

Dạng 2: Toạ độ hoá một số hình học không gian

- Chọn một điểm mà từ đó có ba đường đôi một vuông góc với nhau làm gốc toạ độ
- Xây dựng toạ độ các điểm trên hình đã cho tương ứng với hệ trục vừa chọn
- Toạ độ các điểm đặc biệt

$$M \in Ox \Rightarrow M(x; 0; 0)$$

$$M \in Oy \Rightarrow M(0; y; 0)$$

$$M \in Oz \Rightarrow M(0; 0; z)$$

$$M \in (Oxy) \Rightarrow M(x; y; 0)$$

$$M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z)$$

$$M \in (Oyz) \Rightarrow M(0; y; z)$$

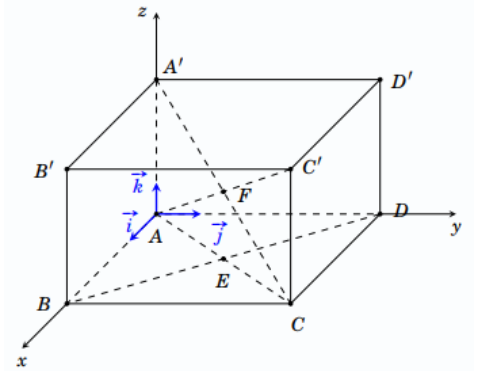
BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = AA' = 2$, $AD = 4$. Gọi E là tâm của hình chữ nhật, F là trung điểm của cạnh AC' . Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình dưới đây. Hãy xác định toạ độ các đỉnh của hình hộp chữ nhật và toạ độ hai điểm E và F ?

Lời giải

Chọn $A(0; 0; 0)$ là gốc toạ độ thì toạ độ các điểm như sau: $B(2; 0; 0)$; $C(2; 2; 0)$; $D(0; 2; 0)$

$A'(0; 0; 2)$; $B'(2; 0; 2)$; $C'(2; 2; 2)$; $D'(0; 2; 2)$.



Bài tập 2: Một máy bay M đang cất cánh từ phi trường với hệ toạ độ không gian $Oxyz$ được thiết lập như hình vẽ dưới đây. Cho biết M là vị trí của máy bay và $OM = 14$, $\angle NOB = 32^\circ$, $\angle MOC = 65^\circ$. Tìm toạ độ điểm M

Lời giải

Ta có: $OC = OM \cdot \cos 65^\circ \approx 5,9$; $ON = CN =$

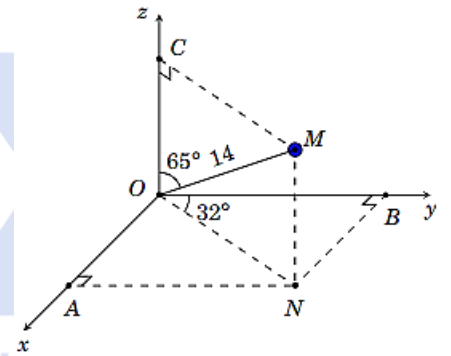
$OM \cdot \sin 65^\circ \approx 12,7$; $OB = ON \cdot \cos 32^\circ \approx 6,7$

Vì $OANB$ là hình chữ nhật nên $\vec{ON} = \vec{OA} + \vec{OB}$

Vì $OCMN$ là hình chữ nhật nên:

$$\vec{OM} = \vec{OC} + \vec{ON} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 6,7\vec{i} + 10,8\vec{j} + 5,9\vec{k}$$

Vậy $M(6,7; 10,8; 5,9)$



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Hình bên mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (đơn vị trên mỗi trục là mét), giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới, hãy xác định toạ độ của B .

