

Dạng 3: Tìm tham số m để hàm số có cực trị hoặc đạt cực trị tại điểm cho trước

- Tìm m để hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 cho trước ($f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0)

Giải điều kiện $y'(x_0) = 0$ để tìm m

Lập bảng biến thiên với m vừa tìm được và chọn giá trị m nào thỏa mãn yêu cầu.

- Biện luận cực trị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$

Tính đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ với $\Delta_{y'} = b^2 - 3ac$

Nếu $\begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$ thì hàm số có hai điểm cực trị

Nếu $\Delta_{y'} \leq 0$ hoặc suy biến $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ thì hàm số không có cực trị

Chú ý:

- Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của $y' = 0$ thì $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a}$ và $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a}$

Hệ thức 1: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$

Hệ thức 2: $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2$

Hệ thức 3: $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 \cdot x_2(x_1 + x_2)$

- Các công thức tính toán thường gặp

Độ dài $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$

Khoảng cách từ M đến Δ : $d(M, \Delta) = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, với $\Delta: Ax + By + C = 0$

Tam giác ABC vuông tại $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1|$, với $\overrightarrow{AB} = (a_1; b_1)$, $\overrightarrow{AC} = (a_2; b_2)$

- Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y = -\frac{2}{9a}(b^2 - 3ac)x + d - \frac{bc}{9a}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực tiểu tại $x = 3$

b) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$

c) $y = -x^3 + mx^2 + (m^2 - 12)x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = -1$

d) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại điểm $x = 3$

Lời giải

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực tiểu tại $x = 3$

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 4$; y'

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ khi $\begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ 6 - 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 5 \\ m < 3 \end{cases}$

b) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$

Có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$, $y'' = 2x - 2m$

Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$ khi $\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ 2 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$

Tư vấn hướng nghiệp cho học sinh bằng phân tích nhân tướng học – xem chỉ tay – tử vi

c) $y = -x^3 + mx^2 + (m^2 - 12)x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = -1$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = -3x^2 + 2mx + m^2 - 12$; y'' .

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ khi $\begin{cases} y'(-1) = 0 \\ y''(-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3(-1)^2 + 2m(-1) + m^2 - 12 = 0 \\ -6(-1) + 2m > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 15 = 0 \\ m > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \text{ (TM)} \\ m = -3 \text{ (L)} \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$$

d) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại điểm $x = 3$

Ta có $y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 4)$, y'' .

Hàm số đạt cực trị tại $x = 3$ suy ra $y'(3) = 0 \Rightarrow m^2 - 6m + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 5 \end{cases}$.

Với $m = 5$ ta có $y''(3) < 0$ suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.

Với $m = 1$ ta có $y''(3) > 0$ suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Vậy $m = 5$ thì hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại điểm $x = 3$.

Bài tập 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số (đồ thị hàm số)

a) $y = \frac{2}{3}x^3 + (m - 1)x^2 + (m^2 - 4m + 3)x - 1$ có hai điểm cực trị

b) $y = x^3 - 3(m + 1)x^2 + 3(3m + 7)x + 1$ có cực trị

c) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m + 2)x + 2024$ không có cực trị

d) $y = \frac{1}{3}(m^2 - 1)x^3 + mx^2 + 3x + 1$ có cực đại

e) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(3m + 2)x^2 + (2m^2 + 3m + 1)x - 2$ có điểm cực đại x_{CD} và điểm cực tiểu x_{CT} thỏa mãn $3x_{CD}^2 = 4x_{CT}$

f) $y = x^3 - 3mx + 1$ có hai điểm cực trị B và C sao cho tam giác ABC cân tại A với $A(2; 3)$.

g) $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ có điểm cực đại và cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O .

h) $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác AOB là tam giác cân tại O .

Lời giải

a) $y = \frac{2}{3}x^3 + (m - 1)x^2 + (m^2 - 4m + 3)x - 1$ có hai điểm cực trị

Đạo hàm $y' = 2x^2 + 2(m - 1)x + m^2 - 4m + 3$

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2(m - 1)x + m^2 - 4m + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 - 2(m^2 - 4m + 3) > 0 \Leftrightarrow -m^2 + 6m - 5 > 0 \Leftrightarrow 1 < m < 5$.

Vậy $1 < m < 5$ thỏa yêu cầu bài toán.

b) $y = x^3 - 3(m + 1)x^2 + 3(3m + 7)x + 1$ có cực trị

Đạo hàm $y' = 3x^2 - 6(m + 1)x + 3(3m + 7)$

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9(m + 1)^2 - 9(3m + 7) > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 6 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < -2 \end{cases}$$

c) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m + 2)x + 2024$ không có cực trị

Ta có đạo hàm $y' = x^2 - 2mx + m + 2$

Hàm số đã cho không có cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ vô nghiệm hoặc vô nghiệm kép hay $\Delta_{y'} \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - (m + 2) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 2$.

d) $y = \frac{1}{3}(m^2 - 1)x^3 + mx^2 + 3x + 1$ có cực đại

Đạo hàm $y' = (m^2 - 1)x^2 + 2mx + 3$

Trường hợp 1: $m = 1$ ta có $y' = 2x + 3$

Xét dấu y'

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
y'		-	0
			+

$\Rightarrow m = 1$ loại

Trường hợp 2: $m = -1$ ta có $y' = -2x + 3$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
y'		+	0
			-

