

Dạng 2: Xác định góc và tích vô hướng của hai vectơ

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa các cặp vectơ sau:

a) $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{B'C'}$

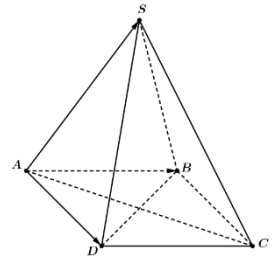
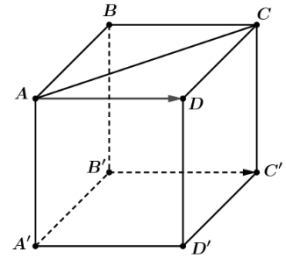
b) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{A'D'}$.

Lời giải

a) Hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ cùng hướng nên $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{B'C'}) = 0^\circ$.

b) Tứ giác $ADD'A'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'}$. Do đó $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'D'}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \widehat{CAD}$

Tam giác ADC vuông cân tại D nên $\widehat{CAD} = 45^\circ$. Vì vậy $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'D'}) = 45^\circ$.



Bài tập 2: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng

a. Tính các tích vô hướng sau:

a) $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

a) Tam giác SAD có ba cạnh bằng nhau nên là tam giác đều suy ra $\widehat{SAD} = 60^\circ$.

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ suy ra $(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AD}) = \widehat{SAD} = 60^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AS}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$.

b) Tứ giác $ABCD$ là hình vuông có độ dài mỗi cạnh là a nên độ dài đường chéo AC là $\sqrt{2}a$. Tam giác SAC có $SA = SC = a$ và $AC = \sqrt{2}a$ nên tam giác SAC vuông cân tại S

Suy ra $\widehat{SAC} = 45^\circ$, do đó $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AS}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \widehat{SAC} = a \cdot \sqrt{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$.

Bài tập 3: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh đáy bằng 1 và độ dài mỗi cạnh bên bằng 2. Hãy tính góc giữa các cặp vectơ sau đây và tính tích vô hướng của mỗi cặp vectơ đó:

a) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{C'C}$

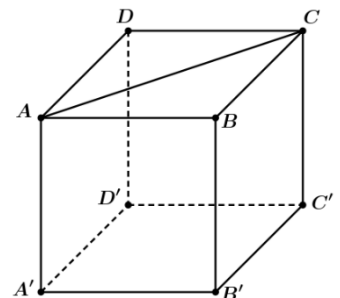
b) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'A'}$

Lời giải

a) Vì $AA' // CC'$ nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{C'C}$ ngược hướng nhau.

Suy ra $(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{C'C}) = 180^\circ$. Do đó: $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{C'C} = |\overrightarrow{AA'}| \cdot |\overrightarrow{C'C}| \cdot \cos(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{C'C}) = 2 \cdot 2 \cdot \cos 180^\circ = -4$



b) Vì $A'ADD'$ là hình chữ nhật nên $\widehat{A'AD} = 90^\circ$

vì $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Do đó $(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AD}) = \widehat{A'AD} = 90^\circ$

Ta có: $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AA'}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AD}) = 2 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0$

c) Vì $A'ABB'$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{BA}$.

Mặt khác $ABCD$ là hình vuông nên $\widehat{CAB} = 45^\circ$ và $AC = \sqrt{2}$

Ta có: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'A'} = -\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = -|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = -\sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos 45^\circ = -1$.

Bài tập 4 : Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 5

a) Tìm góc giữa các cặp vector sau: $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'D'}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{BD}$

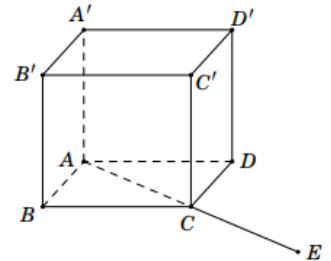
b) Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'D'}$; $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{BD}$

c) Chứng minh $\overrightarrow{AC'}$ vuông góc với $\overrightarrow{BD}$

Lời giải

a) Ta có: $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \widehat{CAB} = 45^\circ$; $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{B'D'}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD'}) = 90^\circ$

$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}) = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ (E là điểm đối xứng của A qua C) $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{BC'}$ $\Rightarrow (\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BD}) = \widehat{C'BD}$ mà tam giác $C'BD$ là tam giác đều nên khi đó ta có $\widehat{C'BD} = 60^\circ$.



