

# BÀI 03 BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTOR

## A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

### 1 Biểu thức toạ độ của phép toán cộng, trừ, nhân một số thực với một vector

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vector  $\vec{a} = (x; y; z)$  và  $\vec{b} = (x'; y'; z')$ . Khi đó ta có:

- $\vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y'; z + z')$
- $\vec{a} - \vec{b} = (x - x'; y - y'; z - z')$
- $k\vec{a} = (kx; ky; kz)$  với  $k$  là một số thực.

**Nhận xét:** Vector  $\vec{a} = (x; y; z)$  cùng phương với vector  $\vec{b} = (x'; y'; z') \neq \vec{0}$  khi và chỉ khi tồn tại số thực  $k$

sao cho 
$$\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \\ z = kz' \end{cases}$$

### 2 Biểu thức toạ độ tích vô hướng của hai vector

Trong không gian  $Oxyz$ , tích vô hướng của hai vector  $\vec{a} = (x; y; z)$  và  $\vec{b} = (x'; y'; z')$  được xác định bởi công thức:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = xx' + yy' + zz'$

**Nhận xét:**

- Hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  vuông góc với nhau khi và chỉ khi  $xx' + yy' + zz' = 0$ .
- Nếu  $\vec{a} = (x; y; z)$  thì  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .
- Nếu  $\vec{a} = (x; y; z)$  và  $\vec{b} = (x'; y'; z')$  là hai vector khác  $\vec{0}$  thì

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

**Chú ý:** Nếu  $A(x_A; y_A; z_A)$  và  $B(x_B; y_B; z_B)$  thì  $AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ .

Đặc biệt khi  $B$  trùng  $O$  ta nhận được công thức  $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$ .

### 3 Biểu thức toạ độ tích có hướng của hai vector

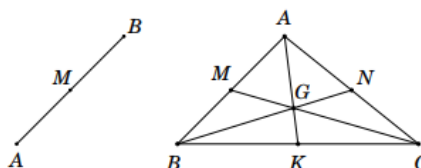
Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vector  $\vec{a} = (x; y; z)$  và  $\vec{b} = (x'; y'; z')$  không cùng phương. Khi đó vector

$$\vec{w} = (yz' - y'z; zx' - z'x; xy' - x'y)$$

vuông góc với hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$

- Vector xác định như trên gọi là tích có hướng của hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  kí hiệu là  $\vec{w} = [\vec{a}; \vec{b}]$
- Quy ước  $\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$  thì  $[\vec{a}; \vec{b}] = \left( \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right) = (yz' - y'z; zx' - z'x; xy' - x'y)$
- $\vec{a}$  không cùng phương với  $\vec{b}$  khi và chỉ khi  $[\vec{a}; \vec{b}] \neq \vec{0}$

### 4 Biểu thức toạ độ trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm tam giác



Trong không gian  $Oxyz$ , toạ độ trung điểm và trọng tâm được xác định như sau:

- Tọa độ trung điểm  $M$  của đoạn thẳng  $AB$  là  $M\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$
- Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là  $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}; \frac{y_A+y_B+y_C}{3}; \frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$

## B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

### Dạng 1: Tọa độ của các phép toán vectơ, tọa độ điểm, độ dài đoạn thẳng

#### BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài tập 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \frac{3}{4}\vec{k}$  và vectơ  $\vec{v} = \left(3; -\frac{5}{4}; 2\right)$ .

- Tìm tọa độ của  $\vec{u}$ .
- Biểu diễn  $\vec{v}$  theo các vectơ đơn vị  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .
- Tìm tọa độ của  $\vec{a} = 2\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$ .

#### Lời giải

a) Vì  $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \frac{3}{4}\vec{k}$  nên  $\vec{u} = \left(-2; 3; \frac{3}{4}\right)$ .

b) Vì  $\vec{v} = \left(3; -\frac{5}{4}; 2\right)$  nên  $\vec{v} = 3\vec{i} - \frac{5}{4}\vec{j} + 2\vec{k}$ .

c) Biểu diễn  $\vec{a}$  qua các vectơ đơn vị:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= 2\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} = 2\left(-2\vec{i} + 3\vec{j} + \frac{3}{4}\vec{k}\right) + \frac{1}{3}\left(3\vec{i} - \frac{5}{4}\vec{j} + 2\vec{k}\right) = -3\vec{i} + \frac{67}{12}\vec{j} + \frac{13}{6}\vec{k} \Rightarrow \vec{a} \\ &= \left(-3; \frac{67}{12}; \frac{13}{6}\right)\end{aligned}$$

**Bài tập 2:** Cho  $\vec{a} = (2; -1; 5)$ ,  $\vec{b} = (0; 3; -3)$ ,  $\vec{c} = (1; 4; -2)$ . Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{d} = 2\vec{a} - \frac{1}{5}\vec{b} + 3\vec{c}$ .

#### Lời giải

Ta có  $2\vec{a} = (4; -2; 10)$ ;  $\frac{1}{5}\vec{b} = \left(0; \frac{3}{5}; -\frac{3}{5}\right)$ ;  $3\vec{c} = (3; 12; -6)$ .

Do đó  $\vec{d} = \left(4 - 0 + 3; -2 - \frac{3}{5} + 12; 10 - \left(-\frac{3}{5}\right) + (-6)\right)$  hay  $\vec{d} = \left(7; \frac{47}{5}; \frac{23}{5}\right)$ .

**Bài tập 3:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba vectơ  $\vec{p} = (3; -2; 1)$ ,  $\vec{q} = (6; -4; 2)$ ,  $\vec{r} = (2; 1; -3)$ .

- Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$ .
- Tìm hai vectơ cùng phương trong các vectơ đã cho.

#### Lời giải

a) Ta có:  $2\vec{p} = (6; -4; 2)$ ,  $-3\vec{q} = (-18; 12; -6)$ ,  $\vec{r} = (2; 1; -3)$ .

Suy ra  $\vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r} = (-10; 9; -7)$ .

b) Ta có  $2\vec{p} = (6; -4; 2) = \vec{q}$  suy ra hai vectơ  $\vec{p}, \vec{q}$  cùng phương.

Do  $\frac{3}{2} \neq \frac{-2}{1}$  nên  $\vec{p}, \vec{r}$  không cùng phương. Tương tự hai vectơ  $\vec{q}, \vec{r}$  không cùng phương.

**Bài tập 4:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba vector  $A(3; -1; 2), B(1; 2; 3), C(4; -2; 1)$ .

- Chứng minh ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng. Xác định tọa độ trọng tâm tam giác  $ABC$
- Tìm tọa độ điểm  $D$  biết tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành
- Tìm tọa độ giao điểm  $E$  của đường thẳng  $BC$  với mặt phẳng tọa độ  $(Oxz)$

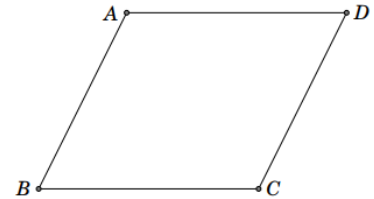
**Lời giải**

a) Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-2; 3; 1)$ ;  $\overrightarrow{AC} = (1; -1; -1)$ . Vì  $-\frac{2}{1} \neq \frac{-3}{-1}$  nên hai vector  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  không cùng phương hay ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.

Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  khi đó là  $G\left(\frac{8}{3}; -\frac{1}{3}; 2\right)$

b) Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x_D = -2 \\ -2 - y_D = 3 \\ 1 - z_D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 6 \\ y_D = -5 \\ z_D = 0 \end{cases}$$



Vậy tọa độ của điểm  $D$  khi đó là  $D(6; -5; 0)$

c) Vì  $E$  thuộc mặt phẳng  $Oxz$  nên tọa độ điểm  $E = (x; 0; z)$

Ta có  $\overrightarrow{AE} = (x - 3; 1; z - 2)$  mà  $A, B, E$  thẳng hàng nên hai vector  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}$  cùng phương, do

$$\text{đó: } \overrightarrow{AE} = k \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = -2k \\ 1 = 3k \\ z - 2 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ k = \frac{1}{3} \\ z = \frac{7}{3} \end{cases} \text{ Vậy } E\left(\frac{7}{3}; 0; \frac{7}{3}\right)$$

**Bài tập 5:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba vector  $A(5; -3; 0), B(2; 1; -1), C(4; 1; 2)$ .

- Tìm tọa độ của vector  $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}$
- Tìm tọa độ điểm  $N$  sao cho  $2\overrightarrow{NA} = -\overrightarrow{NB}$

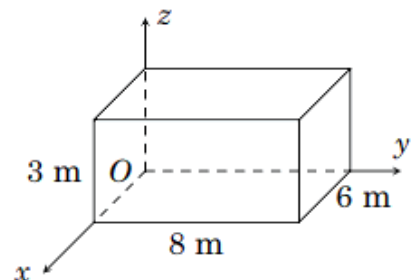
**Lời giải**

a) Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-3; 4; -1)$ ;  $\overrightarrow{AC} = (-1; 4; 2)$ ;  $\overrightarrow{BC} = (2; 0; 3) \Rightarrow \vec{u} = (-17; 12; -15)$

b) Gọi  $N(x; y; z)$  khi đó  $\overrightarrow{NA} = (5 - x; -3 - y; -z)$ ;  $\overrightarrow{NB} = (2 - x; 1 - y; -1 - z)$

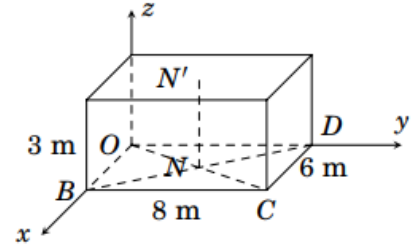
$$2\overrightarrow{NA} = -\overrightarrow{NB} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(5 - x) = -2 + x \\ 2(-3 - y) = -1 + y \\ -2z = 1 + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -\frac{5}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow N\left(4; -\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

**Bài tập 6:** Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 8m, chiều rộng là 6m và chiều cao là 3m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có gốc  $O$  trùng với một góc phòng và mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét (Hình minh họa dưới đây). Hãy tìm tọa độ của điểm treo đèn



**Lời giải**

Gọi tọa độ các điểm  $B(3; 0; 0); C(3; 6; 0); D(0; 6; 0)$  như hình vẽ dưới đây:



Gọi  $N$  là trung điểm của  $OC$ ,  $N'$  là hình chiếu của  $N$  lên mặt phẳng trần nhà suy ra  $N'$  là điểm treo đèn.

Khi đó  $N\left(\frac{3}{2}; 3; 0\right) \Rightarrow N'\left(\frac{3}{2}; 3; 3\right)$

Vậy tọa độ của điểm treo đèn là  $\left(\frac{3}{2}; 3; 3\right)$

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ . Tính độ dài của  $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$   
**A.**  $\sqrt{74}$ . **B.**  $3\sqrt{6}$ . **C.**  $5\sqrt{2}$ . **D.**  $\sqrt{42}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b} = 2(2\vec{j} - 3\vec{k}) - (4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 4\vec{j} - 6\vec{k} - 4\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = -4\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$   
 $\Rightarrow \vec{v} = (-4; 3; -7) \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + (-7)^2} = \sqrt{74}$ .

**Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(2; -1; 5)$ ,  $B(5; -5; 7)$ ;  $M(x; y; 1)$ . Khi  $A, B, M$  thẳng hàng thì giá trị của  $x; y$  là  
**A.**  $x = 4; y = -7$ . **B.**  $x = -4; y = 7$ . **C.**  $x = 4; y = 7$ . **D.**  $x = -4; y = -7$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (3; -4; 2)$ ;  $\overrightarrow{AM} = (x - 2; y + 1; -4)$   
 Để ba điểm  $A, B, M$  thẳng hàng thì  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{-4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 7 \end{cases}$ .

**Câu 3:** Trong không gian  $Oxyz$  cho 3 điểm  $A(1, 2, -1), B(2, -1, 3), C(-3, 5, 1)$ . Tọa độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành là  
**A.**  $(-2, 2, 5)$ . **B.**  $(-4, 8, -5)$ . **C.**  $(-4, 8, -3)$ . **D.**  $(-2, 8, -3)$ .

**Lời giải**

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (1, -3, 4)$ ;  $\overrightarrow{AC} = (-4, 3, 2)$  Suy ra  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  không cùng phương.

Gọi  $D(x, y, z)$ ;  $\overrightarrow{DC} = (-3 - x, 5 - y, 1 - z)$

Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - x = 1 \\ 5 - y = -3 \\ 1 - z = 4 \end{cases} \Rightarrow D(-4, 8, -3)$

**Câu 4:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho tứ diện  $ABCD$  với  $A(1; -4; 2), B(2; 1; -3), C(3; 0; -2)$  và  $D(2; -5; -1)$ . Điểm  $G$  thỏa mãn  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$  có tọa độ là:  
**A.**  $G(2; -1; -1)$ . **B.**  $G(2; -2; -1)$ . **C.**  $G(0; -1; -1)$ . **D.**  $G(6; -3; -3)$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$   
 $\Leftrightarrow 4\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$

$\Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{1}{4}(x_A + x_B + x_C + x_D) = 2 \\ y_G = \frac{1}{4}(y_A + y_B + y_C + y_D) = -2 \\ z_G = \frac{1}{4}(z_A + z_B + z_C + z_D) = -1 \end{cases}$  Vậy  $G(2; -2; -1)$ .

- Câu 5:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; -1; -2)$  và trọng tâm  $G(2; 1; -3)$ . Tọa độ của vector  $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC}$  là  
**A.**  $(3; 6; 3)$ . **B.**  $(3; 6; -3)$ . **C.**  $(3; -3; 6)$ . **D.**  $(3; 2; 1)$ .