$\Rightarrow m = -1$ thỏa mãn

Với $m \neq \pm 1$

Hàm số có cực đại $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 3(m^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow 3 - 2m^2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{6}}{2} < m < \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 0; 1\}$ kết hợp với điều kiện ta được $m = 0$

e) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(3m + 2)x^2 + (2m^2 + 3m + 1)x - 2$ có điểm cực đại x_{CD} và điểm cực tiểu x_{CT} thỏa mãn $3x_{CD}^2 = 4x_{CT}$

Ta có $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(3m + 2)x^2 + (2m^2 + 3m + 1)x - 2 \Rightarrow y' = x^2 - (3m + 2)x +$

$(2m^2 + 3m + 1)$ có $\Delta = m^2 \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2m + 1 \\ x = m + 1 \end{cases}$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi $m \neq 0$.

Trường hợp 1: $x_{CD} = 2m + 1; x_{CT} = m + 1$.

Do $a = \frac{1}{3} > 0$ nên suy ra $x_{CD} < x_{CT} \Leftrightarrow 2m + 1 < m + 1 \Leftrightarrow m < 0$.

Lại có $3x_{CD}^2 = 4x_{CT} \Leftrightarrow 3(2m + 1)^2 = 4(m + 1) \Leftrightarrow 12m^2 + 8m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{6}$.

Với điều kiện $m < 0 \Rightarrow m = \frac{-2 - \sqrt{7}}{6}$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $x_{CD} = m + 1; x_{CT} = 2m + 1$

Do $a = \frac{1}{3} > 0$ nên suy ra $x_{CD} < x_{CT} \Leftrightarrow m + 1 < 2m + 1 \Leftrightarrow m > 0$.

Lại có $3x_{CD}^2 = 4x_{CT} \Leftrightarrow 3(m + 1)^2 = 4(2m + 1) \Leftrightarrow 3m^2 - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{3} \end{cases}$.

Với điều kiện $m > 0 \Rightarrow m = 1$ thỏa mãn.

f) $y = x^3 - 3mx + 1$ (1) có hai điểm cực trị B và C sao cho tam giác ABC cân tại A với $A(2; 3)$

Ta có $y' = 3x^2 - 3m$.

Tư vấn hướng nghiệp cho học sinh bằng phân tích nhân tướng học – xem chỉ tay – tử vi

Đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị B và C khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt, suy ra $m > 0$.

Khi đó, không giảm tổng quát suy ra $B(\sqrt{m}; 1 - 2m\sqrt{m}); C(-\sqrt{m}; 2m\sqrt{m} + 1); A(2; 3)$.

Tam giác ABC cân tại A suy ra $AB = AC$. $AB^2 = AC^2 \Leftrightarrow (\sqrt{m} - 2)^2 + (2 + 2m\sqrt{m})^2 = (\sqrt{m} + 2)^2 + (2 - 2m\sqrt{m})^2 \Leftrightarrow 8\sqrt{m} - 16m\sqrt{m} = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 & (\text{loại vì } m > 0) \\ m = \frac{1}{2} & (\text{thỏa mãn}) \end{cases}$

Với $m = \frac{1}{2}$ thì $BC = \sqrt{(2\sqrt{m})^2 + (4m\sqrt{m})^2} = \sqrt{4m + 16m^3} = \sqrt{4 \cdot \frac{1}{2} + 16 \cdot \frac{1}{8}} = 2$.

Thử lại thấy ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Gọi I là trung điểm của BC, suy ra $I(0; 1)$ và $IA = \sqrt{2^2 + (3 - 1)^2} = 2\sqrt{2}$.

Vậy diện tích tam giác ABC bằng $\frac{1}{2} \cdot IA \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2 = 2\sqrt{2}$.

g) $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ có điểm cực đại và cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 3m^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + m^2 - 1 = 0$ (1)

Để hàm số có hai điểm cực đại và cực tiểu thì (1) phải có hai nghiệm phân biệt, nên $\Delta' = m^2 > 0$ suy ra $m \neq 0$.

Dễ thấy (1) có hai nghiệm $x_1 = 1 - m$ và $x_2 = 1 + m$ nên $A(1 - m; -2 - 2m^3)$ và $B(1 + m; -2 + 2m^3)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số

Tam giác OAB vuông ở O $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow (1 - m)(1 + m) + (-2 - 2m^3)(-2 + 2m^3) = 0 \Leftrightarrow 1 - m^2 + 4(1 - m^6) = 0 \Leftrightarrow (1 - m^2)(4m^4 + 4m + 5) = 0 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

h) $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác AOB là tam giác cân tại O.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$. Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Suy ra đồ thị hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị.

Gọi $A(0; m); B(2; m - 4)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Tam giác AOB cân tại O khi và chỉ khi $OA = OB$ hay $OA^2 = OB^2$.

Mà $\overrightarrow{OA}(0; m); \overrightarrow{OB}(2; m - 4)$. Từ đó suy ra $m^2 = 2^2 + (m - 4)^2 \Leftrightarrow 20 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 2$

A. $0 < m \leq 4$. B. $m > 4$. C. $m = 0$. D. $0 \leq m < 4$.

Lời giải

Ta có: $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$

Khi đó $y' = 3x^2 - 6x + m; y'$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2 \Rightarrow \begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 6 > 0 \end{cases}$.

