Dạng 4: Áp dụng tính chất của các giá trị lượng giác

Phương pháp: Sử dụng nhóm công thức liên hệ giữa các giá trị lượng giác để tính toán

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Thực hiện các yêu cầu trong các trường hợp sau:

a) Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ và $\tan\alpha + \cot\alpha < 0$

b) Cho $3\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \frac{1}{2}$. Tính $A = 2\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$.

Lời giải

a) Ta có $\cot^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = 25 \Rightarrow \cot^2\alpha = 24$ hay $\cot\alpha = \pm 2\sqrt{6}$

Vì $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ cùng dấu và $\tan\alpha + \cot\alpha < 0$ nên $\tan\alpha < 0, \cot\alpha < 0$

Do đó $\cot\alpha = -2\sqrt{6}$. Ta lại có $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \cot\alpha\sin\alpha = -2\sqrt{6}.\frac{1}{5} = \frac{-2\sqrt{6}}{5}$

b) Ta có $3\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3\sin^4\alpha - \left(1 - \sin^2\alpha\right)^2 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 6\sin^4\alpha - 2\left(1 - 2\sin^2\alpha + \sin^4\alpha\right) = 1 \Leftrightarrow 4\sin^4\alpha + 4\sin^2\alpha - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin^2\alpha - 1\right)\left(2\sin^2\alpha + 3\right) = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2\alpha - 1 = 0$ (Do $2\sin^2\alpha + 3 > 0$) suy ra $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$.

Ta lại có $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ suy ra $A = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Bài tập 2: Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

a) $\frac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = 1 - \sin\alpha\cos\alpha$

b) $\frac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha} + \frac{1 + \cot\alpha}{1 - \cot\alpha} = 0$

Lời giải

a) $\frac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{\left(\sin\alpha + \cos\alpha\right)\left(\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha\right)}{\sin\alpha + \cos\alpha}$

$= \sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 - \sin\alpha\cos\alpha.$

b) $\frac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha} + \frac{1 + \cot\alpha}{1 - \cot\alpha} = \frac{\tan\alpha\cot\alpha + \tan\alpha}{\tan\alpha\cot\alpha - \tan\alpha} + \frac{1 + \cot\alpha}{1 - \cot\alpha}$

$= \frac{\tan\alpha\left(\cot\alpha + 1\right)}{\tan\alpha\left(\cot\alpha - 1\right)} + \frac{1 + \cot\alpha}{1 - \cot\alpha} = \frac{\cot\alpha + 1}{\cot\alpha - 1} - \frac{1 + \cot\alpha}{\cot\alpha - 1} = 0.$

Bài tập 3: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sin^2(3\pi-\alpha)+\sin^2\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)$ b) $\left[1+\tan^2(-\alpha+11\pi)\right].\sin^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$

Lời giải

a) Ta có: $\sin(3\pi-\alpha)=\sin(\pi-\alpha+2\pi)=\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$;

$\sin\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+2\pi\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha.$

Suy ra $\sin^2(3\pi-\alpha)+\sin^2\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

b) Ta có: $\tan(-\alpha+11\pi)=\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$;

$\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}-2\pi\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha.$

Suy ra $\left[1+\tan^2(-\alpha+11\pi)\right].\sin^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=\left(1+\tan^2\alpha\right).\cos^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}.\cos^2\alpha=1.$

Bài tập 4: Tính giá trị của các biểu thức sau đây:

a) $A=\sin^2 5^\circ+\sin^2 10^\circ+\sin^2 15^\circ+\ldots+\sin^2 85^\circ$ (17 số hạng).

b) $B=\cos 5^\circ+\cos 10^\circ+\cos 15^\circ+\ldots+\cos 175^\circ$ (35 số hạng).

Lời giải

a) Vận dụng: $\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$, ta có: $\sin 85^\circ=\cos 5^\circ,\sin 80^\circ=\cos 10^\circ$
$\sin 75^\circ=\cos 15^\circ,\ldots,\sin 50^\circ=\cos 40^\circ$.

