

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 6x^2 - 4x - 2$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'	+	0	-	0	+	
y	$-\infty$					$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -\frac{1}{3})$ và $(1; +\infty)$.

Câu 7: Hàm số $y = \frac{x+3}{x-2}$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-2; 3)$. B. $(-\infty; 3)$. C. $(-\infty; +\infty)$. D. $(3; +\infty)$.

Lời giải

Ta có: $y' = \frac{-5}{(x-2)^2} < 0, \forall x \neq 2$.

$\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-3	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-3; 0)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(0; 2)$. D. $(-\infty; -3)$.

Lời giải

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$					

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên $(-3; 0)$

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.
C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$. D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$.

Lời giải

Ta có $y' = \frac{4}{(x+1)^2} > 0$, với x thuộc khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$.

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$. Xét các mệnh đề sau:

- 1) Hàm số đã cho đồng biến trên $(1; +\infty)$.
- 2) Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- 3) Hàm số đã cho không có điểm cực trị.
- 4) Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Số các mệnh đề **đúng** là

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải

Ta có: $y = \frac{x+2}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0; \forall x \neq 1$ nên hàm số đã cho không có điểm cực trị, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(2x-5)^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; 3)$. C. $(-1; +\infty)$. D. $(-3; 1)$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$.

Bảng xét dấu $f'(x)$:

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

x	$-\infty$	-1	$\frac{5}{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	+

biến trên

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'			$+$	0	$-$		$-$	0	$+$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$

Lời giải

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Câu 13: Hàm số $y = -x^4 + 8x^2 + 6$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$. B. $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.
 C. $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$. D. $(-2; 2)$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = -4x^3 + 16x; y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 16x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 6 \\ x = 2 \Rightarrow y = 22 \\ x = -2 \Rightarrow y = 22 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	22	6	22	$-\infty$

Vậy hàm số $y =$

trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.

$-x^4 + 8x^2 + 6$ đồng biến

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty; -1)$.

B. $\mathbb{R}$.

C. $(-1; +\infty)$.

D. $(-2; +\infty)$.

Lời giải

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Câu 15: Hàm số $y = x^4 + x^2 - 2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty; 0)$.

B. $(-2; 1)$.

C. $(0; +\infty)$.

D. $(0; 2)$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 4x^3 + 2x = 2x(2x^2 + 1)$.

Ta có $y' > 0, \forall x > 0$ và $y' < 0, \forall x < 0$. Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x + 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; +\infty)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $(-\infty; 2)$.

D. $(0; +\infty)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = -x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

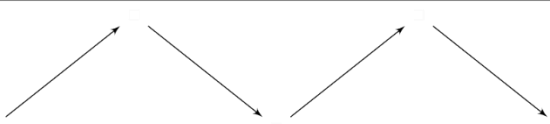
x	$-\infty$	-3	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-3; 0)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(0; 2)$. D. $(-\infty; -3)$.

Lời giải

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên $(-3; 0)$

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (2 - x)(x + 1)^2(x - 1)^5$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 2)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(-1; 2)$. D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Ta có $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 2)$, vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$.

Câu 19: Cho hàm số $y = \frac{2023x-22}{x+1}$. Khẳng định nào dưới đây là sai?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2023)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 2023)$.

Lời giải

Ta có $f'(x) < 0 \Leftrightarrow (2 - x)(x + 1)^2(x - 1)^5 < 0 \Leftrightarrow (2 - x)(x - 1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 1 \end{cases}$

Câu 20: Tìm khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(x)$, biết $f'(x) = (x - 3)(x + 2)(x + 5)^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

- A. $(-\infty; -5)$. B. $(-2; 3)$. C. $(-5; -2)$. D. $(3; +\infty)$.

Lời giải

Ta có $y' = \frac{2045}{(x+1)^2} > 0 \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Khi đó khẳng định sai là hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Câu 21: Hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; +\infty)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải

$$f'(x) = (x-3)(x+2)(x+5)^2 < 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2) < 0, (x \neq -5) \Leftrightarrow x^2 - x - 6 < 0 \\ \Leftrightarrow -2 < x < 3$$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-2; 3)$.

Câu 22: Hàm số $y = \sqrt{8+2x-x^2}$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1; +\infty)$.