b) Ta có $AC = BD = B'D' = 5\sqrt{2}$ suy ra:

- $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AC \cdot AB \cdot \cos 45^\circ = 25$
- Do AC vuông góc với $B'D'$ nên $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'D'} = 0$
- $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{BD} = AD' \cdot BD \cdot \cos 60^\circ = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 25$

c) Ta cần chứng minh $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

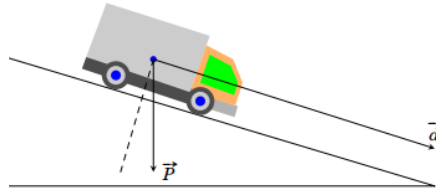
Ta có: $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

nên $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB} = 5^2 - 5^2 = 0$$

Suy ra $\overrightarrow{AC'}$ vuông góc với $\overrightarrow{BD}$ (điều phải chứng minh)

Bài tập 5: Cho biết A (đơn vị: J) sinh bởi lực $\vec{F}$ tác dụng lên một vật được tính bằng công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$ trong đó $\vec{d}$ là vector biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị: mét) khi chịu tác dụng của lực $\vec{F}$. Một chiếc xe có khối lượng 1,5 tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêng 5° so với phương ngang. Tính công sinh ra bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30m (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị), biết rằng trọng lực $\vec{P}$ được xác định bởi công thức $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$, với m (đơn vị: kg) là khối lượng của vật và $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.



Lời giải

Ta có $1,5 \text{ tấn} = 1500 \text{ kg}$.

Độ lớn của trọng lực tác dụng lên xe là: $|\vec{P}| = m \cdot |\vec{g}| = 1500 \cdot 9,8 = 14700 \text{ N}$

Vector $\vec{d}$ biểu thị độ dịch chuyển của xe có độ dài là: $|\vec{d}| = 30 \text{ (m)}$ và $(\vec{P}, \vec{d}) = 90^\circ - 5^\circ = 85^\circ$

Công sinh ra bởi trọng lực khi xe đi hết đoạn đường dốc là:

$$A = \vec{P} \cdot \vec{d} = |\vec{P}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos(\vec{P}, \vec{d}) = 14700 \cdot 30 \cdot \cos 85^\circ \approx 38436 \text{ (J)}$$

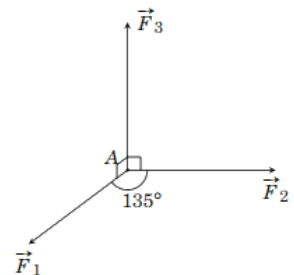
Bài tập 5: Một chất điểm A nằm trên mặt phẳng nằm ngang (α), chịu tác động bởi ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$. Các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ có giá nằm trong (α) và $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 135^\circ$, còn lực $\vec{F}_3$ có giá vuông góc với (α) và hướng lên trên. Xác định cường độ hợp lực của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ biết rằng độ lớn của ba lực đó lần lượt là 20N, 15N và 10N.

Lời giải

Gọi $\vec{F}$ là hợp lực của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ tức là $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ ta có:

$$\begin{aligned} |\vec{F}|^2 &= (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3)^2 \\ &= \vec{F}_1^2 + \vec{F}_2^2 + \vec{F}_3^2 + 2 \cdot \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 + 2 \cdot \vec{F}_2 \cdot \vec{F}_3 + 2 \cdot \vec{F}_3 \cdot \vec{F}_1 \\ &= 20^2 + 15^2 + 10^2 + 2 \cdot 20 \cdot 25 \cdot \cos 135^\circ = 725 - 300\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } |\vec{F}| = \sqrt{725 - 300\sqrt{2}} \approx 17,34 \text{ N.}$$



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Lời giải

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng nên $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$. Vậy $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Câu 2: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

- A. $\alpha = 180^\circ$. B. $\alpha = 0^\circ$. C. $\alpha = 90^\circ$. D. $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải

Mà theo giả thiết $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, suy ra $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$

- Câu 3:** Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$
- A. $\alpha = 30^\circ$. B. $\alpha = 45^\circ$. C. $\alpha = 60^\circ$. D. $\alpha = 120^\circ$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$$

- Câu 4:** Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai vector $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
- A. $\alpha = 90^\circ$. B. $\alpha = 180^\circ$. C. $\alpha = 60^\circ$. D. $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b} \right) (\vec{a} + \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}\vec{a}^2 - \frac{13}{5}\vec{a}\vec{b} - 3\vec{b}^2 = 0 \xrightarrow{|\vec{a}|=|\vec{b}|=1} \vec{a}\vec{b} = -1$$

$$\text{Suy ra } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = -1 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$$

- Câu 5:** Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$. Độ dài vector $3\vec{a} + 5\vec{b}$:
- A. $5\sqrt{5}$. B. $\sqrt{24}$. C. 8. D. 124.