Vậy $A=\left(\sin^2 5^\circ+\cos^2 5^\circ\right)+\left(\sin^2 10^\circ+\cos^2 10^\circ\right)+\ldots+\left(\sin^2 40^\circ+\cos^2 40^\circ\right)+\sin^2 45^\circ$

$=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{8\text{ số }1}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{17}{2}$

b) Vận dụng: $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$ ta có: $\cos 175^\circ=-\cos 5^\circ,\cos 170^\circ=-\cos 10^\circ$

$\cos 165^\circ=-\cos 15^\circ,\ldots,\cos 95^\circ=-\cos 85^\circ$

Vậy $B=\left(\cos 5^\circ+\cos 175^\circ\right)+\left(\cos 10^\circ+\cos 170^\circ\right)+\ldots+\left(\cos 85^\circ+\cos 95^\circ\right)+\cos 90^\circ$

$=\underbrace{0+0+\ldots+0}_{17\text{ số }1}+\cos 90^\circ=0$.

Bài tập 5: Chứng minh các đẳng thức sau(giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $\cos^4 x+2\sin^2 x=1+\sin^4 x$ b) $\frac{\sin x+\cos x}{\sin^3 x}=\cot^3 x+\cot^2 x+\cot x+1$

c) $\dfrac{\cot^2 x-\cot^2 y}{\cot^2 x.\cot^2 y}=\dfrac{\cos^2 x-\cos^2 y}{\cos^2 x.\cos^2 y}$

d) $\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}=3\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$

Lời giải

a) Đẳng thức tương đương với $\cos^4 x=1-2\sin^2 x+\left(\sin^2 x\right)^2 \Leftrightarrow \cos^4 x=\left(1-\sin^2 x\right)^2$ (*)

Mà $\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow \cos^2 x=1-\sin^2 x$. Do đó (*) $\Leftrightarrow \cos^4 x=\left(\cos^2 x\right)^2$ (đúng).

b) Ta có $VT=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin^3 x}=\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$ mà $\cot^2 x+1=\dfrac{1}{\sin^2 x}$ và $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ nên

$VT=\cot^2 x+1+\cot x\left(\cot^2 x+1\right)=\cot^3 x+\cot^2 x+\cot x+1=VP$.

c) Ta có $VT=\dfrac{\cot^2 x-\cot^2 y}{\cot^2 x.\cot^2 y}=\dfrac{1}{\cot^2 y}-\dfrac{1}{\cot^2 x}=\tan^2 y-\tan^2 x$

$=\left(\dfrac{1}{\cos^2 y}-1\right)-\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)=\dfrac{1}{\cos^2 y}-\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^2 x-\cos^2 y}{\cos^2 x.\cos^2 y}=VP$.

d) $VT=\sqrt{\sin^4 x+4\left(1-\sin^2 x\right)}+\sqrt{\cos^4 x+4\left(1-\cos^2 x\right)}$

$=\sqrt{\left(\sin^2 x\right)^2-4\sin^2 x+4}+\sqrt{\left(\cos^2 x\right)^2-4\cos^2 x+4}=\sqrt{\left(\sin^2 x-2\right)^2}+\sqrt{\left(\cos^2 x-2\right)^2}$

$=\left(2-\sin^2 x\right)+\left(2-\cos^2 x\right)=4-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=3$

Mặt khác vì $\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow \tan\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=\cot\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ nên

$VP=3\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cot\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=3\Rightarrow VT=VP$.

Bài tập 6: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x.

a) $A=\dfrac{\sin^6 x+\cos^6 x+2}{\sin^4 x+\cos^4 x+1}$

b) $B=\dfrac{1+\cot x}{1-\cot x}-\dfrac{2+2\cot^2 x}{\left(\tan x-1\right)\left(\tan^2 x+1\right)}$

c) $C=\sqrt{\sin^4 x+6\cos^2 x+3\cos^4 x}+\sqrt{\cos^4 x+6\sin^2 x+3\sin^4 x}$

Lời giải

a) Ta có Ta có $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=\left(\sin^2\alpha\right)^3+\left(\cos^2\alpha\right)^3=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)$

$=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

Do đó $A=\dfrac{1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha+2}{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+1}=\dfrac{3\left(1-\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)}{2\left(1-\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)}=\dfrac{3}{2}$

Vậy A không phụ thuộc vào x.

b) Ta có $B=\dfrac{1+\dfrac{1}{\tan x}}{1-\dfrac{1}{\tan x}}-\dfrac{2+\dfrac{2\cos^2 x}{\sin^2 x}}{(\tan x-1)\dfrac{1}{\sin^2 x}}=\dfrac{\tan x+1}{\tan x-1}-\dfrac{2(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\tan x-1}=\dfrac{\tan x+1-2}{\tan x-1}=1$

Vậy B không phụ thuộc vào x.