B. $(-\infty; 1)$.

C. $(-2; 1)$.

D. $(1; 4)$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = -4x^3 + 4x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y		2		2	
	$-\infty$		1		$-\infty$

Từ bảng biến thiên
 $(-\infty; -1)$ hàm số đồng biến.

ta thấy trên khoảng

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên

A. $(-\infty; 1)$.

B. $(-2; 0)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(-1; +\infty)$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $-2 \leq x \leq 4$

$$\text{Ta có: } \forall x \in (-2; 4), y' = \frac{-x+1}{\sqrt{8+2x-x^2}} > 0 \Leftrightarrow \frac{-x+1}{\sqrt{8+2x-x^2}} > 0 \Leftrightarrow -x+1 > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được hàm số đồng biến trên $(-2; 1)$.

Câu 24: Hàm số $y = \frac{x-7}{x+4}$ đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty; +\infty)$.

B. $(-6; 0)$.

C. $(1; 4)$.

D. $(-5; 1)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta thấy $f'(x) < 0, \forall x < 1$. Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Câu 25: Cho hàm số $y = \frac{x^2-2x+5}{x-1}$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty; 5)$.

B. $(-3; +\infty)$.

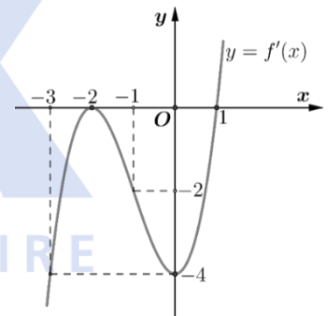
C. $(3; +\infty)$.

D. $(-3; 5)$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{11}{(x+4)^2} > 0, \forall x \in D.$$



Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -4)$ và $(-4; +\infty)$ và đồng biến trên $(1; 4)$.

Câu 26: Hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\text{Đạo hàm: } y' = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-4	$+\infty$	4	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x-1)^2(3-x)(x^2-x-1)$. Hỏi hàm số $f(x)$ có bao nhiêu cực tiểu?

A. 1

B. 3

C. 0

D. 2.

Lời giải

$$\text{Tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}. \text{ Đạo hàm } y = \frac{2x+3}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0, \forall x \neq -1.$$

Khi đó hàm số luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định

Vậy hàm số đã cho không có cực trị.

Câu 28: Tìm giá trị cực tiểu của hàm số $y = -x^3 + 3x + 4$.

A. $y_{CT} = 2$.

B. $y_{CT} = 1$.

C. $y_{CT} = 6$.

D. $y_{CT} = -1$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(3-x)(x^2-x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên ta suy ra hàm số có một cực tiểu.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = (x-1)^2(x^2-5x+6)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -3x^2 + 3, y' = 0 \Rightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 2 \\ x = 1 \Rightarrow y = 6 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'	$-$	0	$+$	0	$-$		
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

Vậy giá trị cực tiểu của hàm số $y_{CT} = 2$ tại $x = -1$.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x - 1)(2 - x), \forall x \in \mathbb{R}$. Điểm cực đại của hàm số là

- A. $x = 1$. B. $x = -2$. C. $x = 2$. D. $x = -1$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = (x - 1)^2(x^2 - 5x + 6) = (x - 1)^2(x - 2)(x - 3)$.

Do $f'(x) = 0$ có 1 nghiệm kép $x = 1$ và hai nghiệm đơn $x = 2, x = 3$ nên $f'(x)$ đổi dấu hai lần khi qua $x = 2$ và $x = 3$. Do đó hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 31: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số có tọa độ là

- A. $(2; 2)$. B. $(2; -2)$. C. $(0; -2)$. D. $(0; 2)$.

Lời giải

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$					

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x; y'' = 6x - 6$. Xét: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Ta thấy: $y''(0) = -6 < 0 \Rightarrow$ Hàm số có điểm cực tiểu $x = 0$.

Vậy tọa độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(0; 2)$.

Câu 33: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^2(x + 1)^2(2x - 1)$. Số điểm cực trị của hàm số $y =$

$f(x)$ là

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, suy ra $f'(x)$ đổi dấu một lần khi x đi qua giá trị $x = 1$ nên hàm số $f(x)$ có 1 điểm cực trị.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như hình bên. Số điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

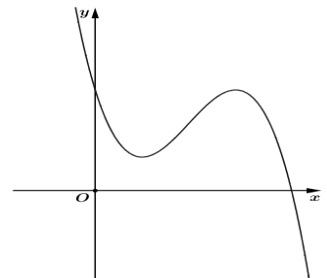
$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x+1)^2(2x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Nhận thấy $x^2 > 0 \forall x \neq 0 \Rightarrow f'(x)$ không đổi dấu khi qua nghiệm $x = 0$ nên $x = 0$ không phải là điểm cực trị hàm số.