Câu 2: Cho hàm số $y = x^3 + 3(m^2 - m + 2)x^2 + 3(3m^2 + 1)x + 2022m$, tìm các giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.

A. $m = 1$.

B. $m = 2$.

C. $m = 3$.

D. $m = 4$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 + 6(m^2 - m + 2)x + 3(3m^2 + 1) = 3[x^2 + 2(m^2 - m + 2)x + 3m^2 + 1]$;

$y'(m^2 - m + 2)$.

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 3 = 0 \\ 6m(m - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \\ m(m - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$.

Câu 3: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^3 - (m^2 + 1)x^2 + 2x - 3$ đạt cực tiểu tại $x = 1$. Khi đó

A. $S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

B. $S = \{0\}$.

C. $S = \left\{\frac{3}{2}; 0\right\}$.

D. $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Lời giải

TH1: $m = 0 \Rightarrow y = -x^2 + 2x - 3 \Rightarrow$ Hàm số chỉ có cực đại.

TH2: $m \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} y' = 3mx^2 - 2(m^2 + 1)x + 2 \\ y'' = 6mx - 2(m^2 + 1) \end{cases}$

Do hàm số đã cho là hàm bậc 3 nên điều kiện cần để hàm đạt cực tiểu tại $x = 1$ là $y'(1) =$

$0 \Leftrightarrow 3m - 2(m^2 + 1) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow m = \frac{3}{2}$

Khi $m = \frac{3}{2}$ ta có $y''(1) = 9 - 2\left(\frac{9}{4} + 1\right) = \frac{5}{2} > 0$ nên $m = \frac{3}{2}$ thỏa mãn.

Câu 4: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m - 1)x$ đạt giá trị cực đại tại $x = 1$.

A. $m = 2$.

B. $m = 1$.

C. $m = 3$.

D. $m = 0$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m - 1$ và $y'' = 2x - 2m$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ nên $y'(1) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}$.

Với $m = 0$ thì $y''(1) = 2 > 0$ suy ra hàm đạt cực tiểu tại $x = 1$ (loại).

Với $m = 3$ thì $y''(1) = -4 < 0$ suy ra hàm đạt cực đại tại $x = 1$ (nhận).

Vậy $m = 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = -x^3 + 2(2m - 1)x^2 - (m^2 - 8)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đạt giá trị cực đại tại điểm $x = -1$.

A. $m = 3$.

B. $m = -9$.

C. $m = 1$.

D. $m = -2$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = -3x^2 + 4(2m - 1)x - (m^2 - 8)$

Hàm số đạt giá trị cực đại tại điểm $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0 \Rightarrow -m^2 - 8m + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -9 \end{cases}$

Với $m = 1 \Rightarrow f(x) = -x^3 + 2x^2 + 7x + 2$

Có $f'(x) = -3x^2 + 4x + 7; f'(x)$

Mà $\begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f''(-1) < 0 \end{cases}$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1 \Rightarrow m = 1$ không thỏa mãn yêu cầu bài ra.

Với $m = -9 \Rightarrow f(x) = -x^3 - 38x^2 - 73x + 2$

Ta có $f'(x) = -3x^2 - 76x - 73; f'(x)$

Mà $\begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f''(-1) > 0 \end{cases}$ Hàm số đạt cực đại tại $x = -1 \Rightarrow m = -9$ thỏa mãn yêu cầu bài ra.

Vậy $m = -9$ thỏa mãn đề bài.

Câu 6: Khi hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 2)x + 2021$ đạt cực đại tại $x = 1$ thì giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(1; 4)$.

B. $(-3; 0)$.

C. $(0; 3)$.

D. $(-2; 0)$.

Lời giải

Ta có $y' = -x^2 - 2mx + m^2 - 2$ và y' .

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ thì $y'(1) = 0$

$\Leftrightarrow -1^2 - 2m \cdot 1 + m^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -1 \end{cases}$

Với $m = 3$ ta có $y''(1) < 0$ nên $x = 1$ là điểm cực đại.

Suy ra $m = 3$ thỏa mãn.

Với $m = -1$ ta có $y' = -x^2 + 2x - 1 = -(x - 1)^2 \leq 0 \Rightarrow$ hàm số luôn nghịch biến, nên hàm số không có cực trị.

Suy ra $m = -1$ không thỏa mãn.

Vậy $m = 3$ thì hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 2)x + 2021$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - (2m + 1)x^2 - (5m + 4)x + 10$ đạt cực đại tại điểm $x = -1$.

A. $m = -1$. B. $m = 3$. C. $m = 1$. D. $m = -2$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 2(2m + 1)x - (5m + 4)$ có $y'' = 6x - 2(2m + 1)$

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$ khi $\begin{cases} y'(-1) = 0 \\ y''(-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 1 = 0 \\ -4m - 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m > -2 \end{cases} \Rightarrow m = 1$.

Câu 8: Cho hàm số $y = x^3 + (m^2 - m + 1)x^2 + (3m^2 - 4)x + m + 2$. Có bao nhiêu giá trị của m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 + 2(m^2 - m + 1)x + 3m^2 - 4$; $y'(m^2 - m + 1)$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ thì $y'(-1) = 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1; m = -3$

Thử lại:

Khi $m = 1$, $y'(-1)$: Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ (Không thỏa yêu cầu bài toán)

Khi $m = -3$, $y'(-1)$: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ (Thỏa yêu cầu bài toán)

Vậy có 1 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m^2 - 2m - 3)x + 4$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

A. $m = -1$ hoặc $m = 3$. B. $m = -1$.

C. $m = 3$. D. $m = 1$ hoặc $m = 3$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm $y' = x^2 + 2mx + m^2 - 2m - 3$.

Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m^2 - 2m - 3)x + 4$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y'(0) = 0 &\Leftrightarrow 0^2 + 2m \cdot 0 + m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Với $m = -1$, $y' = x^2 - 2x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$; $y'' = 2x - 2 \Rightarrow y''(0) = -2 < 0$

Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m^2 - 2m - 3)x + 4$ đạt cực đại tại điểm $x = 0$ khi $m =$

–1.

Vậy $m = -1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m = 3$, $y' = x^2 + 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases}; y'' = 2x + 6 \Rightarrow y''(0) = 6 > 0$.

Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m^2 - 2m - 3)x + 4$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$ khi $m = 3$ (thỏa mãn).

Câu 10: Giá trị nguyên lớn nhất của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + (m-1)x + 3 - 2m}{x+m}$ đạt cực tiểu tại $x = -1$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A.** $(0; \sqrt{5})$. **B.** $(-2; 0)$. **C.** $(-1; 2)$. **D.** $(\sqrt{5}; 5)$.

Lời giải

Điều kiện xác định $x \neq -m$.

Đạo hàm cấp một và cấp hai của hàm số lần lượt là: $y' = 1 + \frac{m-3}{(x+m)^2}$, $y'' = \frac{-2(m-3)}{(x+m)^3}$.

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y'(-1) = 0 \\ y''(-1) > 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{m-3}{(-1+m)^2} = 0 \\ \frac{-2(m-3)}{(-1+m)^3} > 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}$$

Nghiệm nguyên lớn nhất của m là $m = 2$ nên chọn khoảng $(0; \sqrt{5})$.

Câu 11: Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m^2 + 2)x - m + 1$ đạt cực đại tại $x = 1$.

- A.** $\begin{cases} m = 1 \\ m = 5 \end{cases}$. **B.** Không tồn tại m .
C. $m = 1$. **D.** $m = 5$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + (m^2 + 2)$, $y'' = 6x - 6m$.

Hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m^2 + 2)x - m + 1$ đạt cực đại tại $x = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 6m + m^2 + 2 = 0 \\ 6 - 6m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} m = 1 \\ m = 5 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$$

Câu 12: Cho biết hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3$. Khi đó

- A.** $m \leq -1$. **B.** $m \in (2; 3)$. **C.** $m \in (1; 2)$. **D.** $m \in (0; 1)$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m$

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 khi $\Delta' = (-3)^2 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$

Theo định lý Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$

Theo đề bài ta có $x_1^2 + x_2^2 = 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 3 \Leftrightarrow 2^2 - \frac{2}{3}m = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$

Vậy $m = \frac{3}{2}$ thỏa mãn đề bài.

Câu 13: Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 - 3x_1 x_2 = 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m_0 \in (-4; -2)$. B. $m_0 \in (2; 4)$. C. $m_0 \in (0; 2)$. D. $m_0 \in (-2; 0)$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m = 0(*)$.

Hàm số có hai điểm cực trị $x_1, x_2 \Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Theo định lý Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = \frac{m}{3} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 - 3x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow 2 - m = 1 \Leftrightarrow m = 1$

Vậy $m_0 = 1 \in (0; 2)$.

Câu 14: Cho hàm số $y = \left(\frac{m-1}{3}\right)x^3 + (m^2 - 4)x^2 + (m^2 - 9)x + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để hàm số có hai điểm cực trị trái dấu?

A. 18. B. 19. C. 17. D. 16.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = (m - 1)x^2 + 2(m^2 - 4)x + m^2 - 9$.

Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow \frac{m^2 - 9}{m - 1} < 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} m < -3 \\ 1 < m < 3 \end{cases}$$

Do m nguyên và $m \in [-20; 20]$ nên $m \in \{-20; -19; \dots; -5; -4; 2\}$. Vậy có 18 giá trị của m .

Câu 15: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m + 3)x^2 + (12 - m)x + 2020$ có hai điểm cực trị nằm về bên phải trục tung?

A. 9. B. 10. C. 11. D. 12.

Lời giải

Ta có $y' = x^2 - 2(m+3)x + 12 - m$.

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về bên phải trục tung $\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = [-(m+3)]^2 - (12-m) > 0 \\ S = x_1 + x_2 = 2(m+3) > 0 \\ P = x_1 x_2 = 12 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 7m - 3 > 0 \\ m + 3 > 0 \\ 12 - m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{-7 + \sqrt{61}}{2} \\ m < \frac{-7 - \sqrt{61}}{2} \\ -3 < m < 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-7 + \sqrt{61}}{2} < m < 12. \text{ Do } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m \in \{1; 2; \dots; 11\}.$$

Vậy có tất cả 11 giá trị nguyên thỏa mãn.

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+2)x^2 + (m^2 + 4m + 3)x + 2021m + 2022(C)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có các điểm cực trị nằm về cùng một phía của trục tung.

- A. $m \in \emptyset$. B. $-3 < x < -1$. C. $\begin{cases} m > -1 \\ m < -3 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m > -1 \\ m < -3 \end{cases}$.

Lời giải

Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 4m + 3 = 0$.