A. $(6,1; 6,7; 1,55)$

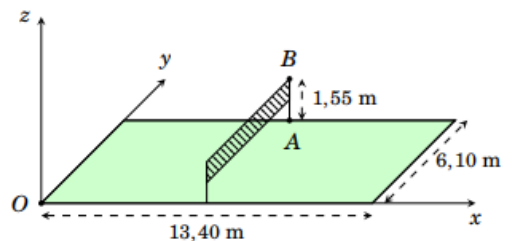
B. $(6,7; 6,1; 1,55)$

C. $(6,1; 0,155)$

D. $(0; 6,7; 1,55)$

Lời giải

Toạ độ điểm $B(6,7; 6,1; 1,55)$



Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc toạ độ O trùng với điểm A), toạ độ điểm B' là

A. $B(0; 2; 0)$

B. $B(2; 2; 2)$

C. $B(2; 2; 0)$

D. $B(2; 0; 2)$

Lời giải

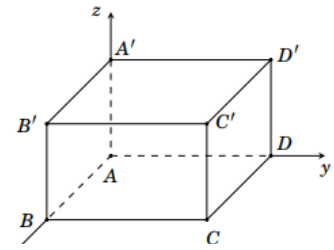
Với A là gốc toạ độ thì $B(2; 0; 2)$

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc toạ độ O trùng với điểm A), toạ độ điểm C' là

- A. $C'(2; 2; 0)$ B. $C'(2; 2; 2)$
C. $C'(2; 0; 0)$ D. $C'(2; 0; 2)$

Lời giải

Với A là gốc toạ độ thì $C'(2; 2; 2)$

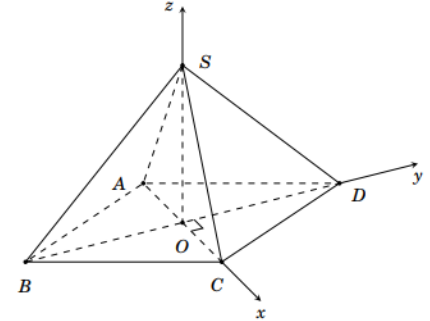


Câu 4: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc toạ độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), toạ độ $\overrightarrow{SC}$ là:

- A. $\overrightarrow{SC} = (2a; 0; -2a)$ B. $\overrightarrow{SC} = (2a; -a; -2a)$
C. $\overrightarrow{SC} = (a; 0; -2a)$ D. $\overrightarrow{SC} = (a; 0; 2a)$

Lời giải

Toạ độ $\overrightarrow{SC}$ là $\overrightarrow{SC} = (a; 0; -2a)$.

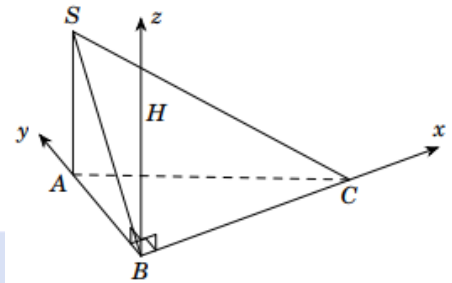


Câu 5: Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B , $BC = 3$, $BA = 2$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc toạ độ O trùng với điểm B). Tìm khẳng định **sai**

- A. $A(0; 2; 0)$ B. $B(0; 0; 0)$
C. $C(0; 0; 3)$ D. $S(-2; 2; 2)$

Lời giải

Toạ độ điểm $S(0; 2; 2)$



Câu 6: Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như hình bên. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy) . Cho biết $OM = 50$, $(\vec{i}, \overrightarrow{OH}) = 64^\circ$, $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}) = 48^\circ$. Tìm toạ độ của điểm M .

- A. $M(37,2; 14,7; 30,1)$ B. $M(14,7; 37,2; 30,1)$
C. $M(30,1; 14,7; 37,2)$ D. $M(14,7; 30,1; 37,2)$

Lời giải

Tam giác OMH vuông tại H có $OM = 50$, $\widehat{OMH} = 48^\circ$ nên ta có:

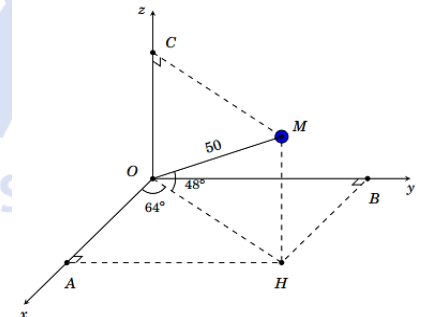
$$OH = OM \cdot \cos 48^\circ \approx 33,5; OC = MH = OM \cdot \sin 48^\circ \approx 37,2$$