Tương tự $(x+1)^2 > 0 \forall x \neq -1 \Rightarrow f'(x)$ không đổi dấu khi qua nghiệm $x = -1$ nên $x = -1$ không phải là điểm cực trị hàm số.

$f'(x)$ cùng dấu với nhị thức $2x - 1$ nên $x = \frac{1}{2}$ là điểm cực trị của hàm số.

Câu 35: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

$$\text{Ta có } y = f(x) \Rightarrow y' = f'(x)$$

Ta thấy đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt đường thẳng $y = 0$ tại 1 điểm suy ra phương trình $f'(x) = 0$ có 1 nghiệm đơn. Vậy hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực trị.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$

a) Tập xác định của hàm số là $D = 0; +\infty$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.

c) Hàm số đồng biến trên $(-\frac{1}{2}; +\infty)$.

d) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$				2		$+\infty$

```

graph LR
    A[+infinity] --> B[1]
    B --> C[2]
    C --> D[1]
    D --> E[+infinity]
  
```

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

- a) Sai: Tập xác định của hàm số là $D = 0; +\infty$.
- b) Sai: Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.
- c) Đúng: Hàm số đồng biến trên $(-\frac{1}{2}; +\infty)$.
- d) Đúng: Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$.

- a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$
- b) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
- c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
- d) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

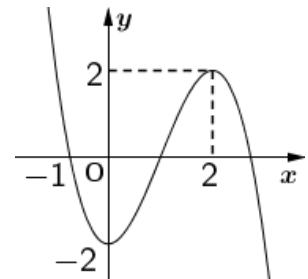
Ta có: $y' = \frac{3}{(x+2)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

- a) Sai: Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
- b) Sai: Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
- c) Sai: Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
- d) Đúng: Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ

- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$
- b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0), (2; +\infty)$
- c) Với mọi $x \in (0; 2)$ thì hàm số $y = f(x)$ luôn nhận giá trị dương
- d) Hàm số $y = f(-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$



Lời giải

Từ đồ thị, hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; 2) \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

Xét hàm số $y = f(-x)$ có $y' = -f'(-x)$.

Để hàm số nghịch biến thì $y' < 0 \Leftrightarrow -f'(-x) < 0 \Leftrightarrow f'(-x) > 0 \Leftrightarrow 0 < -x < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 0$.

Tư vấn hướng nghiệp cho học sinh bằng phân tích nhân tướng học – xem chỉ tay – tử vi

Suy ra hàm số $y = f(-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

- a) Đúng: Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$
- b) Đúng: Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$
- c) Đúng: Với mọi $x \in (0; 2)$ thì hàm số $y = f(x)$ luôn nhận giá trị dương
- d) Đúng: Hàm số $y = f(-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{x^2+x-1}{x-1}$

- a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- b) Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm nguyên
- c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(0; 1)$ và $(2; +\infty)$
- d) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(0; 1)$ và $(1; 2)$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Ta có: $y = \frac{x^2+x-1}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$				$+\infty$	

Biểu đồ biến thiên: Từ bảng trên, ta thấy hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên $(0; 1)$ và $(1; 2)$. Các giá trị cực trị: $y(0) = -1$, $y(2) = 5$.

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(0; 1)$, $(1; 2)$.

- a) Đúng: Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- b) Đúng: Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm nguyên
- c) Sai: Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$
- d) Đúng: Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(0; 1)$ và $(1; 2)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$

- a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- b) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- c) Đạo hàm của hàm số luôn nhỏ hơn 0 với mọi $x \neq 1$.
- d) Hàm số đã cho không có cực trị.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có đạo hàm $y' = \frac{-4}{(x-1)^2} < 0 \forall x \neq 1$.

Do đó hàm số đã cho không có cực trị.

- a) Đúng: Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- b) Sai: Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- c) Đúng: Đạo hàm của hàm số luôn nhỏ hơn 0 với mọi $x \neq 1$.
- d) Đúng: Hàm số đã cho không có cực trị.