**Lời giải**

Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$ . Ta có:  $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC} = 2 \cdot \vec{AM} = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \vec{AG} = 3\vec{AG} = (3; 6; -3)$

- Câu 6:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(2; -1; 3)$ . Tìm tọa độ điểm  $I$  thỏa mãn  $\vec{IA} + 2\vec{IB} = \vec{0}$ .  
**A.**  $I\left(-\frac{5}{3}; 0; \frac{5}{3}\right)$ . **B.**  $I\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; 0\right)$ . **C.**  $I\left(\frac{5}{3}; 0; \frac{5}{3}\right)$ . **D.**  $I\left(0; \frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$ .

**Lời giải**

Gọi  $I(x; y; z)$ . Khi đó:  $\vec{IA} = (1 - x; 2 - y; -1 - z)$ ,  $\vec{IB} = (2 - x; -1 - y; 3 - z)$   
 $\Rightarrow 2\vec{IB} = (4 - 2x; -2 - 2y; 6 - 2z)$ . Nên  $\vec{IA} + 2\vec{IB} = (5 - 3x; -3y; 5 - 3z)$ .

$$\text{Ta có: } \vec{IA} + 2\vec{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 3x = 0 \\ -3y = 0 \\ 5 - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = 0 \\ z = \frac{5}{3} \end{cases}. \text{ Vậy } I\left(\frac{5}{3}; 0; \frac{5}{3}\right).$$

- Câu 7:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $E(1; 3; 2)$ ,  $F(0; -1; 5)$ ,  $K(2; 4; -1)$  và tam giác  $ABC$  thỏa mãn  $\vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CK} = \vec{0}$ . Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là  
**A.**  $G(1; 2; 2)$ . **B.**  $G(-1; -4; 3)$ . **C.**  $G(2; 2; 1)$ . **D.**  $G(1; 1; -3)$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CK} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GE} - \vec{GA} + \vec{GF} - \vec{GB} + \vec{GK} - \vec{GC} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow \vec{GE} + \vec{GF} + \vec{GK} - (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GE} + \vec{GF} + \vec{GK} = \vec{0}.$$

$$\text{Suy ra } G \text{ cũng là trọng tâm của tam giác } \triangle EFK. \text{ Do đó: } \begin{cases} x_G = \frac{1+0+2}{3} = 1 \\ y_G = \frac{3-1+4}{3} = 2 \\ z_G = \frac{2+5-1}{3} = 2 \end{cases}$$

- Câu 8:** Trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hai vector  $\vec{PQ} = (0; 1; -2)$ ,  $\vec{PR} = (-2; -1; 0)$  và điểm  $M(1; -2; 2)$  trung điểm của đoạn  $QR$ . Tọa độ điểm  $Q$  là  
**A.**  $(-1; 1; -2)$ . **B.**  $(-2; 2; -3)$ . **C.**  $(0; 1; 3)$ . **D.**  $(2; -1; 1)$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \vec{RQ} = \vec{PQ} - \vec{PR} = (2; 2; -2) \text{ suy ra } \begin{cases} x_Q - x_R = 2 \\ y_Q - y_R = 2 \\ z_Q - z_R = -2 \end{cases} \quad (1).$$

$$\text{Vì điểm } M(1; -2; 2) \text{ trung điểm của đoạn } QR \text{ nên } \begin{cases} x_Q + x_R = 2 \\ y_Q + y_R = -4 \\ z_Q + z_R = 4 \end{cases} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra  $Q(2; -1; 1)$ .

- Câu 9:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho bốn điểm  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(0; 2; 0)$ ,  $C(0; 0; 2)$  và  $D(2; 2; 2)$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Tọa độ trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $MN$  là:  
**A.**  $I(1; 1; 0)$ . **B.**  $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$ . **C.**  $I(1; 1; 1)$ . **D.**  $I(1; -1; 2)$

**Lời giải**

$$\text{Vì } I(x; y; z) \text{ là trung điểm } MN \text{ nên ta có: } 2\vec{IM} + 2\vec{IN} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x = \frac{2+0+0+2}{4} \\ y = \frac{0+2+0+2}{4} \\ z = \frac{0+0+2+2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}. \text{ Vậy } I(1; 1; 1).$$

**Câu 10:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 2; -1), B(2; -1; 3), C(-2; 3; 3)$ . Điểm  $M(a; b; c)$  là đỉnh thứ tư của hình bình hành  $ABCM$ , khi đó  $P = a^2 + b^2 - c^2$  có giá trị bằng

- A. 42. B. -50. C. -48. **D. 44.**

**Lời giải**

$$\text{Tứ giác } ABCM \text{ là hình bình hành khi và chỉ khi: } \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2=1-2 \\ b-3=2-(-1) \\ c-3=-1-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=6 \\ c=-1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } P = a^2 + b^2 - c^2 = (-3)^2 + 6^2 - (-1)^2 = 44.$$

**Câu 11:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(2; 1; 3)$  và điểm  $B(4; -3; 1)$ . Tọa độ trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $AB$  là

- A.  $(6; -2; 4)$ . **B.  $(3; -1; 2)$ .** C.  $(1; -2; -1)$ . D.  $(2; -4; -2)$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có tọa độ trung điểm } I(x_I; y_I; z_I) \text{ là } \begin{cases} x_I = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3 \\ y_I = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{1+(-3)}{2} = -1 \\ z_I = \frac{z_A+z_B}{2} = \frac{3+1}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow I(3; -1; 2).$$

**Câu 12:** Trong không gian hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba vector  $\vec{a} = (3; 4; 2); \vec{b} = (-5; 0; 3); \vec{c} = (1; 2; -4)$ . Tìm tọa độ của vector  $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ :

- A.  $\vec{u} = (-2; 10; 16)$ .** B.  $\vec{u} = (2; 10; -16)$ . C.  $\vec{u} = (-1; 5; 8)$ . D.  $\vec{u} = (-2; -10; 16)$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } 3\vec{a} = (9; 12; 6); 2\vec{b} = (-10; 0; 6); -\vec{c} = (-1; -2; 4)$$

$$\text{Khi đó } \vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = (-2; 10; 16)$$

**Câu 13:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (-3; 5; 2), \vec{b} = (0; -1; 3), \vec{c} = (1; -1; 1)$  thì tọa độ  $\vec{v} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 15\vec{c}$  là

- A.  $\vec{v} = (-9; 2; 10)$ . B.  $\vec{v} = (9; -1; 10)$ . C.  $\vec{v} = (9; 2; 10)$ . **D.  $\vec{v} = (9; -2; 10)$ .**

**Lời giải**

$$\text{Ta có } 2\vec{a} = (-6; 10; 4), 3\vec{b} = (0; -3; 9), 15\vec{c} = (15; -15; 15) \text{ suy ra } \vec{v} = (9; -2; 10).$$

**Câu 14:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxyz$  cho điểm  $A(0; -2; -1)$  và  $B(1; -1; 2)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MB}$ ?

- A.  $M(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; 1)$ . B.  $M(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$ . **C.  $M(2; 0; 5)$ .** D.  $M(-1; -3; -4)$ .