Lời giải

$$(3\vec{a} + 5\vec{b})^2 = 9\vec{a}^2 + 30\vec{a}\vec{b} + 25\vec{b}^2 = 9 + 90 + 25 = 124 \Rightarrow |3\vec{a} + 5\vec{b}| = \sqrt{124}$$

- Câu 6:** Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4$; $|\vec{b}| = 3$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vector $\vec{a}, \vec{b}$. Chọn khẳng định đúng?
- A. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$. B. $\alpha = 30^\circ$. C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. D. $\alpha = 60^\circ$.

Lời giải

$$\text{Ta có } (\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{9}{2}. \text{ Do đó: } \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3}{8}.$$

- Câu 7:** Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4$; $|\vec{b}| = 3$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$. Xét hai vector $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{y} = \vec{a} - 2\vec{b}$. Gọi α là góc giữa hai vector $\vec{x}, \vec{y}$. Chọn khẳng định đúng.
- A. $\cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{15}}$. B. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$. C. $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{15}}$. D. $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{15}}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = (\vec{a})^2 + 2(\vec{b})^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{b} = 4.$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x})^2} = \sqrt{(\vec{a} - 2\vec{b})^2} = \sqrt{(\vec{a})^2 + 4(\vec{b})^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b}} = 2\sqrt{3}.$$

$$|\vec{y}| = \sqrt{(\vec{y})^2} = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{(\vec{a})^2 + (\vec{b})^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{5}.$$

$$\text{Khi đó } \cos \alpha = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} = \frac{4}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{15}}$$

- Câu 8:** Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 26$; $|\vec{b}| = 28$; $|\vec{a} + \vec{b}| = 48$. Độ dài vector $\vec{a} - \vec{b}$ bằng?
- A. 25. B. $\sqrt{616}$. C. 9. D. $\sqrt{618}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 2(\vec{a}^2 + \vec{b}^2) - (\vec{a} + \vec{b})^2 \\ &= 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) - |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 2(26^2 + 28^2) - 48^2 = 616 \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{616}. \end{aligned}$$

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

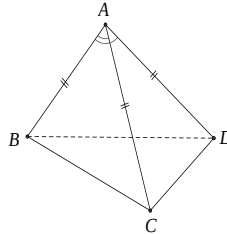
A. 60° .

B. 45° .

C. 120° .

D. 90° .

Lời giải



$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ - AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = 0$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 90^\circ$$

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$?

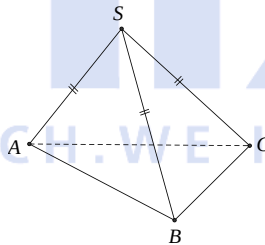
A. 120° .

B. 90° .

C. 60° .

D. 45° .

Lời giải



$$\text{Ta có: } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA} \cdot (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}) = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \cdot SC \cdot \cos \widehat{ASC} - SA \cdot SB \cdot \cos \widehat{ASB} = 0$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}) = 90^\circ$$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD . Số đo của góc (MN, SC) bằng:

A. 45°

B. 30°

C. 90°

D. 60°

Lời giải

$$\text{Ta có: } AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AC^2 = 2a^2 = SA^2 + SC^2 \Rightarrow \Delta SAC \text{ vuông tại } S.$$

$$\text{Khi đó: } \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{SC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{SC}) = 90^\circ \Rightarrow (MN, SC) = 90^\circ$$

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu?

A. 0° .

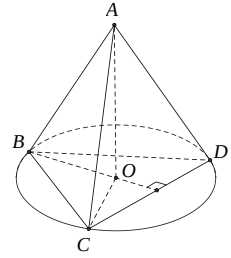
B. 30° .

C. 90° .

D. 60° .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = CO \cdot CD \cdot \cos 30^\circ - CA \cdot CD \cdot \cos 60^\circ \\ &= \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0. \end{aligned}$$

Suy ra $AO \perp CD$.



Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$ với $AB \perp AC, AB \perp BD$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD . Góc giữa PQ và AB là?

A. 90° .

B. 60° .

C. 30° .

D. 45° .

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ} \Rightarrow AB \perp PQ$

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ, \widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

A. 120° .

B. 90° .

C. 60° .

D. 45° .

Lời giải

Xét tam giác ICD có J là trung điểm đoạn CD .

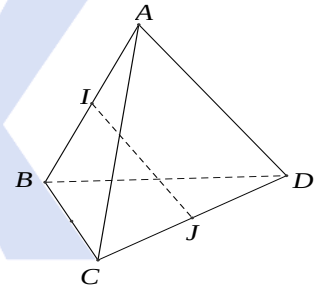
Ta có: $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID})$

Vì tam giác ABC có $AB = AC$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên tam giác ABC đều. Suy ra: $CI \perp AB$

Tương tự ta có tam giác ABD đều nên $DI \perp AB$.

Xét $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Suy ra $\overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{AB}$. Hay góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$ bằng 90° .



Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. AB và CD chéo nhau

B. AB và CD vuông góc với nhau

C. AB và CD đồng phẳng

D. AB và CD cắt nhau

Lời giải

Chọn B

Đặt $AB = AD = AC = a$

Ta có $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}| \cos 60^\circ - |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = 0$

Vậy $AB \perp CD$.

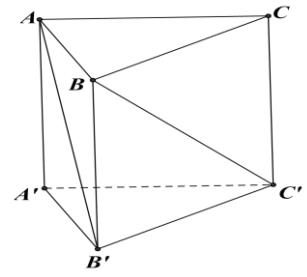
Câu 16: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

- A. 60° . B. 45° .
C. 90° . D. 30° .

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CC'} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CC'} = -\frac{a^2}{2} + 0 + 0 + 2a^2 = \frac{3a^2}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \cos(\widehat{AB', BC'}) = \frac{\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'}}{|\overrightarrow{AB'}| \cdot |\overrightarrow{BC'}|} = \frac{\frac{3a^2}{2}}{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\widehat{AB', BC'}) = 60^\circ.$$

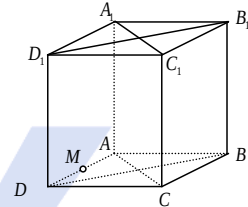


Câu 17: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a . Gọi M là trung điểm AD . Giá trị $\overrightarrow{B_1M} \cdot \overrightarrow{BD_1}$ là:

- A. $\frac{1}{2}a^2$. B. a^2 . C. $\frac{3}{4}a^2$. D. $\frac{3}{2}a^2$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{B_1M} \cdot \overrightarrow{BD_1} &= (\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1}) \\ &= \overrightarrow{B_1B} \cdot \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = -a^2 + a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$



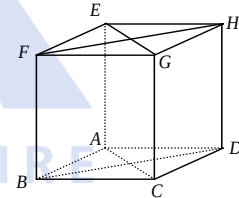
Câu 18: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

- A. 90° B. 60°
C. 45° D. 120°

Lời giải

Ta có: $EG \parallel AC$ (do $ACGE$ là hình chữ nhật)

$$\Rightarrow (\widehat{AB, EG}) = (\widehat{AB, AC}) = \widehat{BAC} = 45^\circ$$



Câu 19: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB' . Cosin của góc hợp bởi MN và AC' bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a .

$$\text{Đặt } \vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AD}, \vec{c} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a, \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0.$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{AM} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \Rightarrow |\overrightarrow{AC'}| = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{MN} = a^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = a^2 \Rightarrow \cos(MN; AC') = \left| \cos(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{AC'}) \right| = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC'}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{AC'}|} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 20: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tam giác $A'BC$ đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) . M là trung điểm cạnh CC' . Tính cosin góc α giữa hai đường thẳng AA' và BM .

A. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{22}}{11}$.

B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{33}}{11}$.

C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{11}$.

D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{22}}{11}$.

Lời giải

Ta có: $AH = A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AH \perp BC, A'H \perp BC \Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow BC \perp AA'$ hay

$BC \perp BB'$. Do đó: $BCC'B'$ là hình chữ nhật.

Khi đó: $CC' = AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow BM = \sqrt{a^2 + \frac{a^2 \cdot 6}{16}} = a \frac{\sqrt{22}}{4}$.

Xét: $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AA'} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}) = 0 + \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{CM} = \frac{3a^2}{4}$.