Đồ thị hàm số có các điểm cực trị nằm về cùng một phía của trục tung

$\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+2)^2 - (m^2 + 4m + 3) > 0 \\ m^2 + 4m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ m > -1 \\ m < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m < -3 \end{cases}$$

Câu 17: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 + 5m + 4)x - 1$ có hai điểm cực trị trái dấu?

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1

Lời giải

Ta có: $f'(x) = x^2 - 2mx + m^2 + 5m + 4$.

Để hàm số có hai điểm cực trị trái dấu thì $f'(x) = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

Suy ra $ac < 0 \Leftrightarrow m^2 + 5m + 4 < 0 \Leftrightarrow -4 < m < -1$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3; -2\}$

Vậy có 2 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 18: Tìm giá trị của tham số m để điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ thuộc đường thẳng $d: y = x + 1$.

- A. $m = -5$. B. $m = 31$. C. $m = 23$. D. $m = 5$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$.

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vì $a > 0$ nên điểm cực tiểu có tọa độ $I(3; m - 27)$ mà $I \in d \Leftrightarrow 3 + 1 = -27 + m \Leftrightarrow m = 31$.

Câu 19: Cho đường cong $(C_m): y = x^3 - 3(m - 1)x^2 - 3(m + 1)x + 3$. Gọi S là tập các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho O, A, B thẳng hàng. Tổng các phần tử của S bằng

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6(m - 1)x - 3(m + 1) = 3[x^2 - 2(m - 1)x - (m + 1)]$.

Đồ thị (C_m) có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow x^2 - 2(m - 1)x - (m + 1) = 0(*) \text{ có hai nghiệm phân biệt}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = (m - 1)^2 + m + 1 > 0 \Leftrightarrow m^2 - m + 2 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ta có } y = y' \cdot \left[\frac{1}{3}x - \frac{m-1}{3} \right] + [-2m^2 + 2m - 4]x + 4 - m^2.$$

Suy ra phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm cực trị là

$$y = (-2m^2 + 2m - 4)x + 4 - m^2.$$

Do O, A, B thẳng hàng nên $4 - m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm 2$.

Suy ra $S = \{2; -2\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là 0.

Câu 20: Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Ta có: $y' = 2x^2 - 2mx - 2(3m^2 - 1) = 2[x^2 - mx - (3m^2 - 1)]$.

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow x^2 - mx - (3m^2 - 1) = 0(*)$ có hai nghiệm

$$\text{phân biệt} \Leftrightarrow \Delta = m^2 + 4(3m^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow 13m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m^2 > \frac{4}{13} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{13}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{13}}; +\infty\right).$$

$$\text{Theo Viét ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -(3m^2 - 1) \end{cases}$$

$$\text{Theo bài } x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 1 + 2m = 1 \Leftrightarrow 3m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 (\text{ko tm}) \\ m = \frac{2}{3} (\text{tm}) \end{cases}$$

Kết luận: Có 1 giá trị tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 21: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 + 4(m - 2)x^2 - 7x + 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = -4$?

A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = x^3 + 4(m - 2)x^2 - 7x + 1 \quad (1) \Rightarrow y' = 3x^2 + 8(m - 2)x - 7$$

$$\text{Xét phương trình } 3x^2 + 8(m - 2)x - 7 = 0 \quad (2)$$

Suy ra hàm số (1) luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 với mọi m .

Ta thấy $ac = -21 < 0$ nên phương trình (2) có hai nghiệm trái dấu

Suy ra hàm số (1) luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 với mọi m .

$$\Rightarrow x_1 < 0; x_2 > 0 \Rightarrow |x_1| = -x_1; |x_2| = x_2.$$

$$\text{Ta có: } |x_1| - |x_2| = -4 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 = -4 \Leftrightarrow -(x_1 + x_2) = -4 \Leftrightarrow \frac{8(m-2)}{3} = -4 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

Vậy không có giá trị nguyên nào của m thỏa bài toán.

Câu 22: Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 - 3x_1 x_2 = 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m_0 \in (-4; -2)$. B. $m_0 \in (2; 4)$. C. $m_0 \in (0; 2)$. D. $m_0 \in (-2; 0)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 6x + m; y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m = 0 (*).$$

Hàm số có hai điểm cực trị $x_1, x_2 \Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

$$\text{Theo định lý Vi-et ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m}{3} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 - 3x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow 2 - m = 1 \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy $m_0 = 1 \in (0; 2)$.

Câu 23: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m - 1)x - m + 2$ có hai điểm cực trị dương là

A. $m \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$. B. $m \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. C. $m \in (1; +\infty)$. D.

$$m \in (-\infty; 1) \cup (1; 2).$$

Lời giải

Ta có $y' = x^2 - 2mx + 2m - 1$. Để hàm số có hai điểm cực trị dương thì phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m + 1 > 0 \\ a.c = 2m - 1 > 0 \\ -\frac{b}{a} = 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{1}{2} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty).$$

$$\text{Vậy } m \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty).$$

Câu 24: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Ox ?