**Lời giải**

$$\text{Giả sử } M(x_M; y_M; z_M).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} (0-x_M) - 2(1-x_M) = 0 \\ (-2-y_M) - 2(-1-y_M) = 0 \\ (-1-z_M) - 2(2-z_M) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 2 \\ y_M = 0 \\ z_M = 5 \end{cases} \Rightarrow M(2; 0; 5).$$

**Câu 15:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 3; 4)$  và  $B(1; 0; 1)$ . Điểm  $M$  nằm trên trục  $Oz$  và cách đều hai điểm  $A, B$  có tọa độ là.

A. (0; 0; 4).

B. (2; 0; 0).

C. (0; 0; 2).

D. (0; 4; 0).

**Lời giải**

Do điểm  $M$  nằm trên trục  $Oz$  nên  $M(0; 0; z)$ .

Mặt khác điểm  $M$  cách đều hai điểm  $A, B \Rightarrow MA = MB$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(0-1)^2 + (0-3)^2 + (z-4)^2} = \sqrt{(0-1)^2 + (0-0)^2 + (z-1)^2} \Leftrightarrow 10 + (z-4)^2 = 1 + (z-1)^2 \Leftrightarrow z = 4$$

Vậy  $M(0; 0; 4)$ .

**Câu 16:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2; 1; 1), B(-1; 2; 1)$ . Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  là?

A.  $I\left(\frac{1}{3}; 1; \frac{2}{3}\right)$ .

B.  $I(-3; 1; 0)$ .

C.  $I\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$ .

D.  $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1\right)$

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } I\left(\frac{2-1}{2}; \frac{1+2}{2}; \frac{1+1}{2}\right) \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1\right).$$

**Câu 17:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 2; 3), B(-2; -4; 9)$ . Điểm  $M$  thuộc đoạn  $AB$  sao cho  $MA = 2MB$ . Độ dài đoạn thẳng  $OM$  là

A. 5.

B. 3.

C.  $\sqrt{54}$ .

D.  $\sqrt{17}$ .

**Lời giải**

Đặt  $M(x; y; z)$ , khi đó:  $\overrightarrow{MA} = (1-x; 2-y; 3-z)$  và  $\overrightarrow{MB} = (-2-x; -4-y; 9-z)$

$$\text{Ta có: } MA = 2MB \Rightarrow \overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = -2(-2-x) \\ 2-y = -2(-4-y) \\ 3-z = -2(9-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ z = 7 \end{cases} \Rightarrow M(-1; -2; 7).$$

Khi đó:  $\overrightarrow{OM} = (-1; -2; 7)$ . Vậy  $OM = \sqrt{54}$ .

**Câu 18:** Trong không gian  $Oxyz$  cho điểm  $G(1; -2; 3)$  và ba điểm  $A(a; 0; 0); B(0; b; 0); C(0; 0; c)$ . Biết  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  thì  $a + b + c$  bằng

A. 3.

B. 9.

C. 6.

D. 0.

**Lời giải**

$$\text{Ta có trọng tâm } G \text{ của tam giác } ABC: \begin{cases} x_G = \frac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A+y_B+y_C}{3} \\ z_G = \frac{z_A+z_B+z_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \frac{a}{3} \\ -2 = \frac{b}{3} \\ 3 = \frac{c}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -6 \\ c = 9 \end{cases}$$

Khi đó:  $a + b + c = 3 + (-6) + 9 = 6$ .

**Câu 19:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 1; 1), B(2; 3; 2), C(3; -1; 3)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho bốn điểm  $A, B, C, D$  lập thành một hình chữ nhật.

A.  $D(4; 3; 4)$ .

B.  $D(4; -1; 4)$ .

C.  $D(2; -3; 2)$ .

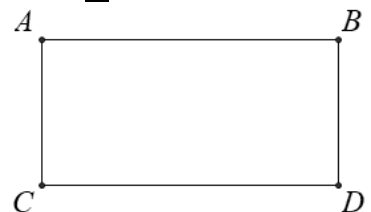
D.  $D(4; 1; 4)$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (1; 2; 1); \overrightarrow{AC} = (2; -2; 2), \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 = 0 \text{ nên } AB \perp AC$$

Điều này cho thấy  $A, B, C$  không thẳng hàng và hình chữ nhật tạo ra phải là  $ABDC$ .

Gọi  $D(x; y; z)$ , ta có  $\overrightarrow{CD} = (x-3; y+1; z-3)$ .



$$\text{Tứ giác } ABDC \text{ là hình chữ nhật khi và chỉ khi } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=1 \\ y+1=2 \\ z-3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \\ z=4 \end{cases}$$

$D(4; 1; 4)$ .

Vậy  $D(4; 1; 4)$

**Câu 20:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-2; 3; 1)$  và  $B(5; 6; 2)$ . Đường thẳng  $AB$  cắt mặt phẳng  $(Oxz)$  tại điểm  $M$ . Tính tỉ số  $\frac{AM}{BM}$ .

**A.**  $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$ .

**B.**  $\frac{AM}{BM} = 2$ .

**C.**  $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$ .

**D.**  $\frac{AM}{BM} = 3$ .

**Lời giải**

Điểm  $M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z); \overrightarrow{AB} = (7; 3; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{59}; \overrightarrow{AM} = (x+2; -3; z-1)$  và

$$A, B, M \text{ thẳng hàng} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB} \quad (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=7k \\ -3=3k \\ z-1=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-9 \\ -1=k \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow M(-9; 0; 0).$$

$$\overrightarrow{BM} = (-14; -6; -2); \overrightarrow{AM} = (-7; -3; -1) \Rightarrow BM = 2AB.$$

**Câu 21:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-4; 1; 5); B(1; 5; -3)$ . Gọi  $C$  là giao điểm của đường thẳng  $AB$  và mặt phẳng  $(Oyz)$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

**A.**  $\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ .

**B.**  $\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{BC}$ .

**C.**  $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{BC}$ .

**D.**  $\overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{BC}$

**Lời giải**

Gọi  $C(0; a; b)$  là giao điểm của đường thẳng  $AB$  và mặt phẳng  $(Oyz)$ . Khi đó  $A; B; C$  thẳng hàng hay  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{AB}$  cùng phương.

$$\text{Lại có } \overrightarrow{AB} = (5; 4; -8); \overrightarrow{AC} = (4; a-1; b-5) \text{ nên } \frac{4}{5} = \frac{a-1}{4} = \frac{b-5}{-8} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{21}{5} \\ b = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (5; 4; -8) \\ \overrightarrow{AC} = (4; \frac{16}{5}; -\frac{32}{5}) \\ \overrightarrow{BC} = (-1; -\frac{4}{5}; \frac{8}{5}) \end{cases} \text{ nên } \overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{BC}.$$

**Câu 22:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vecto  $\vec{a} = (1; 1; -3); \vec{b} = (2; 2; -2); \vec{c} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$  và  $\vec{d} = (1; 1; -1)$ . Cặp vecto nào sau đây cùng phương?