Suy ra $\cos(AA', BM) = \frac{\left| \frac{3a^2}{4} \right|}{\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{22}}{4}} = \frac{\sqrt{33}}{11}$.

Câu 21: Cho tam giác ABC , thì công thức tính diện tích nào sau đây là đúng nhất.

A. $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - BC^2}$

B. $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 + \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$

C. $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$

D. $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$

Lời giải

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB AC \sin A = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 \sin^2 A} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 (1 - \cos^2 A)}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}.$$

Câu 22: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a . Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$ bằng?

A. $a^2 \sqrt{2}$.

B. a^2 .

C. $a^2 \sqrt{3}$.

D. $\frac{a^2 \sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} (\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}) = a^2 \text{ (do } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD})$$

Câu 23: Cho tứ diện $ABCD$ với $AC = \frac{3}{2}AD$, $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, $CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD .

Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos \varphi = \frac{3}{4}$.

B. $\varphi = 60^\circ$.

C. $\varphi = 30^\circ$.

D. $\cos \varphi = \frac{1}{4}$.

Lời giải

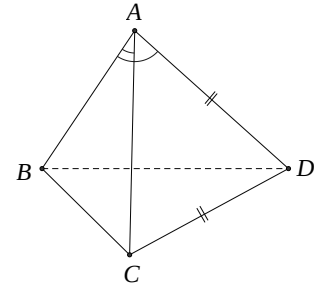
Ta có $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{AB \cdot CD}$

Mặt khác: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$= AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ - AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = AB \cdot AD \cdot \frac{1}{2} - AB \cdot \frac{3}{2}AD \cdot \frac{1}{2}$

$= -\frac{1}{4}AB \cdot AD = -\frac{1}{4}AB \cdot CD$.

Do có $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{-\frac{1}{4}AB \cdot CD}{AB \cdot CD} = -\frac{1}{4}$. Suy ra $\cos \varphi = \frac{1}{4}$.



Câu 24: Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM})$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Giả sử cạnh của tứ diện là a .

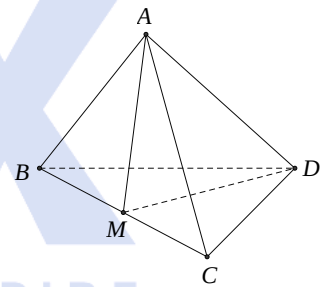
Ta có $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{DM}|} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM}}{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}$

Mặt khác: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

$= AB \cdot AM \cdot \cos 30^\circ - AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ$

$= a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}$.

Do có $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}) = \frac{\frac{a^2}{4}}{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Suy ra $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.



PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai véc-tơ đó là 45° .

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = -5 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $|\vec{a} + \vec{b}| = 2 + \sqrt{2}$.

d) $|\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b}| = 0$.

Lời giải

a) Đúng: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Đúng: $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 6|\vec{b}|^2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 6 = -5 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Sai: $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2 + \sqrt{2}$ suy ra $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

d) Sai: $(\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\sqrt{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b}^2 = 1 + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 2$ suy ra $|\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b}| = \sqrt{2}$.

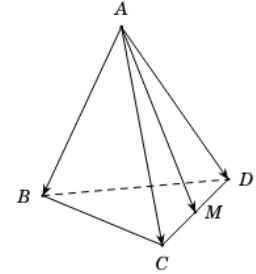
Câu 2: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD .

a) $\vec{AM} \cdot \vec{CD} = 0$.

b) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2}{2}$.

c) $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$

d) $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = -\frac{a^2}{2}$.



Lời giải

a) Đúng: Tam giác ACD đều suy ra AM vuông góc với CD nên $\vec{AM} \cdot \vec{CD} = 0$.

b) Đúng: Ta có $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$.

c) Đúng: Ta có $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = (\vec{AM} + \vec{MB}) \cdot \vec{CD} = \vec{AM} \cdot \vec{CD} + \vec{MB} \cdot \vec{CD}$.

Mặt khác AM, BM là trung tuyến của các tam giác đều ACD, BCD nên $\vec{AM} \perp \vec{CD}, \vec{MB} \perp \vec{CD}$.