c) $C=\sqrt{(1-\cos^2 x)^2+6\cos^2 x+3\cos^4 x}+\sqrt{(1-\sin^2 x)^2+6\sin^2 x+3\sin^4 x}$

$=\sqrt{4\cos^4 x+4\cos^2 x+1}+\sqrt{4\sin^4 x+4\sin^2 x+1}=\sqrt{(2\cos^2 x+1)^2}+\sqrt{(2\sin^2 x+1)^2}$

$=2\cos^2 x+1+2\sin^2 x+1=3$

Vậy C không phụ thuộc vào x.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đơn giản biểu thức $A=\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)$, ta được:

A. $\cos\alpha$. **B.** $\sin\alpha$. **C.** $-\cos\alpha$. **D.** $-\sin\alpha$.

Lời giải

Ta có: $A=\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$.

Câu 2: Giá trị của biểu thức $S=3-\sin^2 90^\circ+2\cos^2 60^\circ-3\tan^2 45^\circ$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** 3

Lời giải

Ta có $S=3-\sin^2 90^\circ+2\cos^2 60^\circ-3\tan^2 45^\circ=3-1^2+2.\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-3.1^2=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 3: Các đẳng thức nào sau đây đồng thời xảy ra?

A. $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{3};\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{5};\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

C. $\sin\alpha=\dfrac{4}{5};\cos\alpha=\dfrac{-3}{5}$. **D.** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{4};\cos\alpha=\dfrac{1}{4}$.

Lời giải:

Áp dụng công thức $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

Câu 4: Cho $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $P=\dfrac{\sin\alpha}{2\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha}$ là

A. $\frac{5}{26}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $-\frac{5}{26}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải:

$$P=\frac{\sin\alpha}{2\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha}=\frac{\sin\alpha\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)}{2\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha}=\frac{\tan^3\alpha+\tan\alpha}{2\tan^3\alpha+8}=\frac{5}{26}$$

Câu 5: Rút gọn biểu thức $M=\sin^6 x+\cos^6 x$.

A. $M=1+3\sin^2 x\cos^2 x$. **B.** $M=1-3\sin^2 x$.

C. $M=1-\frac{3}{2}\sin^2 2x$. **D.** $M=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$.

Lời giải

Ta có $M=\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2 x\right)^3+\left(\cos^2 x\right)^3$

$=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^3-3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=1-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x.$

Câu 6: Rút gọn biểu thức $M=\tan^2 x-\sin^2 x$.

A. $M=\tan^2 x$. **B.** $M=\sin^2 x$. **C.** $M=\tan^2 x.\sin^2 x$. **D.** $M=1$.

Lời giải

Ta có $M=\tan^2 x-\sin^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\sin^2 x=\sin^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)=\sin^2 x.\tan^2 x.$

Câu 7: Rút gọn biểu thức $M=\cot^2 x-\cos^2 x$.

A. $M=\cot^2 x$. **B.** $M=\cos^2 x$. **C.** $M=1$. **D.** $M=\cot^2 x.\cos^2 x$.

Lời giải

Ta có $M=\cot^2 x-\cos^2 x=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-\cos^2 x=\cos^2 x\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)=\cos^2 x.\cot^2 x.$

Câu 8: Rút gọn biểu thức $M=\left(1\sin^2 x\right)\cot^2 x+\left(1\cot^2 x\right)$.

A. $M=\sin^2 x$. **B.** $M=\cos^2 x$. **C.** $M=\sin^2 x$. **D.** $M=\cos^2 x$.

Lời giải

Ta biến đổi: $M=\left(\cot^2 x-\cos^2 x\right)+\left(1-\cot^2 x\right)=1-\cos^2 x=\sin^2 x.$

Câu 9: Rút gọn biểu thức $M=\sin^2\alpha\tan^2\alpha+4\sin^2\alpha-\tan^2\alpha+3\cos^2\alpha$.

A. $M=1+\sin^2\alpha$. **B.** $M=\sin\alpha$. **C.** $M=2\sin\alpha$. **D.** $M=3$.

Lời giải

Ta có $M=\tan^2\alpha\left(\sin^2\alpha-1\right)+4\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha$

$=\tan^2\alpha\left(-\cos^2\alpha\right)+4\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha$

$=-\sin^2\alpha+4\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha=3\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=3.$

Câu 10: Rút gọn biểu thức $M=\left(\sin^4 x+\cos^4 x-1\right)\left(\tan^2 x+\cot^2 x+2\right)$.