**A.**  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

**B.**  $\vec{a}$  và  $\vec{d}$ .

**C.**  $\vec{a}$  và  $\vec{c}$ .

**D.**  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$ .

**Lời giải**

Vì  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{-3}{-2}$  nên hai vecto  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương.

Vì  $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{-3}{-1}$  nên hai vecto  $\vec{a}$  và  $\vec{d}$  không cùng phương.

Ta có  $\vec{c} = (2; 2; -6) = 2(1; 1; -3) = 2\vec{a}$  suy ra  $\vec{a}$  và  $\vec{c}$  cùng phương.

Vì  $\frac{2}{2} = \frac{2}{2} \neq \frac{-2}{-6}$  nên hai vecto  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$  không cùng phương.

**Câu 23:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(0; 1; -1), B(1; 2; 0); C(m; n; 0)$ . Tìm  $m, n$  sao cho ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.

**A.**  $m = 1; n = 1$ .

**B.**  $m = 1; n = 2$ .

**C.**  $m = 2; n = 1$ .

**D.**  $m = 2; n = 2$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (1; 1; 1); \overrightarrow{AC} = (m; n-1; 1).$$

$$\text{Ba điểm } A, B, C \text{ thẳng hàng } \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} m = k \\ n - 1 = k \\ 1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \\ k = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \end{cases}.$$

**Câu 24:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho 2 véc tơ  $\vec{a} = (-1; 2x - 1; 1 - 3z)$  và  $\vec{b} = (2 + 3y; -1; -2)$ . Khi  $\vec{a} = \vec{b}$  thì tổng  $T = x + 2y^2 + 3z^3$  bằng

- A. 2.                                      **B. 5.**                                      C. 1.                                      D. 4.

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 2 + 3y \\ 2x - 1 = -1 \\ 1 - 3z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow T = 0 + 2.(-1)^2 + 3.1^3 = 5.$$

**Câu 25:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(2; -1; 3)$ ,  $C(-4; 7; 5)$ . Tọa độ chân đường phân giác trong góc  $B$  của tam giác  $ABC$  là

- A.  $(-2; 11; 1)$ .                                      **B.  $(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1)$ .**                                      C.  $(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3})$ .                                      D.  $(\frac{11}{3}; -2; 1)$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } BA = \sqrt{26}; BC = 2\sqrt{26}.$$

$$\text{Gọi } D \text{ là chân đường phân giác trong góc } B \text{ ta có } \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow DC = 2DA.$$

$$\text{Vì } D \text{ là chân đường phân giác trong nên } 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_D = \frac{2x_A + x_C}{3} = -\frac{2}{3} \\ y_D = \frac{2y_A + y_C}{3} = \frac{11}{3} \\ z_D = \frac{2z_A + z_C}{3} = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } D(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1).$$

**Câu 26:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(6; -3; 4)$ ,  $B(a; b; c)$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là giao điểm của đường thẳng  $AB$  với các mặt phẳng tọa độ  $(Oxy)$ ,  $(Oxz)$  và  $(Oyz)$ . Biết rằng  $M, N, P$  nằm trên đoạn  $AB$  sao cho  $AM = MN = NP = PB$ . Giá trị của tổng  $a + b + c$  là

- A. 17.                                      B. -17.                                      **C. -11.**                                      D. 11.

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (a - 6; b + 3; c - 4).$$

Vì  $M, N, P$  lần lượt là giao điểm của  $AB$  với các mặt phẳng  $(Oxy)$ ,  $(Oxz)$  và  $(Oyz)$  nên  $M(x_M; y_M; 0)$ ,  $N(x_N; 0; z_N)$ ,  $P(0; y_P; z_P)$ .

Vì  $M, N, P$  nằm trên đoạn  $AB$  sao cho  $AM = MN = NP = PB$  nên ta có:

$$4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x_M - 6) = a - 6 \\ 4(y_M + 3) = b + 3 \\ 4(0 - 4) = c - 4 \end{cases} \Rightarrow c = -12; 2\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_N - 6) = a - 6 \\ 2(0 + 3) = b + 3 \\ 2(z_N - 4) = c - 4 \end{cases} \Rightarrow b = 3$$

$$\frac{4}{3}\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}(0 - 6) = a - 6 \\ \frac{4}{3}(y_P + 3) = b + 3 \\ \frac{4}{3}(z_P - 4) = c - 4 \end{cases} \Rightarrow a = -2. \text{ Vậy } a + b + c = -11.$$

**Câu 27:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(-1; 4; 2)$ ,  $B(3; 2; 1)$ ,  $C(-2; 0; 2)$ . Tìm tất cả các điểm  $D$  sao cho  $ABCD$  là hình thang có đáy  $AD$  và diện tích hình thang  $ABCD$  gấp ba lần diện tích tam giác  $ABC$ .

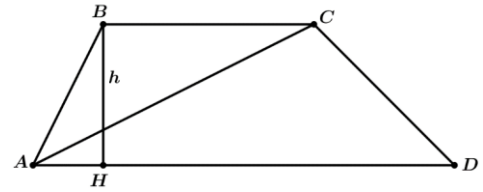
- A.  $D(9; 8; 0)$ .                                      **B.  $D(-11; 0; 4)$  và  $D(9; 8; 0)$ .**  
C.  $D(-11; 0; 4)$ .                                      D.  $D(11; 0; -4)$  và  $D(-9; -8; 0)$ .

**Lời giải**

Giả sử  $D(x_D; y_D; z_D)$ . Khi đó:  $\overrightarrow{AD} = (x_D + 1; y_D - 4; z_D - 2)$ ;  $\overrightarrow{BC} = (-5; -2; 1)$ .

Do  $AD \parallel BC$  nên  $\overrightarrow{AD} = t\overrightarrow{BC} (t \neq 0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_D = -1 - 5t \\ y_D = 4 - 2t \\ z_D = 2 + t \end{cases} ; t \neq 0.$$



Vì diện tích hình thang  $ABCD$  gấp ba lần diện tích tam giác  $ABC$

nên  $\frac{1}{2}h \cdot (BC + AD) = 3 \cdot \frac{1}{2}h \cdot BC$ , với  $h$  là chiều cao của hình thang và cũng chính là chiều cao tam giác  $ABC$  ứng với cạnh  $BC$ .

Suy ra,  $AD = 2BC \Leftrightarrow (x_D + 1)^2 + (y_D - 4)^2 + (z_D - 2)^2 = 4[(-5)^2 + (-2)^2 + 1^2]$

$$\Rightarrow (-5t)^2 + (-2t)^2 + t^2 = 4 \cdot 30 \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow D(-11; 0; 4) \\ t = -2 \Rightarrow D(9; 8; 0) \end{cases}$$

**Câu 28:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(4; 5; 6)$ ;  $B(1; 3; 2)$ . Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên mặt phẳng  $(Oyz)$ . Gọi  $C$  là điểm nằm trên trục  $Oz$  sao cho  $BC$  và  $AH$  là hai đường thẳng cắt nhau. Xác định tọa độ điểm  $C$ .