Suy ra $\vec{AM} \cdot \vec{CD} = \vec{MB} \cdot \vec{CD} = 0 \Rightarrow (\vec{AB}, \vec{CD}) = 90^\circ$.

d) Ta có $\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AD})$

Suy ra $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = \vec{AB} \cdot \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AD}) = \frac{1}{2}(\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{AD}) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\right) = \frac{a^2}{2}$

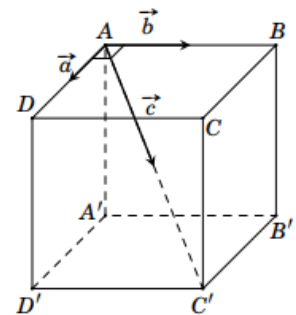
Câu 3: Một chất điểm ở vị trí đỉnh A của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{AD}, \vec{AB}$ và $\vec{AC'}$ như hình vẽ. Độ lớn của các lực $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ tương ứng là $10\text{ N}, 10\text{ N}$ và 20 N .

a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

b) $|\vec{a} + \vec{b}| = 20\text{ N}$.

c) $|\vec{a} + \vec{c}| = |\vec{b} + \vec{c}|$.

d) $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 32,59\text{ N}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Lời giải

Từ giả thiết ta có $\vec{a} \perp \vec{b}$; $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \cos \widehat{DAC'} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \cos \widehat{BAC'} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

a) Sai: Giả sử $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. Theo quy tắc hình bình hành thì $\vec{c}$ cùng hướng với $\vec{AC}$ suy ra $\vec{a} + \vec{b} \neq \vec{c}$

b) Sai: $|\vec{a} + \vec{b}| = 10\sqrt{2}$ (đường chéo hình vuông cạnh bằng 10).

c) Đúng: Ta có $\vec{a} + \vec{c}^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 20^2 = 500 + \frac{400\sqrt{3}}{3}$.

$$\text{Suy ra } |\vec{a} + \vec{c}| = \sqrt{500 + \frac{400\sqrt{3}}{3}}.$$

$$\text{Mặt khác } (\vec{b} + \vec{c})^2 = |\vec{b}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 20^2 = 500 + \frac{400\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Suy ra } |\vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{500 + \frac{400\sqrt{3}}{3}}. \text{ Vậy } |\vec{a} + \vec{c}| = |\vec{b} + \vec{c}|.$$

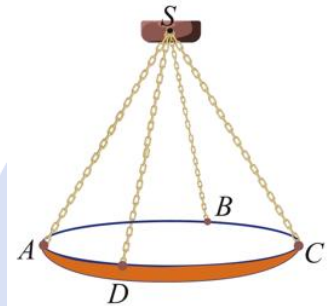
d) Giả sử lực tổng hợp là $\vec{m}$, tức là $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

$$\text{Do đó: } \vec{n} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \Leftrightarrow |\vec{m}|^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 \Leftrightarrow |\vec{m}|^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a}$$

$$\Leftrightarrow |\vec{m}|^2 = 10^2 + 10^2 + 20^2 + 0 + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow |\vec{m}|^2 = 10^2 + 10^2 + 20^2 + 0 + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow |\vec{m}| \approx 32,59.$$

Câu 4: Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 5 \text{ kg}$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\angle ASC = 60^\circ$. Biết $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ trong đó $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn 10 m/s^2 , $\vec{P}$ là trọng lực tác động vật có đơn vị là N , m là khối lượng của vật có đơn vị kg . Khi đó:



a) $\vec{SA}, \vec{SB}, \vec{SC}, \vec{SD}$ là 4 vectơ đồng phẳng

b) $|\vec{SA}| = |\vec{SB}| = |\vec{SC}| = |\vec{SD}|$

c) Độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm bằng 50 N

d) Độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích bằng $\frac{25\sqrt{3}}{2} \text{ N}$

Lời giải

a) Đúng: $\vec{SA}, \vec{SB}, \vec{SC}, \vec{SD}$ là 4 vectơ đồng phẳng

b) Đúng: $|\vec{SA}| = |\vec{SB}| = |\vec{SC}| = |\vec{SD}|$

c) Đúng: Độ lớn trọng lực tác động lên đèn chùm là: $P = mg = 5 \cdot 10 = 50 \text{ N}$

d) Sai: Ta có $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều $\Rightarrow SA = SB = SC = SD$ mà $\angle ASC = 60^\circ$

Vậy tam giác SAC đều. Gọi O là trung điểm AC .

$$\text{Hợp lực của 4 sợi xích là: } \vec{F} = \vec{SA} + \vec{SC} + \vec{SB} + \vec{SD} = 2\vec{SO} + 2\vec{SO} = 4\vec{SO}$$