A. $M=-4.$ **B.** $M=-2.$ **C.** $M=2.$ **D.** $M=4.$

Lời giải

Ta có $M=\left(1-2\sin^2 x.\cos^2 x-1\right)\left(\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+2\right)$

$=\left(-2\sin^2 x.\cos^2 x\right)\left(\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x.\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\right)=(-2).\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2=-2.$

Câu 11: Đơn giản biểu thức $P=\dfrac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}.$

A. $P=1+2\tan^2\alpha.$ **B.** $P=1-2\tan^2\alpha.$ **C.** $P=-1+2\tan^2\alpha.$ **D.** $P=-1-2\tan^2\alpha.$

Lời giải

Ta có $P=\dfrac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{1+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\tan^2\alpha=1+2\tan^2\alpha.$

Câu 12: Đơn giản biểu thức $P=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin^2\alpha}-\dfrac{1}{1+\cos\alpha}.$

A. $P=-\dfrac{2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$ **B.** $P=\dfrac{2}{\sin^2\alpha}.$ **C.** $P=\dfrac{2}{1+\cos\alpha}.$ **D.** $P=0.$

Lời giải

Ta có $P=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin^2\alpha}-\dfrac{1}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}-\dfrac{1}{1+\cos\alpha}.$

$=\dfrac{1-\cos\alpha}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}-\dfrac{1}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1}{1+\cos\alpha}-\dfrac{1}{1+\cos\alpha}=0.$

Câu 13: Đơn giản biểu thức $P=\dfrac{1-\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\cos^2\alpha.$

A. $P=\tan^2\alpha.$ **B.** $P=1.$ **C.** $P=-\cos^2\alpha.$ **D.** $P=\cot^2\alpha.$

Lời giải

$P=\dfrac{1-\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{1-\cos^2\alpha\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)}{\cos^2\alpha}=\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha.$

Câu 14: Đơn giản biểu thức $P=\dfrac{2\cos^2 x-1}{\sin x+\cos x}.$

A. $P=\cos x+\sin x.$ **B.** $P=\cos x-\sin x.$ **C.** $P=\cos 2x-\sin 2x.$ **D.** $P=\cos 2x+\sin 2x.$

Lời giải

Ta có $P=\dfrac{2\cos^2 x-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{\sin x+\cos x}=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x+\cos x}=\cos x-\sin x.$

Câu 15: Đơn giản biểu thức $P=\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\cot\alpha-\sin\alpha cos\alpha}.$

A. $P=2\tan^2\alpha.$ **B.** $P=\dfrac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}.$ **C.** $P=2\cot^2\alpha.$ **D.** $P=\dfrac{2}{\cos^2\alpha}.$

Lời giải

Ta có $P=\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\cot\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha.\cos\alpha+\cos^2\alpha-1}{\cos\alpha.\left(\dfrac{1}{\sin\alpha}-\sin\alpha\right)}$

$=\dfrac{1+2\sin\alpha.\cos\alpha-1}{\cos\alpha.\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha}}=\dfrac{2\sin\alpha.\cos\alpha}{\dfrac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha}}=\dfrac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2\tan^2\alpha.$

Câu 16: Đơn giản biểu thức $P=\left(\dfrac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\cos\alpha+1}\right)^2+1.$

A. $P=2.$ **B.** $P=1+\tan\alpha.$ **C.** $P=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}.$ **D.** $P=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}.$

Lời giải

Ta có $\dfrac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\cos\alpha+1}=\dfrac{\sin\alpha\left(1+\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)}{\cos\alpha+1}=\dfrac{\sin\alpha\left(\dfrac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha}\right)}{\cos\alpha+1}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha..$

Suy ra $P=\tan^2\alpha+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}.$

Câu 17: Đơn giản biểu thức $P=\tan\alpha\left(\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\right).$

A. $P=2.$ **B.** $P=2\cos\alpha.$ **C.** $P=2\tan\alpha.$ **D.** $P=2\sin\alpha.$

Lời giải

Ta có $P=\tan\alpha\left(\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\right)=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\dfrac{1}{\sin\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\right).$

$=\dfrac{1}{\cos\alpha}+\cos\alpha-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{(1-\sin^2\alpha)+\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{2\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=2\cos\alpha.$

Câu 18: Đơn giản biểu thức $P=\dfrac{\cot^2x-\cos^2x}{\cot^2x}+\dfrac{\sin x\cos x}{\cot x}.$