- A.  $C(0; 0; 2)$ . B.  $C(0; 0; -\frac{2}{3})$ . C.  $C(0; 0; 4)$ . D.  $C(0; 0; -4)$

**Lời giải**

Vì  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên mặt phẳng  $(Oyz)$  nên  $H(0; 5; 6)$ .

Gọi  $C(0; 0; c)$  là một điểm nằm trên trục  $Oz$  và  $D$  là giao điểm của  $BC$  và  $AH$ .

Khi đó  $A, D, H$  nên  $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{HA} = (4k; 0; 0)$  suy ra tọa độ điểm  $D(4k + 4; 5; 6)$ .

$$\text{Lại có } B, D, C \text{ thẳng hàng nên } \overrightarrow{BD} = l\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k + 4 - 1 = l(0 - 1) \\ 5 - 3 = l(0 - 3) \\ 6 - 2 = l(c - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{7}{12} \\ l = -\frac{2}{3} \\ c = -4 \end{cases}$$

Vậy  $C(0; 0; -4)$ .

**Câu 29:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(-2; 3; 1)$ ,  $B(2; 1; 0)$ ,  $C(-3; -1; 1)$ . Tìm tất cả các điểm  $D$  sao cho  $ABCD$  là hình thang có đáy  $AD$  và  $S_{ABCD} = 3S_{\triangle ABC}$

- A.  $D(8; 7; -1)$ . B.  $\begin{bmatrix} D(-8; -7; 1) \\ D(12; 1; -3) \end{bmatrix}$ . C.  $\begin{bmatrix} D(8; 7; -1) \\ D(-12; -1; 3) \end{bmatrix}$ . D.  $D(-12; -1; 3)$ .

**Lời giải**

Ta có:  $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot d(A, BC) \Leftrightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC}$ .

$$\Leftrightarrow 3S_{\triangle ABC} = \frac{(AD + BC) \cdot S_{\triangle ABC}}{BC} \Leftrightarrow 3BC = AD + BC \Leftrightarrow AD = 2BC.$$

Mà  $ABCD$  là hình thang có đáy  $AD$  nên  $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} (1)$ .

$$\overrightarrow{BC} = (-5; -2; 1), \overrightarrow{AD} = (x_D + 2; y_D - 3; z_D - 1).$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 2 = -10 \\ y_D - 3 = -4 \\ z_D - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -12 \\ y_D = -1 \\ z_D = 3 \end{cases} \text{ . Vậy } D(-12; -1; 3).$$

**Câu 30:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hình vuông  $ABCD$  trong đó  $A(1; 2; 0)$ ,  $B(3; 0; 8)$  và  $C(-3; -6; 8)$ . Hai điểm  $M, N$  lần lượt nằm trên hai cạnh  $AB, BC$  thỏa mãn  $AM = BN = \frac{1}{3}BC$ .

Gọi  $I(a; b; c)$  là giao điểm của  $AN, DM$ . Tính  $P = a + b + c$ .

A.  $\frac{17}{5}$ .  
C.  $\frac{20}{5}$ .

B.  $\frac{21}{5}$ .  
D. 5.

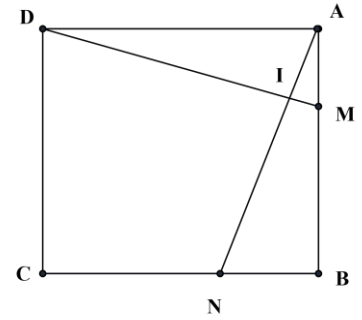
**Lời giải**

$$\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{DM} = \left( \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} \right) \cdot \left( \overrightarrow{DA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \right) = 0 \Rightarrow AN \perp DM$$

Ta có  $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} \Rightarrow N(1; -2; 8)$ . Hai tam giác  $\triangle AIM$  và  $\triangle ABN$  đồng dạng

$$\Rightarrow AI = \frac{AM \cdot AB}{AN} = \frac{1}{\sqrt{10}} AB, AN = \frac{\sqrt{10}}{3} AB \Rightarrow AI = \frac{3}{10} AN$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{10} \overrightarrow{AN} \Rightarrow I \left( 1; \frac{4}{5}; \frac{12}{5} \right) \Rightarrow P = \frac{21}{5}.$$



**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(4; 2; 1)$ ,  $B(2; 1; 3)$ ,  $C(-1; 3; -2)$ .

- a) Tọa độ trọng tâm tam giác  $ABC$  bằng  $\left( \frac{5}{3}; 2; \frac{2}{3} \right)$ .  
b) Tọa độ trung điểm đoạn thẳng  $AB$  bằng  $\left( 3; \frac{3}{2}; 2 \right)$ .  
c) Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành thì tọa độ điểm  $D = (1; 4; -4)$ .  
d) Ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.

**Lời giải**

a) Đúng: Tọa độ trọng tâm tam giác  $ABC \left( \frac{4+2-1}{3}; \frac{2+1+3}{3}; \frac{1+3-2}{3} \right) = \left( \frac{5}{3}; 2; \frac{2}{3} \right)$ .

b) Đúng: Tọa độ trung điểm đoạn thẳng  $AB \left( \frac{4+2}{2}; \frac{2+1}{2}; \frac{1+3}{2} \right) = \left( 3; \frac{3}{2}; 2 \right)$ .

c) Đúng: Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-4 = -1-x_D \\ 1-2 = 3-y_D \\ 3-1 = -2-z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 4 \\ z_D = -4 \end{cases} \Rightarrow D(1; 4; -4).$$

d) Sai: Vì  $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2; -1; 2) \\ \overrightarrow{AC} = (-5; 1; -3) \end{cases}$ . Ta có:  $\frac{-2}{-5} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{-3} \Rightarrow A, B, C$  không thẳng hàng.

**Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(3; 5; -1)$ ,  $B(7; x; 1)$ ,  $C(9; 2; y)$ .

- a) Ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng thì  $x + y = 5$ .  
b) Điểm  $G \left( \frac{19}{3}; \frac{8}{3}; 3 \right)$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  thì  $x = 1; y = 3$ .  
c) Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  thì  $x = 13, y = -1$ .  
d) Tích vô hướng của  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3x + 2y + 41$ .

**Lời giải**

a) Đúng: Ta có  $\overrightarrow{AB} = (4; x-5; 2)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (6; -3; y+1)$

$$\text{Đề ba điểm } A, B, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = k \cdot 6 \\ x-5 = k(-3) \\ 2 = k(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy  $x + y = 5$ .

$$\text{b) Đúng: Ta có } \begin{cases} \frac{3+7+9}{3} = \frac{19}{3} \\ \frac{5+x+2}{3} = \frac{8}{3} \\ \frac{-1+1+y}{3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

c) Đúng: Ta có  $\overrightarrow{AB} = (4; x - 5; 2)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (6; -3; y + 1)$

Khi đó:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24 + (x - 5)(-3) + 2(y + 1)$ . Với  $\begin{cases} x = 13 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

d) Đúng. Vì  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24 + (x - 5)(-3) + 2(y + 1) = -3x + 2y + 41$ .