Tam giác OAH vuông tại A , $OH = 33,5$, $\widehat{AOH} = 64^\circ$ nên ta có:

$$OA = OH \cdot \cos 64^\circ \approx 14,7; OB = AH = OH \cdot \sin 64^\circ \approx 30,1$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 14,7.\vec{i} + 30,1.\vec{j} + 37,2.\vec{k}$$

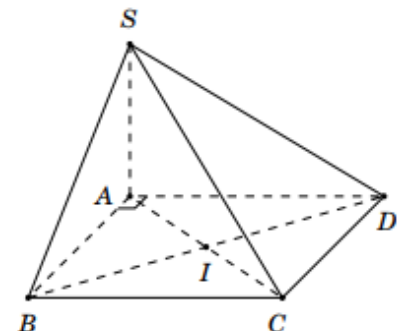
Vậy $M(14,7; 30,1; 37,2)$



PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 1$, $AD = 2$, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 3$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như sau: Gốc toạ độ O trùng với điểm A , các véc tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}$, $\vec{j}$ và $\vec{k}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) Toạ độ $D(0; 2; 0)$. b) Toạ độ $C(1; 2; 3)$.
c) Toạ độ $S(2; 0; 0)$ d) Toạ độ $I(1; 1; 0)$.



Lời giải

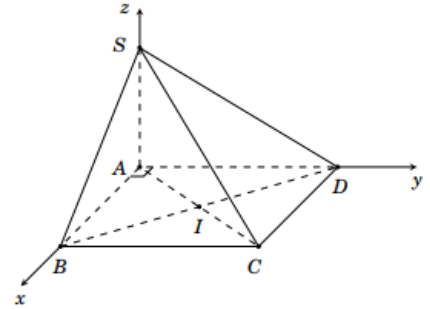
Với hệ trục đã chọn như hình vẽ thì

a) Đúng: Điểm $D \in Oy$ và $AD = 2$ nên $D(0; 2; 0)$.

b) Sai: Điểm $C \in (Oxy)$ và có hình chiếu lên Ox, Oy lần lượt là điểm B và D . Do $AB = 1$ và $AD = 2$ nên $C(2; 2; 0)$.

c) Đúng: Điểm $S \in Oz$ và $AS = 3$ nên $S(0; 0; 3)$.

d) Sai: Điểm $I \in (Oxy)$ và có hình chiếu lên Ox, Oy lần lượt là trung điểm của AB và AD nên $I(0,5; 1; 0)$.



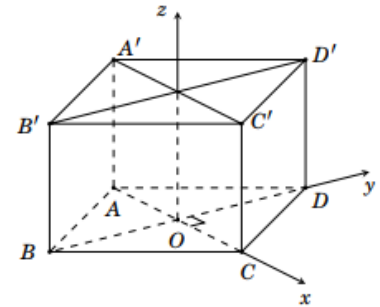
Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (góc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tọa độ $A(-1; 0; 0)$.

b) $\overrightarrow{AC'} = (2\sqrt{2}; 0; 2)$.

c) Tọa độ $D'(0; \sqrt{2}; 2)$.

d) $\overrightarrow{BD'} = (0; 0; 2)$.



Lời giải

Độ dài $AC = 2\sqrt{2}$. Với hệ trục $Oxyz$ đã chọn như hình vẽ thì

a) Sai: Điểm $A \in Ox$, nằm ngược chiều dương và $OA = \sqrt{2}$ nên $A(-\sqrt{2}; 0; 0)$.

b) Đúng: Tọa độ $C'(\sqrt{2}; 0; 2)$. Suy ra $\overrightarrow{AC'} = (2\sqrt{2}; 0; 2)$.