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của Ox

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $y = x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

$$\text{Mà } x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 6x^2 + 12x + m^2x - 2m^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 6x + m^2 - 1) = 0.$$

Do đó phương trình trên luôn có một nghiệm $x = 2$ nên phương trình $f(x) = x^2 - 6x + m^2 - 1 = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 - m^2 > 0 \\ -9 + m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -\sqrt{10} < m < \sqrt{10} \\ m \neq \pm 3 \end{cases}.$$

Với $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 25: Cho hàm số $y = x^3 - (2m + 1)x^2 + (m + 1)x + m - 1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m < 20$ để hàm số có hai giá trị cực trị trái dấu?

A. 19.

B. 20.

C. 21.

D. 22.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = x^3 - (2m + 1)x^2 + (m + 1)x + m - 1.$$

Hàm số có hai giá trị cực trị trái dấu khi và chỉ khi đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow x^3 - (2m + 1)x^2 + (m + 1)x + m - 1 = 0 \text{ có ba nghiệm phân biệt}$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2mx + 1 - m) = 0 \text{ có ba nghiệm phân biệt}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 1 - m = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt khác 1.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 1 > 0 \\ 2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ m > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ m \neq \frac{2}{3} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $m \in \mathbb{N}, m < 20$ ta được $1 \leq m < 20, m \in \mathbb{N}$. Vậy có 19 số tự nhiên thỏa mãn bài toán.

- Câu 26:** Cho hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}(m - 2)x^2 - 3(m - 1)x + 1, m$ là tham số. Số giá trị $m > 0$ để hàm số có giá trị cực đại, giá trị cực tiểu lần lượt là y_{CD}, y_{CT} thỏa mãn $2y_{CD} + y_{CT} = 4$ là
- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 - 3(m - 2)x - 3(m - 1); y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - (m - 2)x - m + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = m - 1 \end{cases}$$

Với $m > 0$ thì $-1 < m - 1$. Khi đó hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và đạt cực tiểu tại $x = m - 1$.

$$\text{Do đó: } y_{CD} = y(-1) = \frac{3m}{2}, y_{CT} = y(m - 1) = -\frac{1}{2}(m + 2)(m - 1)^2 + 1.$$

$$\text{Từ giả thiết: } 2y_{CD} + y_{CT} = 4 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{3m}{2} - \frac{1}{2}(m + 2)(m - 1)^2 + 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow 6m - 6 - (m + 2)(m - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m^2 + m - 8) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Do } m > 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{-1 + \sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn bài toán.

- Câu 27:** Cho hàm số $y = x^3 + 2(m - 2)x^2 - 5x + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = -2$.
- A. $\frac{7}{2}$. B. -1 . C. $\frac{1}{2}$. D. 5.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 + 4(m - 2)x - 5.$$

Khi đó $\Delta' = 4(m - 2)^2 + 15 > 0$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 ($x_1 < x_2$).

Vì $a, c < 0$ nên $x_1 < 0 < x_2$

$$\text{Suy ra: } |x_1| - |x_2| = -2 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 = -2 \Leftrightarrow \frac{b}{a} = -2 \Leftrightarrow \frac{4(m-2)}{3} = -2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Câu 28: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

A. 0. **B.** 6. **C.** -6. **D.** 3

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 1)$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 1 \\ x = m + 1 \end{cases} \Rightarrow A\left(m - 1; \frac{m^3 - 3m + 2}{3}\right) \text{ và } B\left(m + 1; \frac{m^3 - 3m - 2}{3}\right)$$

Để thấy phương trình đường thẳng $AB: y = -\frac{2}{3}x + \frac{m(m^2 - 1)}{3}$ nên AB không thể song song hoặc trùng với $d \Rightarrow A, B$ cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$ nếu trung điểm I của AB nằm trên d

$$I\left(m; \frac{m^3 - 3m}{3}\right) \in d \Rightarrow \frac{m^3 - 3m}{3} = 5m - 9 \Leftrightarrow m^3 - 18m + 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Với $m = 3 \Rightarrow A, B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d .

Với $m = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow A, B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d .

Tổng các phần tử của S bằng 0.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 + 2x^2 + mx + 1$, với m là tham số

- a) Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $-2 < m < 2$
- b) Hàm số có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi $m = 0$ hoặc $m = 2$
- c) Hàm số không có cực trị khi và chỉ khi $m \leq -2$ hoặc $m \geq 2$
- d) Hàm số có hai điểm cực trị thỏa mãn $x_{CD} < x_{CT}$ và chỉ khi $0 < m < 2$

Lời giải

a) Sai: Ta có $y' = mx^2 + 4x + m$. Hàm số có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4 - m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2 < m < 2 \end{cases} \quad (1)$

b) Sai: Hàm số có đúng một điểm cực trị khi hàm số này suy biến về hàm bậc hai nghĩa là $\frac{m}{3} = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Tư vấn hướng nghiệp cho học sinh bằng phân tích nhân tướng học – xem chỉ tay – tử vi

c) Đúng: Với $m = 0$ thì hàm số trở thành $y = 2x^2 + 1$. Hàm số này có một điểm cực tiểu. Điều này không thỏa mãn yêu cầu bài toán

Với $m \neq 0$. Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ 4 - m^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \leq -2 \\ m \geq 2 \end{cases}$$

d) Đúng: Dựa vào dạng đồ thị hàm số bậc ba, hàm số có hai điểm cực trị thỏa mãn $x_{CD} < x_{CT}$ khi $m > 2(2)$

Từ (1) và (2) suy ra giá trị m cần tìm là $0 < m < 2$.