**Câu 3:** Cho các điểm  $A(1; -2; 3)$ ,  $B(-2; 1; 2)$ ,  $C(3; -1; 2)$ .

a)  $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; -1)$ .

b)  $\overrightarrow{AC} = (2; -1; 1)$ .

c)  $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ .

d) Ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.

#### Lời giải

a) Đúng:  $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (-3; 3; -1)$ .

b) Sai:  $\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A) = (2; 1; -1)$

c) Sai:  $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; -1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (2; 1; -1)$ . Hai vec tơ này không cùng phương nên không tồn tại số thực  $k$  để  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ .

d) Đúng: Hai vec tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  không cùng phương nên ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.

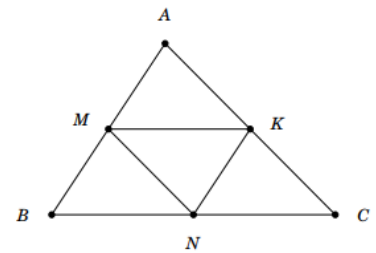
**Câu 4:** Cho ba điểm  $A(3; 3; -6)$ ,  $B(1; 3; 2)$  và  $C(-1; -3; 1)$ . Gọi  $M, N, K$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC$  và  $CA$ .

a) Tọa độ  $M(2; 3; 2)$ .

b) Với  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  thì  $GC = 2\sqrt{5}$ .

c) Trọng tâm tam giác  $MNK$  là  $E(1; 1; -1)$ .

d) Với  $D(-3; -3; 9)$  thì tứ giác  $ABDC$  là hình bình hành.



#### Lời giải

a) Sai:  $M$  là trung điểm của  $AB$ , suy ra  $M\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$  hay  $M(2; 3; -2)$ .

b) Sai: Ta có  $G(1; 1; -1)$ . Suy ra  $GC = \sqrt{(-1-1)^2 + (-3-1)^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{6}$ .

c) Đúng: Hai tam giác  $ABC$  và  $MNK$  có cùng trọng tâm. Suy ra  $E$  trùng với  $G(1; 1; -1)$ .

d) Đúng: Ta có  $\overrightarrow{AC} = (-4; -6; 7)$ ,  $\overrightarrow{BD} = (-4; -6; 7)$  suy ra  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ .

Vậy  $ABDC$  là hình bình hành.

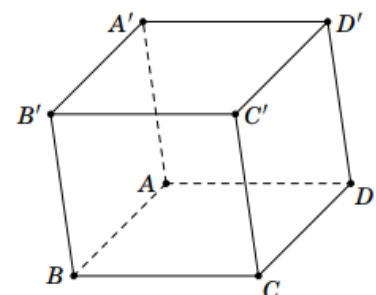
**Câu 5:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ , biết điểm  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(1; 0; 0)$ ,  $C(1; 2; 0)$ ,  $D'(-1; 3; 5)$ . Gọi  $M, N$  là tâm của các hình bình hành  $ABB'A'$ ,  $ADD'A'$ .

a) Tọa độ  $D(0; 2; 0)$ .

b) Tọa độ  $A'(-1; 1; 5)$ .

c) Tọa độ  $\overrightarrow{MN} = (-1; 1; 0)$ .

d)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'}| = \sqrt{29}$ .



**Lời giải**

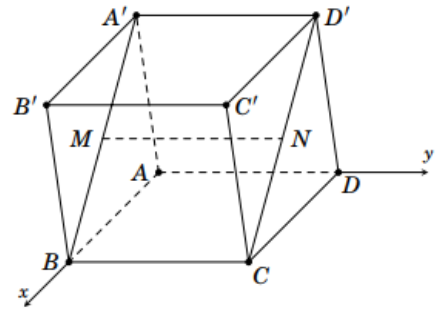
a) Đúng: Theo qui tắc hình bình hành, ta có  
 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (0; 2; 0) \Rightarrow D(0; 2; 0)$ .

b) Đúng: Ta có  $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DD'} = (-1; 1; 5)$   
 $\Rightarrow A'(-1; 1; 5)$ .

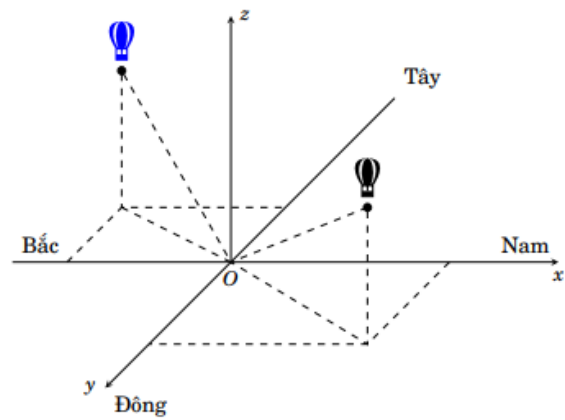
c) Sai: Theo hình vẽ  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} = (0; 2; 0)$ .

d) Sai: Ta có  $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = (0; 3; 5)$ .

Xét  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}| = |\overrightarrow{AC'}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$



**Câu 6:** Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km. Chọn hệ trục  $Oxyz$  với gốc  $O$  đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất với trục  $Ox$  hướng về phía nam, trục  $Oy$  hướng về phía đông và trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên trời (Hình bên dưới), đơn vị đo lấy theo kilomet.



a) Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ nhất là  $(2; 1; 0,5)$ .

b) Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ hai là  $(-1,5; -1; 0,8)$ .

c) Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng  $\sqrt{21}$  km.

d) Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là 3,92 km (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

**Lời giải**

a) Đúng: Chiếc khinh khí cầu thứ nhất có tọa độ là  $(2; 1; 0,5)$ .

b) Sai: Chiếc khinh khí cầu thứ hai có tọa độ là  $(-1; -1,5; 0,8)$ .

c) Sai: Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng  $\sqrt{2^2 + 1^2 + 0,5^2} = \frac{\sqrt{21}}{2}$  (km)

d) Đúng: Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là

$$\sqrt{(-1 - 2)^2 + (1,5 - 1)^2 + (0,8 - 0,5)^2} = \sqrt{15,34} \approx 3,92 \text{ (km)}.$$

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn**

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; -2; 5)$  và  $B(-2; -2; 1)$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AB$

**Lời giải**

Ta có:  $AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2+2)^2 + (1-5)^2} = 5$ .

**Câu 2:** Trong không gian hệ tọa độ  $Oxyz$  cho tứ diện  $ABCD$  với  $A(1; -4; 2), B(2; 1; -3), C(3; 0; -2)$  và  $D(2; -5; -1)$ . Hoành độ điểm  $G$  thỏa mãn  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$  là bao nhiêu?