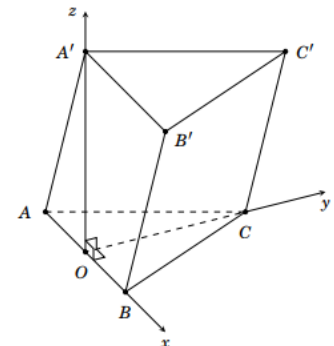
c) Đúng: Điểm D' có hình chiếu vuông góc xuống (Oxy) là điểm $D(0; \sqrt{2}; 0)$ và $DD' = 2$ nên $D'(0; \sqrt{2}; 2)$.

d) Sai: Tọa độ $B(0; -\sqrt{2}; 0), D'(0; \sqrt{2}; 2)$. Suy ra $\overrightarrow{BD'} = (0; 2\sqrt{2}; 2)$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2 như hình vẽ. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trung điểm cạnh AB , góc $\widehat{A'AO} = 60^\circ$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (góc tọa độ O trùng với trung điểm của đoạn BC), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tọa độ điểm $A(-1; 0; 0)$. b) Tọa độ điểm $C(0; \sqrt{3}; 0)$.

c) Tọa độ điểm $A'(0; -1; \sqrt{3})$. d) Tọa độ điểm $C'(1; \sqrt{3}; \sqrt{3})$.



Lời giải

Độ dài $OC = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot OA' = OA \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}$. Với hệ trục $Oxyz$ đã chọn như hình vẽ trên thì

a) Đúng: Điểm $A \in Ox$, nằm ngược chiều dương và $OA = 1$ nên $A(-1; 0; 0)$.

b) Đúng: Điểm $A' \in Oy$, nằm cùng chiều dương và $OC = \sqrt{3}$ nên $C(0; \sqrt{3}; 0)$.

c) Sai: $A' \in Oz$, nằm cùng chiều dương và $OA' = \sqrt{3}$ nên $A'(0; 0; \sqrt{3})$.

d) Đúng: Gọi $C'(x; y; z)$. Ta có $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 0 = 1 \\ y - 0 = \sqrt{3} \\ z - \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{3} \\ z = \sqrt{3} \end{cases}$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = 2a, OC = a\sqrt{2}$. Khi đó vectơ $\overrightarrow{BC}(m; n; p)$. Khi $a = 1$ hãy tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.

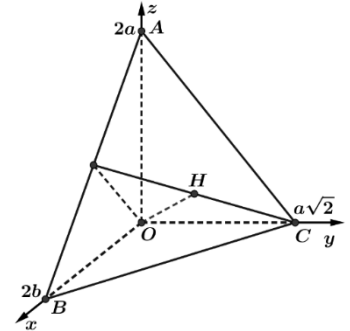
Lời giải

Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ như sau điểm O là gốc tọa độ $OA \equiv Oz$; $OB \equiv Ox$ và $OC \equiv Oy$.

Khi đó ta có $O(0; 0; 0)$; $A(0; 0; 2a)$; $B(2a; 0; 0)$ và $C(0; a\sqrt{2}; 0)$.

Vậy ta có vectơ khi đó là $\overrightarrow{AB} = (2a; 0; -2a)$

$$\text{nên } \begin{cases} m = 2a \\ n = 0 \\ p = -2a \end{cases} \Rightarrow T = 2a + 0 + (-2a) = 0$$



Câu 2: Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a , $AA' = a$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh AA' . Vectơ $\overrightarrow{OC'}$ có tọa độ là $(m; n; p)$. Khi $a = 1$ hãy tính giá trị biểu thức $T = 2m + n + p$.

Lời giải

Dựng hệ trục tọa độ như hình vẽ.

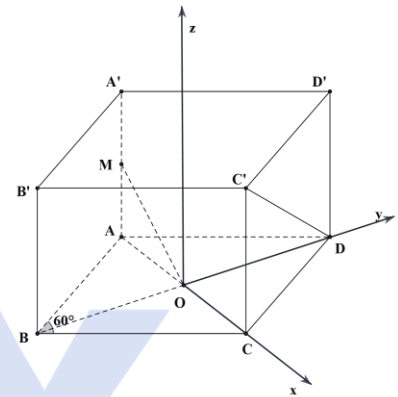
Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chọn $a = 1$.

Dễ dàng tính được $O(0; 0; 0)$, $M(-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2})$, $D(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$

và $C'(\frac{1}{2}; 0; 1)$.