Để đèn chùm đứng yên thì hợp lực của các sợi xích phải cân bằng với trọng lực hay $4\vec{SO} = \vec{P}$
hay $4SO = P \Leftrightarrow SO = 12,5$

$$\text{Xét tam giác đều } SAC \text{ có } SA = \frac{\sqrt{3}}{2} SO = \frac{25\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Vậy độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích là } \frac{25\sqrt{3}}{4} N$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi M là trung điểm của BC . Tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM})$

Lời giải

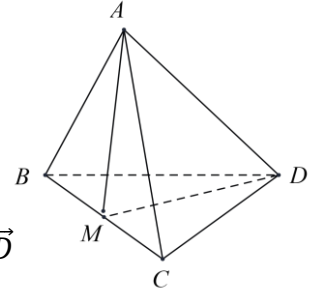
$$\text{Xét tứ diện } ABCD \text{ cạnh } a \text{ ta có: } DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ta có } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{DM}|} = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DM}}{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DM}}{a^2}.$$

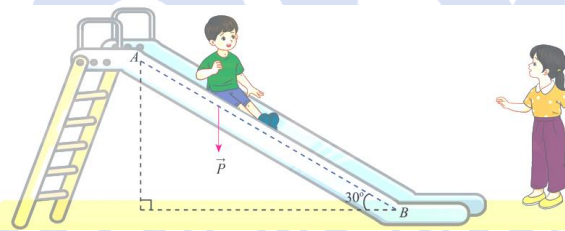
$$\text{Tính } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM}: \text{ ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) - |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{4}.$$

$$\text{Vậy } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}) = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$



Câu 2: Một em nhỏ cân nặng $m = 25 \text{ kg}$ trượt trên cầu trượt dài 3,5 m. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 30° .



Tính độ lớn của trọng lực $\vec{P} = m\vec{g}$ tác dụng lên em nhỏ, cho biết vector gia tốc rơi tự do $\vec{g}$ có độ lớn là $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Lời giải

$$\text{Độ lớn trọng lực tác dụng lên em nhỏ là: } P = mg \cos 60^\circ = 25 \cdot 9,8 \cdot \frac{1}{2} = 122,5 \text{ N}$$

Câu 3: Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc 100° và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên.

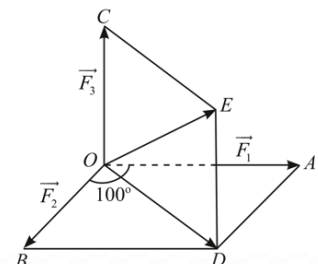
Lời giải

Gọi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ là ba lực tác động vào vật đặt tại điểm O lần lượt có độ lớn là 25 N, 12 N, 4 N.

$$\text{Vẽ } \overrightarrow{OA} = \vec{F}_1, \overrightarrow{OB} = \vec{F}_2, \overrightarrow{OC} = \vec{F}_3.$$

Dựng hình bình hành $OADB$ và hình bình hành $ODEC$.

$$\text{Hợp lực tác động vào vật là } \vec{F} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE}$$



Áp dụng định lí côsin trong tam giác OBD , ta có

$$OD^2 = BD^2 + OB^2 - 2 \cdot BD \cdot OB \cdot \cos \widehat{OBD} = OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100^\circ.$$

Vì $OC \perp (OADB)$ nên $OC \perp OD$ suy ra $ODEC$ là hình chữ nhật.

Do đó tam giác ODE vuông tại D .

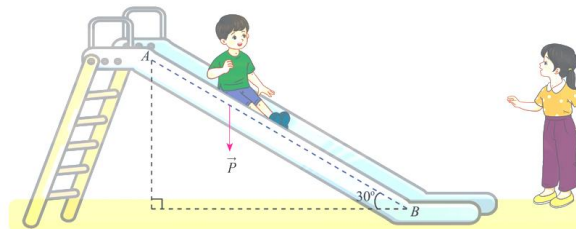
$$Ta \text{ có } OE^2 = OC^2 + OD^2 = OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100^\circ.$$

$$Suy \text{ ra } OE = \sqrt{OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100^\circ}$$

$$= \sqrt{4^2 + 25^2 + 12^2 + 2 \cdot 25 \cdot 12 \cdot \cos 100^\circ} \approx 26,092.$$

Vậy độ lớn của hợp lực là $F = OE \approx 26 \text{ N}$.