Câu 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$, với m là tham số

a) Hàm số luôn có hai điểm cực trị với mọi m

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ khi $m = 2$

c) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng $2\sqrt{5}$

d) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số luôn thuộc đường thẳng cố định với hệ số góc $k = -3$

Lời giải

a) Đúng: Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m - 1 \\ x_2 = m + 1 \end{cases}$

Do $x_1 \neq x_2$ với mọi m nên hàm số luôn có hai điểm cực trị.

b) Đúng: Dễ thấy $x = m + 1$ là điểm cực tiểu suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ khi $m = 2$

c) Đúng: Với mọi m , tọa độ hai điểm cực trị là $A(m + 1; -3m - 2)$ và $B(m - 1; -3m + 2)$

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là: $AB = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = 2\sqrt{5}$

d) Đúng: Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m - 1 \\ x_2 = m + 1 \end{cases}$

Vì là hàm số bậc ba với hệ số $a = 1 > 0$ nên điểm cực tiểu của hàm số là $A(m + 1; -3m - 2)$

Lại có $-3m - 2 = -3(m + 1) + 1$ nên điểm cực tiểu của hàm số luôn thuộc đường thẳng $d: y = -3x + 1$ và có hệ số góc $k = -3$.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1}$

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

b) Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm nguyên dương phân biệt

b) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị này nằm về hai phía của trục tung

d) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình $y = x + 1$

Lời giải

a) Sai: Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

b) Sai: $y' = \frac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y(1) = 2 \\ x = -2, y(-2) = -1 \end{cases}$.

c) Đúng: Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $M(1; 2)$ và $N(-2; -1)$ và hai điểm cực trị này nằm về hai phía của trục tung

d) Đúng: Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị M, N của đồ thị hàm số đã cho là: $y = x + 1$.

Chú ý:

Áp dụng tính chất: Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số hữu tỷ $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ thì giá trị cực trị tương ứng của hàm số là $sy_0 = \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$. Suy ra với bài toán trên ta có phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y = \frac{(x^2+2x+3)'}{(2x+1)'} = x + 1$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{x^2-2mx+m+2}{x-m}$, với m là tham số

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{m\}$

b) Có hai giá trị nguyên của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị

c) Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ khi $m = \frac{1}{2}$

d) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình $y = 2x - 2m$

Lời giải

a) Đúng: Hàm số xác định khi $x - m \neq 0 \Leftrightarrow x \neq m$ nên tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

b) Đúng: Đạo hàm $y' = \frac{x^2-2mx+2m^2-m-2}{(x-m)^2}$. Để hàm số có hai điểm cực trị thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác m hay $g(x) = x^2 - 2mx + 2m^2 - m - 2$ có hai nghiệm phân biệt khác m .

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + m + 2 > 0 \\ m^2 - m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-1; 2)$$

Vì m nguyên nên $m = \{0; 1\}$ nên có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

c) Đúng: Hàm số đạt cực trị tại $x = -1$ thì $y'(-1) = 0 \Leftrightarrow 2m^2 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$

Thử lại với $m = \frac{1}{2}$ thì $y' = \frac{x^2-x-2}{x-\frac{1}{2}}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0.5	2	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	y_1		$+\infty$	y_2		$+\infty$

Vậy với $m = \frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

d) Đúng: Cho hàm số $y = \frac{u(x)}{v(x)}$. Nếu hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có dạng $y = \frac{u'(x)}{v'(x)}$.

Áp dụng vào bài toán ta được $y = \frac{(x^2 - 2mx + m + 2)^2}{(x - m)^2} = 2x - 2m$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Biết đồ thị của hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có một điểm cực trị là $A(-1; 29)$ và đi qua điểm $B(2; 2)$. Tính $a + b + c$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 + 2ax + b$.

Biết đồ thị của hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có một điểm cực trị là $A(-1; 29)$

và đi qua điểm $B(2; 2)$ nên ta có hệ:
$$\begin{cases} y(-1) = 29 \\ y'(-1) = 0 \\ y(2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + c = 29 \\ 3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0 \\ 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -9 \\ c = 24 \end{cases}$$

Khi đó $a + b + c = -3 - 9 + 24 = 12$.

Câu 2: Hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$ khi $m = \frac{a}{b}$. Tính $S = a^2 + b^2$.

Lời giải

Ta có $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3} \Rightarrow y' = 2x^2 - 2mx - 2(3m^2 - 1)$.

Để y có hai cực trị x_1, x_2 thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt, tức là:

$$\Delta' = m^2 + 4(3m^2 - 1) = 13m^2 - 4 > 0 \text{ hay } m \in \left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{13}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{13}}; +\infty\right).$$

Ta lại có $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 1 + 2m = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (loại)} \\ m = \frac{2}{3} \text{ (thỏa)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow S = 13..$$

Câu 3: Đồ thị hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + n$ có điểm cực tiểu là $I(1; 3)$. Khi đó $m + n$ bằng

Lời giải

$$\text{Ta có } y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + n \Rightarrow y' = 3x^2 - 4mx + m^2 \Rightarrow y'' = 6x - 4m$$

Do $I(1; 3)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + n$

$$\Rightarrow \begin{cases} I(1; 3) \in y \\ y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m + m^2 + n = 3 \\ m^2 - 4m + 3 = 0 \\ 6 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m + m^2 + n = 3 \\ m = 1 \\ m = 3 \\ m < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 3 \end{cases}$$

Vậy $m + n = 4$.