Suy ra $\overrightarrow{OM} = (-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2})$, $\overrightarrow{CD} = (-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; -1)$ và $\overrightarrow{OC'} = (\frac{1}{2}; 0; 1)$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ n = 0 \\ p = 1 \end{cases} \Rightarrow T = 2m + n + p = 2 \cdot \frac{1}{2} + 0 + 1 = 2.$$



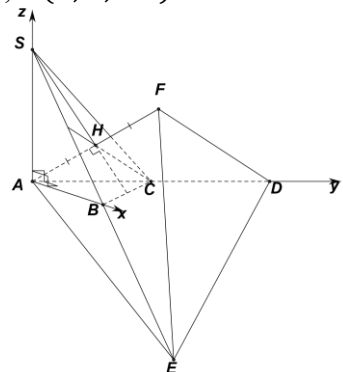
Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi D, E, F lần lượt là điểm đối xứng của A qua C , của S qua B và của A qua mặt phẳng (SBC) . Khi $a = 1$ thì tung độ của vectơ $\overrightarrow{AD}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ với độ dài vectơ đơn vị bằng a , ta được tọa độ các điểm như sau: $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$, $S(0; 0; 1) \Rightarrow D(0; 2; 0)$, $E(2; 0; -1)$.

Gọi H là trọng tâm tam giác $SBC \Rightarrow H(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$. Vì tam giác SBC là tam giác đều nên H cũng là trực tâm của tam giác $SBC \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow F$ là điểm đối xứng với A qua H

$\Rightarrow F(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$. Ta tính được: $\overrightarrow{AD} = (0; 2; 0)$, $\overrightarrow{AE} = (2; 0; -1)$, $\overrightarrow{AF} = (\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$.



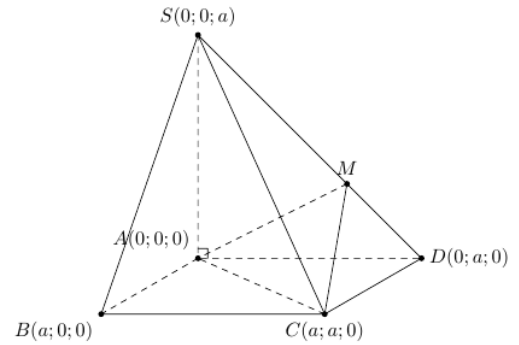
Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Cạnh bên $SA = a$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM = 2MD$. Khi $a = 1$ thì tổng bình phương hoành độ, tung độ, cao độ của vectơ $\overrightarrow{AC}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho điểm $A \equiv O$, các điểm B, D, S lần lượt thuộc chiều dương các trục tọa độ Ox, Oy, Oz . Suy ra tọa độ các điểm như trên hình vẽ.

Do M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM = 2MD$ suy ra: $\overrightarrow{SM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SD} \Rightarrow M\left(0; \frac{2a}{3}; \frac{a}{3}\right) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \left(0; \frac{2a}{3}; \frac{a}{3}\right) \\ \overrightarrow{AC} = (a; a; 0) \end{cases} \xrightarrow{a=1} \overrightarrow{AC} = (1; 1; 0) \Rightarrow 1^2 + 1^2 + 0^2 = 2$$



Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, BC, C'D'$ và DD' . Xác định hoành độ của vectơ $\overrightarrow{MQ}$.

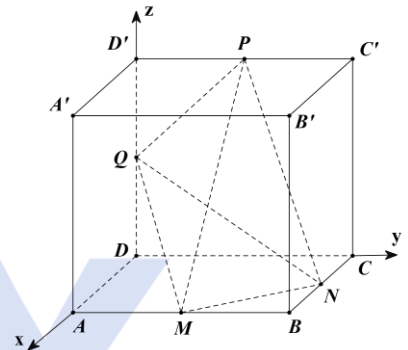
Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có $D(0; 0; 0), A(1; 0; 0), B(1; 1; 0), C(0; 1; 0), A'(1; 0; 1), B'(1; 1; 1), C'(0; 1; 1), D'(0; 0; 1)$.