A. $P=1.$ **B.** $P=-1.$ **C.** $P=\dfrac{1}{2}.$ **D.** $P=-\dfrac{1}{2}.$

Lời giải

Ta có $\dfrac{\cot^2x-\cos^2x}{\cot^2x}=1-\dfrac{\cos^2x}{\cot^2x}=1-\cos^2x.\dfrac{\sin^2x}{\cos^2x}=1-\sin^2x.$

Và $\dfrac{\sin x.\cos x}{\cot x}=\sin x.\cos x.\dfrac{\sin x}{\cos x}=\sin^2x$. Suy ra. $P=1-\sin^2x+\sin^2x=1.$

Câu 19: Tính $S=\sin^2 5^0+\sin^2 10^0+\sin^2 15^0+...\sin^2 8^0+\sin^2 85^0$

A. $\dfrac{19}{2}.$ **B.** $8.$ **C.** $\dfrac{17}{2}.$ **D.** $9.$

Lời giải

$S=\sin^2 5^0+\sin^2 10^0+\sin^2 15^0+...\sin^2 80^0+\sin^2 85^0$

$=\left(\sin^2 5^0+\sin^2 85^0\right)+\left(\sin^2 10^0+\sin^2 80^0\right)+...\left(\sin^2 15^0+\sin^2 75^0\right)+\sin^2 45^0=8+\frac{1}{2}=\frac{17}{2}$.

Câu 20: Với mọi góc α, biểu thức $\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{5}\right)+...+\cos\left(\alpha+\frac{9\pi}{5}\right)$ nhận giá trị bằng

A. 10 **B.** -10 **C.** 1 **D.** 0

Lời giải

Có 10 số hạng, chia thành 5 cặp.

Có $\alpha+\frac{9\pi}{5}=\pi+\left(\alpha+\frac{4\pi}{5}\right)\Rightarrow\cos\left(\alpha+\frac{9\pi}{5}\right)=-\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{5}\right)$

Tương tự $\cos\left(\alpha+\frac{8\pi}{5}\right)=-\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{5}\right)$; $\cos\left(\alpha+\frac{7\pi}{5}\right)=-\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{5}\right)$;

$\cos\left(\alpha+\frac{6\pi}{5}\right)=-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{5}\right)$; $\cos(\alpha+\frac{5\pi}{5})=-\cos\alpha$. Do đó $P=0$

Câu 21: Biết $\tan x=2$, giá trị của biểu thức $M=\frac{3\sin x-2\cos x}{5\cos x+7\sin x}$ bằng:

A. $\frac{4}{9}$. **B.** $-\frac{4}{9}$. **C.** $\frac{4}{19}$. **D.** $-\frac{4}{19}$.

Lời giải

Cách 1: Chia cả tử và mẫu của M cho $cosx$ ta có: $M=\frac{3\frac{\sin x}{\cos x}-2}{5+7\frac{\sin x}{\cos x}}=\frac{3.2-2}{5+7.2}=\frac{4}{19}$.

Cách 2: Ta có: $\tan x=2\Leftrightarrow\frac{\sin x}{\cos x}=2\Leftrightarrow\sin x=2\cos x$ thay $\sin x=2\cos x$ vào M:

$M=\frac{3.2\cos x-2\cos x}{5\cos x+7.2\cos x}=\frac{4\cos x}{19\cos x}=\frac{4}{19}$.

Câu 22: Cho $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Tính $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}+\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$

A. $-\frac{2}{\cos\alpha}$. **B.** $\frac{2}{\cos\alpha}$. **C.** $\frac{2}{\sin\alpha}$. **D.** $-\frac{2}{\sin\alpha}$.

Lời giải

Đặt $A=\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}+\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$

Khi đó $A^2=\left(\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}+\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}\right)^2=\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}+\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}+2=\frac{4}{1-\sin^2\alpha}=\frac{4}{\cos^2\alpha}$

Vì $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ nên $\cos\alpha>0$ do đó $A=\frac{2}{\cos\alpha}$.

Câu 23: Cho các góc α, β thỏa mãn $\frac{\pi}{2}<\alpha$, $\beta<\pi$, $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{3}$. Tính $\sin(\alpha+\beta)$.

A. $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{2+2\sqrt{10}}{9}$. **B.** $\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\sqrt{10}-2}{9}$.