Câu 6: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1}$

- a) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.
- b) Hàm số không có cực trị.
- c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- d) Hàm số có hai điểm cực trị.

Lời giải

Xét hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$

Đạo hàm $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

- a) Sai: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- b) Sai: Hàm số có một cực trị.
- c) Đúng: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- d) Sai: Hàm số chỉ có một điểm cực trị.

Câu 7: Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^4 + x^2 + \frac{1}{2}$.

- a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0) = 0$.
- b) Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = \pm 1$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(\pm 1) = 1$.
- c) Hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = \pm 1$, giá trị cực đại của hàm số là $y(\pm 1) = \frac{1}{2}$.
- d) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0) = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $y' = -2x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow -2x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

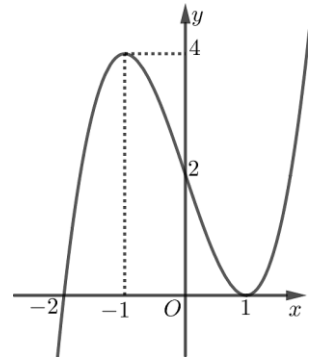
Ta có bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	1	$\frac{1}{2}$	1	$-\infty$

- a) Sai: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0) = \frac{1}{2}$.
- b) Sai: Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = 0$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0) = \frac{1}{2}$.
- c) Sai: Hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = \pm 1$, giá trị cực đại của hàm số là $y(\pm 1) = 1$.
- d) Đúng: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0) = \frac{1}{2}$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.

- a) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -1$ và giá trị cực đại là $y_{CD} = 4$
- b) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ và giá trị cực tiểu là $y_{CT} = 0$
- c) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = -2$.
- d) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -2$.



Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta có các nhận xét sau: $f'(x)$ đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi đi qua điểm $x = -2$. Suy ra $x = -2$ là điểm cực trị và là điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$. Mặt khác $f'(x)$ không đổi dấu khi đi qua điểm $x = -1, x = 1$. Suy ra $x = -1, x = 1$ không là các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

Vậy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm $x = -2$.

- a) Sai: Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -1$ và giá trị cực đại là $y_{CD} = 4$
- b) Sai: Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ và giá trị cực tiểu là $y_{CT} = 0$
- c) Đúng: Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = -2$.
- d) Sai: Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -2$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

- a) Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1 .
- b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.
- c) Giá trị cực đại của hàm số bằng 2 .
- d) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $x = 1$.

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	2	2	$-\infty$	$-\infty$

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi x đi qua $x_1 = -2 \Rightarrow y_{CT} = -1$.

Do đó mệnh đề “Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1 ” và mệnh đề “Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$ ” là mệnh đề đúng.

Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi x đi qua $x_2 = 1 \Rightarrow y_{CD} = 2$ do đó mệnh đề “Giá trị cực đại của hàm số bằng 2 ” là mệnh đề đúng.

- a) Đúng: Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1 .
- b) Đúng: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.
- c) Đúng: Giá trị cực đại của hàm số bằng 2 .
- d) Sai: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $x = 1$.

Câu 10: Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $a(t)$.

- a) Phương trình hàm vận tốc là $v(t) = 3t^2 - 6t + 9$.
- b) Phương trình hàm gia tốc là $a(t) = 6t - 12$.
- c) Vận tốc của chất điểm tăng khi $t \in (0; 1) \cup (3; +\infty)$.
- d) Vận tốc của chất điểm giảm khi $t \in (1; 3)$.

Lời giải

a) Ta có $v(t) = x'(t) = 3t^2 - 12t + 9$ và $a(t) = v'(t) = 6t - 12$.

b) Xét $v(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$

Bảng xét dấu

t	0	1	3	$+\infty$	
$v(t)$	+	0	-	0	+

Suy ra vận tốc của chất điểm tăng khi $t \in (0; 1) \cup (3; +\infty)$ và giảm khi $t \in (1; 3)$.

- a) Sai: Phương trình hàm vận tốc là $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$.
- b) Đúng: Phương trình hàm gia tốc là $a(t) = 6t - 12$.
- c) Đúng: Vận tốc của chất điểm tăng khi $t \in (0; 1) \cup (3; +\infty)$.
- d) Đúng: Vận tốc của chất điểm giảm khi $t \in (1; 3)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 5$ có đồ thị (C) . Tính độ dài đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị (C) .