Vì M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, BC, C'D'$ và DD' nên

$$M\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), N\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right), P\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), Q\left(0; 0; \frac{1}{2}\right).$$

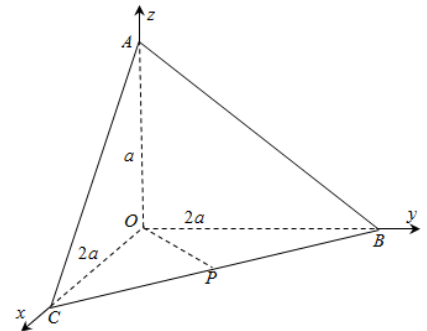
$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MN} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right), \overrightarrow{MP} = (-1; 0; 1), \overrightarrow{MQ} = \left(-1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$



Câu 6: Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau $OA = a$ và $OB = OC = 2a$. Gọi P là trung điểm của BC (minh họa như hình vẽ). Khi $a = 1$ xác định tung độ của vectơ $\overrightarrow{AP}$

Lời giải

Đặt khối tứ diện $O.ABC$ vào hệ trục tọa độ gốc $Oxyz$: các điểm A, B, C lần lượt thuộc các trục tọa độ Oz, Oy, Ox .



Ta có: $O(0; 0; 0), A(0; 0; 1), B(0; 2; 0), C(2; 0; 0), P(1; 1; 0), \overrightarrow{AP} = (1; 1; -1)$.

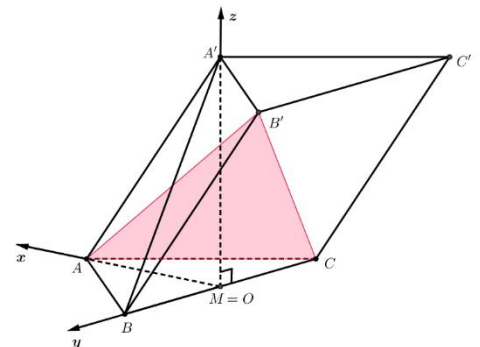
Câu 7: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC đều cạnh bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của BC . Khi $a = 1$ thì tung độ của $\overrightarrow{A'B}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Góc giữa $A'B$ và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{A'BM} = 60^\circ$.

$$\text{Ta có: } A'M = BM \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3};$$

$$AM = AB \cdot \sin 60^\circ = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$



Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ: khi đó $A(\sqrt{3}; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; -1; 0)$,

$A'(0; 0; \sqrt{3})$. Gọi $B'(x_0; y_0; z_0)$, $\overrightarrow{A'B'} = (x_0; y_0; z_0 - \sqrt{3})$, $\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{3}; 1; 0)$.

Vì $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ nên $\begin{cases} x_0 = -\sqrt{3} \\ y_0 = 1 \\ z_0 = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow B'(-\sqrt{3}; 1; \sqrt{3}) \Rightarrow \overrightarrow{AB'} = (-2\sqrt{3}; 1; \sqrt{3})$.

Câu 8: Cho tứ diện $SABC$ có $SC = CA = AB = 3\sqrt{2}$, SC vuông góc (ABC) , tam giác ABC vuông tại A , các điểm M và N lần lượt thuộc SA và BC sao cho $AM = CN = 2$. Tung độ của $\overrightarrow{NB}$ khi đó bằng bao nhiêu?

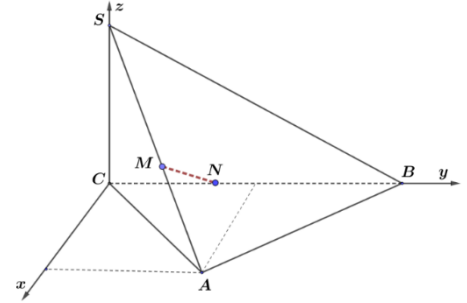
Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ thỏa $C(0; 0; 0) \equiv O$ như hình vẽ.

Điểm $B(0; 6; 0) \in Oy$, $S(0; 0; 3\sqrt{2}) \in Oz$, $A(3; 3; 0)$.

Khi đó tọa độ $N(0; 2; 0)$; $M(2; 2; \sqrt{2})$.

$\overrightarrow{NM} = (2; 0; \sqrt{2})$; $\overrightarrow{SB} = (0; 6; -3\sqrt{2})$ và $\overrightarrow{NB} = (0; 4; 0)$.



HẾT