**Lời giải**

$$\text{Tọa độ điểm } G \text{ thỏa mãn: } \begin{cases} x_G = \frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4} = \frac{1+2+3+2}{4} = 2 \\ y_G = \frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4} = \frac{-4+1+0+(-5)}{4} = -2 \\ z_G = \frac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4} = \frac{2+(-3)+(-2)+(-1)}{4} = -1 \end{cases} \Rightarrow G(2; -2; -1)$$

**Câu 3:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(3; 2; -1), B(-1; -x; 1), C(7; -1; y)$ . Khi  $A, B, C$  thẳng hàng thì giá trị biểu thức  $x + y$  bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-4; -x-2; 2); \overrightarrow{AC} = (4; -3; y+1)$ .

$$\text{Để } A, B, C \text{ thẳng hàng thì } \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = k \cdot 4 \\ -x-2 = k \cdot (-3) \\ 2 = k \cdot (y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ x = -5 \\ y = -3 \end{cases}$$

Vậy  $x + y = -5 - 3 = -8$ .

**Câu 4:** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$  cho hai điểm  $A(1; -2; 3), B(4; 1; -1)$ . Điểm  $M(a; b; c)$  thỏa mãn  $MA \cdot \overrightarrow{MA} = 4MB \cdot \overrightarrow{MB}$ . Giá trị biểu thức  $a + b + c$  bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

Do  $MA \cdot \overrightarrow{MA} = 4MB \cdot \overrightarrow{MB}$  nên  $\overrightarrow{MA}$  cùng hướng  $\overrightarrow{MB}$ .

$$MA \cdot \overrightarrow{MA} = 4MB \cdot \overrightarrow{MB} \Rightarrow MA^2 = 4MB^2 \Leftrightarrow MA = 2MB \Rightarrow B \text{ là trung điểm } AM \Rightarrow M(7; 4; -5).$$

Khi đó  $a + b + c = 7 + 4 + (-5) = 6$

**Câu 5:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 2; 3), B(-2; -4; 9)$ . Điểm  $M$  thuộc đoạn  $AB$  sao cho  $MA = 2MB$ . Bình phương độ dài đoạn thẳng  $OM$  bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

Gọi  $M(x; y; z)$ .

Vì điểm  $M$  thuộc đoạn  $AB$  sao cho  $MA = 2MB$  nên

$$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot (-2-x) = -3 \\ 3 \cdot (-4-y) = -6 \\ 3 \cdot (9-z) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ z = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(-1; -2; 7) \Rightarrow OM = \sqrt{1+4+49} = \sqrt{54} \Rightarrow OM^2 = 54.$$

**Câu 6:** Trong không gian  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(1; -1; 1), B(3; 1; 2)$  và  $C(-1; 0; 3)$ . Có bao nhiêu điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình thang có 2 cạnh đáy  $AB, CD$  và có góc tại  $D$  bằng  $45^\circ$ .

**Lời giải**

Gọi  $D(x; y; z)$  khi đó  $\overrightarrow{AB} = (2; 2; 1), \overrightarrow{DC} = (-1-x; -y; 3-z)$

Tứ giác  $ABCD$  là hình thang có 2 cạnh đáy  $AB, CD$  nên  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$  cùng phương.

$$\Rightarrow \frac{-1-x}{2} = \frac{-y}{2} = \frac{3-z}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z-7 \\ y = 2z-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} = (x-1; y+1; z-1) \\ \overrightarrow{CD} = (x+1; y; z-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AD} = (2z-8; 2z-5; z-1) \\ \overrightarrow{CD} = (2z-6; 2z-6; z-3) \end{cases}$$

$$\cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD}) = \frac{9(z-3)^2}{\sqrt{9(z^2-6z+10)} \cdot \sqrt{9(z-3)^2}} = \frac{z-3}{\sqrt{z^2-6z+10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 2(z^2 - 6z + 9) = z^2 - 6z + 10 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1; y = 2 \\ x = -3; y = -2 \end{cases}$$

Vậy  $D(1; 2; 4)$  hoặc  $D(-3; -2; 2)$ .

**Câu 7:** Trong không gian  $Oxyz$  cho hình thang  $ABCD$  vuông tại  $A$  và  $B$ . Ba đỉnh  $A(1; 2; 1), B(2; 0; -1), C(6; 1; 0)$  và hình thang có diện tích bằng  $6\sqrt{2}$ . Giả sử đỉnh  $D(a; b; c)$ . Tính  $a + b + c$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (1; -2; -2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 3; \overrightarrow{BC} = (4; 1; 1) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 3\sqrt{2}.$$

Theo giả thiết  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$  và có diện tích bằng  $6\sqrt{2}$  nên  $\frac{1}{2}AB(AD + BC) = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (AD + 3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{2} \Rightarrow AD = \frac{1}{3}BC$ .

Do  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$  nên  $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ .

$$\text{Giả sử } D(a; b; c) \text{ khi đó ta có } \begin{cases} a - 1 = \frac{4}{3} \\ b - 2 = \frac{1}{3} \\ c - 1 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = \frac{7}{3} \\ c = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 6.$$

**Câu 8:** Trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$  cho 3 điểm  $A(5; -2; 0), B(4; 5; -2)$  và  $C(0; 3; 2)$ . Điểm  $M$  di chuyển trên trục  $Ox$ . Đặt  $Q = 2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| + 3|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ . Biết giá trị nhỏ nhất của  $Q$  có dạng  $a\sqrt{b}$  trong đó  $a, b \in \mathbb{N}$  và  $b$  là số nguyên tố. Tính  $a + b$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } Q = 2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| + 3|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 2|3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| + 3|2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}|$$

Với  $G(3; 2; 0)$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  và  $I(2; 4; 0)$  là trung điểm  $BC$ , ta có:

$$Q = 2|3\overrightarrow{MG}| + 3|2\overrightarrow{MI}| = 6(MG + MI),$$

Do  $G$  và  $I$  nằm cùng phía so với  $Ox$  nên gọi  $G'(3; -2; 0)$  là điểm đối xứng của  $G$  qua  $Ox$ .

$$\text{Khi đó } Q = 2|3\overrightarrow{MG}| + 3|2\overrightarrow{MI}| = 6(MG + MI) = 6(MG' + MI) \geq 6G'I = 6\sqrt{37}.$$

Đẳng thức xảy ra khi  $M$  là giao điểm của  $G'I$  và  $Ox$ .

**Câu 9:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(-2; 3; 1), B(2; 1; 0), C(-3; -1; 1)$ . Gọi  $D(a; b; c)$  là điểm sao cho  $ABCD$  là hình thang có cạnh đáy  $AD$  và diện tích hình thang  $ABCD$  bằng 4 lần diện tích tam giác  $ABC$ . Tính  $a + b + c$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } S_{ABCD} = 4S_{ABC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}d(BC, AD)(BC + AD) = 4 \cdot \frac{1}{2}d(BC, AD)BC$$

$$\Leftrightarrow BC + AD = 4BC \Leftrightarrow AD = 3BC. \text{ Do } ABCD \text{ là hình thang có đáy } AD \Rightarrow \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 = -15 \\ b - 3 = -6 \\ c - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -17 \\ b = -3 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = -16.$$

-----HẾT-----