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y(0) = 5 \\ x = 2 \Rightarrow y(2) = 1 \end{cases}$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(0; 5)$, $B(2; 1)$

Độ dài đoạn thẳng nối hai điểm cực trị bằng $AB = \sqrt{(2-0)^2 + (1-5)^2} = 2\sqrt{5}$

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 + 2bx + c$

Theo giả thiết suy ra: $\begin{cases} y'(1) = 3a - 2b + c = 0 \\ y(-1) = -a + b - c + d = 18 \\ y'(3) = 27a + 6b + c = 0 \\ y(3) = 27a + 9b + 3c + d = 16 \end{cases}$

Khi đó ta có hệ $\begin{cases} 3a - 2b + c = 0 \\ -a + b - c + d = 18 \\ 27a + 6b + c = 0 \\ 27a + 9b + 3c + d = 16 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{17}{16}; b = \frac{51}{16}; c = -\frac{153}{16}; d = \frac{101}{16} \Rightarrow P = 1$

Câu 2: Biết hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị là $(-1; 18)$ và $(3; -16)$. Tính giá trị biểu thức $P = a + b + c + d$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 + 2bx + c$

$$\text{Theo giả thiết suy ra: } \begin{cases} y'(1) = 3a - 2b + c = 0 \\ y(-1) = -a + b - c + d = 18 \\ y'(3) = 27a + 6b + c = 0 \\ y(3) = 27a + 9b + 3c + d = 16 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó ta có hệ } \begin{cases} 3a - 2b + c = 0 \\ -a + b - c + d = 18 \\ 27a + 6b + c = 0 \\ 27a + 9b + 3c + d = 16 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{17}{16}; b = \frac{51}{16}; c = -\frac{153}{16}; d = \frac{101}{16} \Rightarrow P = 1$$

Câu 3: Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị là A và B. Tính khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng AB.

Lời giải

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có $y' = 3x^2 - 6x - 9$ nên có hai điểm cực trị A(-1; 6) và B(3; -26)

Phương trình đường thẳng qua AB là $8x + y + 2 = 0$. Khi đó $d(O; AB) = \frac{2}{\sqrt{65}}$.

Câu 4: Biết đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}$ có hai điểm cực trị. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) tạo với hai trục toạ độ một tam giác của diện tích S bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}$ nên hàm số có hai điểm cực trị là $x_1 = 1 - \sqrt{2}; x_2 = 1 + \sqrt{2}$. Suy ra đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là A($1 + \sqrt{2}; 2\sqrt{2} - 2$) và B($1 - \sqrt{2}; -2 - 2\sqrt{2}$).

Từ đó ta có phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y = 2x - 4$. Toạ độ giao điểm của d với hai trục toạ độ là C(2; 0) và D(0; -4).

Diện tích tam giác cần tính là $S = \frac{1}{2} OC \cdot OD = 4$.

Câu 5: Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng bao nhiêu?

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

Giả sử A(0; 4), B(-1; 3), C(1; 3). Khi đó $AB = AC = \sqrt{2}$ và $BC = 2$

Suy ra tam giác ABC vuông cân tại A

Vậy bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng: $r = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB + BC + CA} = \frac{AB \cdot AC}{2\sqrt{2} + 2} = \sqrt{2} - 1$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau.

x	$-\infty$	-2	0	1	2	$+\infty$			
$f'(x)$	$-$	$ $	$+$	0	$+$	$ $	$-$	0	$+$

Hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

Ta thấy vì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm qua 3 nghiệm $x = -2, x = 1, x = 2$ đổi dấu nên hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 7: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \in (-1; 0), x_2 \in (1; 2)$. Biết hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm. Trong các số a, b và c có bao nhiêu số âm?

Lời giải

Hàm số đa thức bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 nên $a \neq 0$.

Suy ra: x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$.

Theo định lý Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}$$

Áp dụng định lý dấu tam thức bậc 2, ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2) \Rightarrow a < 0$.

Vì $x_1 \in (-1; 0), x_2 \in (1; 2)$ nên $\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2b}{3a} > 0 \\ \frac{c}{3a} < 0 \end{cases}$ do $a < 0 \Rightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c > 0 \end{cases}$

Vậy trong các số a, b và c có 1 số âm là a .

-----HẾT-----