Câu 4: Một em nhỏ cân nặng $m = 25 \text{ kg}$ trượt trên cầu trượt dài $3,5 \text{ m}$. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 30°



Độ lớn của trọng lực là $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ tác dụng lên em nhỏ, cho biết vector gia tốc rơi tự do $\vec{g}$ có độ lớn là $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Cho biết công $A(J)$ sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển $\vec{d}$ được tính bởi công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$. Hãy tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt.

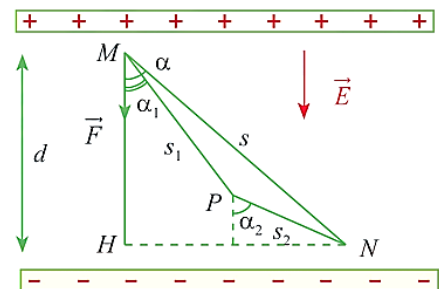
Lời giải

Độ lớn trọng lực tác dụng lên em nhỏ là: $P = mg \cos 60^\circ = 25 \cdot 9,8 \cdot \frac{1}{2} = 122,5 \text{ N}$

Công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt là:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{d} = Pd \cos 60^\circ = 122,5 \cdot 3,5 \cdot \frac{1}{2} = 214,375 \text{ (J)}$$

Câu 5: Một lực tĩnh điện $\vec{F}$ tác động lên điện tích điểm M trong điện trường đều làm cho M dịch chuyển theo đường gấp khúc MNP . Biết $q = 2 \cdot 10^{-12} \text{ (C)}$ và vector cường độ điện trường có độ lớn $E = 1,8 \cdot 10^5 \text{ (N/C)}$ và $d = MH = 5 \text{ (mm)}$. Tính công A sinh bởi lực tĩnh điện $\vec{F}$.



Lời giải

Đổi $5 \text{ mm} = 0,005 \text{ m}$

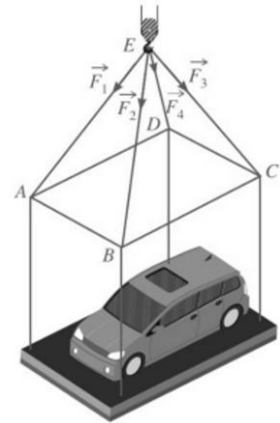
Gọi K là điểm thuộc MH sao cho $PK \perp MH$, L là điểm thuộc HN sao cho $PL \perp HN$

Ta có: $A_{MNP} = A_{MP} + A_{PN} = F_d \cdot MP \cos \alpha_1 + F_d \cdot PN \cos \alpha_2$

$$\Leftrightarrow A_{MNP} = qE \cdot \frac{MK}{\cos \alpha_1} \cdot \cos \alpha_1 + qE \cdot \frac{PL}{\cos \alpha_2} \cdot \cos \alpha_2$$

$$\Leftrightarrow A_{MNP} = qE(MK + PL) = qE(MK + KH) = qE.MH = 2.10^{-12}.1,8.10^5.0,005 = 1,8.10^{-9} \text{ (J)}$$

Câu 6: Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cầu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° . Chiếc cần cầu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ là 4700 N và trọng lượng của khung sắt là 3000 N .



Lời giải

Ta có $\widehat{AEC} = 60^\circ$

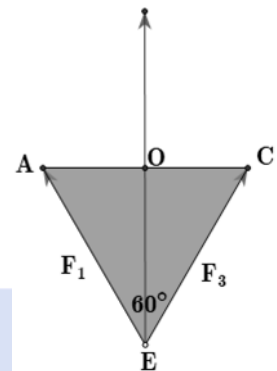
$$\text{Ta có } \vec{F}_1 + \vec{F}_3 = 2\vec{EO} \Rightarrow |\vec{F}_1 + \vec{F}_3| = 2|\vec{EO}| \Rightarrow |\vec{F}_1|\sqrt{3} = 4700\sqrt{3}$$

$$\text{Tương tự ta cũng có } \vec{F}_2 + \vec{F}_4 = |\vec{F}_2|\sqrt{3} = 4700\sqrt{3}$$

Vậy trọng lực ô tô là:

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4) - (\text{trọng lực khung sắt}) \approx 13281 \text{ (N)}$$

-----HẾT-----



WE COACH.WE INSPIRE