Câu 4: Để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$ thì giá trị của tham số m bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Đạo hàm } y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$$

$$\text{Xét } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m}, (m > 0) \end{cases}$$

Tọa độ ba điểm cực trị là: $A(0; m - 1), B(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1), C(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1)$

Gọi H là trung điểm của cạnh BC thì ta có $\begin{cases} AH = m^2 \\ BC = 2\sqrt{m} \end{cases}$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = m^2\sqrt{m} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow m = 2$$

Câu 5: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = x^3 - 6x^2 + (3m + 6)x - m - 6$ đạt cực đại cực tiểu đồng thời hai giá trị cực trị cùng dấu

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = 3x^2 - 12x + 3(m + 2)$.

$$\text{Giải phương trình } y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 3(m + 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + m + 2 = 0$$

Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (-2)^2 - (m + 2) > 0 \Leftrightarrow m < 2$$

$$y = \frac{1}{3}(x - 2)y' + 2(m - 2)x + m - 2$$

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị. Khi đó: $y'(x_1) = 0, y'(x_2) = 0$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị: $y = 2(m - 2)x + m - 2$

$$y_1 = 2(m - 2)x_1 + m - 2, y_2 = 2(m - 2)x_2 + m - 2$$

Áp dụng định lý Vi - ét cho phương trình: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = m + 2 \end{cases}$

Hai giá trị cực trị cùng dấu $\Leftrightarrow y_1 \cdot y_2 > 0 \Leftrightarrow [2(m - 2)x_1 + m - 2] \cdot [2(m - 2)x_2 + m - 2] > 0$

$$\Leftrightarrow (m - 2)^2[4x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 1] > 0 \Leftrightarrow (m - 2)^2[4.4 + 2(m + 2) + 1] > 0$$

$$\Leftrightarrow (m-2)^2(2m+21) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m > -\frac{21}{2} \end{cases}. \text{ Kết hợp điều kiện ta có: } \frac{-21}{2} < m < 2$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-10; -9; \dots; -4; -3; -3; -2; -1; 0; 1\}$. Vậy có 12 số nguyên.

Câu 6: Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + 4m^2 - 2$ có đồ thị (C) và điểm $C(2; 4)$. Tính tổng bình phương các giá trị của m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 6.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 + 6mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2m \end{cases}.$$

Đồ thị (C) có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow -2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

$$\text{Khi đó } A(0; 4m^2 - 2), B(-2m; 4m^3 + 4m^2 - 2) \Rightarrow AB = \sqrt{4m^2 + 16m^6} = 2|m|\sqrt{4m^4 + 1}.$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } AB \text{ là: } \frac{x-0}{-2m-0} = \frac{y-(4m^2-2)}{4m^3} \Leftrightarrow 2m^2x + y - 4m^2 + 2 = 0.$$

$$d(C, AB) = \frac{|4m^2 + 4 - 4m^2 + 2|}{\sqrt{4m^4 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{4m^4 + 1}}.$$

Diện tích tam giác ABC là

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d(C, AB) = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2|m| \cdot \sqrt{4m^4 + 1} \cdot \frac{6}{\sqrt{4m^4 + 1}} = 6 \Leftrightarrow |m| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Vậy tổng bình phương các giá trị của m là 2.

Câu 7: Tồn tại bao nhiêu số dương m để đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = (m+1)x^3 - (m+2)x^2 + 3m - 2$ cắt và tạo với hai tia Ox, Oy một tam giác có diện tích bằng $\frac{9}{4}$?

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = 3(m+1)x^2 - 2(m+2)x$$

$$\text{Hàm số có 2 cực trị} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ (m+2)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq -2 \end{cases}$$

$$\text{Lấy } y \text{ chia } y' \text{ ta được: } y = [3(m+1)x^2 - 2(m+2)x] \left(\frac{1}{3}x - \frac{m+2}{9(m+1)} \right) - \frac{2(m+2)^2}{9(m+1)}x + 3m - 2$$

Do đó đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình

$$d: y = -\frac{2(m+2)^2}{9(m+1)}x + 3m - 2$$

$$d \cap Ox = A\left(\frac{9(3m-2)(m+1)}{2(m+2)^2}; 0\right), d \cap Oy = B(0; 3m - 2) \left(m > \frac{2}{3}\right).$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \left| \frac{9(3m-2)(m+1)}{2(m+2)^2} \right| \cdot |3m - 2| = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3m-2)^2(m+1)}{(m+2)^2} = 1 \Leftrightarrow 9m^3 - 4m^2 - 12m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{9} + \frac{4\sqrt{7}}{9}.$$

Vậy tồn tại 1 số dương m thỏa bài toán.

Câu 8: Biết $\frac{a}{b}$ (trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $b \in \mathbb{N}^*$) là giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$. Giá trị biểu thức $T = a + 2b$ là

Lời giải

Ta có: $y' = 2x^2 - 2mx - 2(3m^2 - 1)$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m^2 + 12m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow |m| > \frac{2}{\sqrt{13}}$.

Khi đó, ta có $x_1 + x_2 = m, x_1x_2 = 1 - 3m^2$.

$$x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1 \Rightarrow 1 - 3m^2 + 2m = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0(l) \\ m = \frac{2}{3}(t/m) \end{cases} \Rightarrow a + 2b = 8.$$

-----HẾT-----