C. $\sin(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{5}-4\sqrt{2}}{9}$. **D.** $\sin(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải

Do $\frac{\pi}{2}<\alpha$, $\beta<\pi\Rightarrow\begin{cases}\cos\alpha<0\\ \sin\beta>0\end{cases}$.

Ta có $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{1}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Suy ra $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\sin\beta=\frac{1}{3}.\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right).\frac{\sqrt{5}}{3}=-\frac{2+2\sqrt{10}}{9}$.

Vậy $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{2+2\sqrt{10}}{9}$.

Câu 24: Với mọi $\alpha\in\square$ thì $\tan(2017\pi+\alpha)$ bằng

A. $-\tan\alpha$. **B.** $\cot\alpha$. **C.** $\tan\alpha$. **D.** $-\cot\alpha$.

Lời giải

Ta có $\tan(2017\pi+\alpha)=\tan\alpha$.

$5\cos\alpha+12\sin\alpha=0$, ta có hệ phương trình $\begin{cases}5\cos\alpha+12\sin\alpha=0\\ 3\cos\alpha+2\sin\alpha=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\alpha=-\frac{5}{13}\\ \cos\alpha=\frac{12}{13}\end{cases}$.

Câu 25: Rút gọn biểu thức $M=(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2$.

A. $M=1$. **B.** $M=2$. **C.** $M=4$. **D.** $M=4\sin x.\cos x$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases}(\sin x+\cos x)^2=\sin^2x+\cos^2x+2\sin x.\cos x=1+2\sin x.\cos x\\ (\sin x-\cos x)^2=\sin^2x+\cos^2x-2\sin x.\cos x=1-2\sin x.\cos x\end{cases}$

Suy ra $M=2$.

Câu 26: Đơn giản biểu thức $A=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin(\alpha-\pi)$, ta được

A. $A=\cos\alpha+\sin\alpha$. **B.** $A=2\sin\alpha$. **C.** $A=\sin\alpha\cos\alpha$. **D.** $A=0$.

Lời giải

Ta có $A=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin(\alpha-\pi)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha-\sin\alpha=0.$

Câu 27: Rút gọn biểu thức $S=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin(\pi-x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos(\pi-x)$ ta được

A. $S=0.$ **B.** $S=\sin^2x-\cos^2x.$ **C.** $S=2\sin x\cos x.$ **D.** $S=1.$

Lời giải

Ta có $S=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right).\sin(\pi-x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right).\cos(\pi-x)$

$=\sin x.\sin x-\cos x.(-\cos x)=\sin^2x+\cos^2x=1.$

Câu 28: Cho $P=\sin(\pi+\alpha).\cos(\pi-\alpha)$ và $Q=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $P+Q=0.$ **B.** $P+Q=-1.$ **C.** $P+Q=1.$ **D.** $P+Q=2.$

Lời giải

Ta có $P=\sin(\pi+\alpha).\cos(\pi-\alpha)=-\sin\alpha.(-\cos\alpha)=\sin\alpha.\cos\alpha.$

Và $Q=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha.(-\sin\alpha)=-\sin\alpha.\cos\alpha.$

Khi đó $P+Q=\sin\alpha.\cos\alpha-\sin\alpha.\cos\alpha=0.$

Câu 29: Giá trị biểu thức $P=\left[\tan\frac{17\pi}{4}+\tan\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)\right]^2+\left[\cot\frac{13\pi}{4}+\cot(7\pi-x)\right]^2$ bằng

A. $\frac{1}{\sin^2x}.$ **B.** $\frac{1}{\cos^2x}.$ **C.** $\frac{2}{\sin^2x}.$ **D.** $\frac{2}{\cos^2x}.$

Lời giải

Ta có $\tan\frac{17\pi}{4}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+4\pi\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$ và $\tan\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)=\cot x.$

Và $\cot\frac{13\pi}{4}=\cot\left(\frac{\pi}{4}+3\pi\right)=\cot\frac{\pi}{4}=1;\cot(7\pi-x)=-\cot x.$

Suy ra $P=(1+\cot x)^2+(1-\cot x)^2=2+2\cot^2x=\frac{2}{\sin^2x}.$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho $\tan x=-2$. Tính được các biểu thức $A_1=\frac{5\cot x+4\tan x}{5\cot x-4\tan x}, A_2=\frac{2\sin x+\cos x}{\cos x-3\sin x}$, khi đó:

a) $\cot x=-\frac{1}{2}$ b) Vì $\tan x=-2$ nên $\cos x=0$ c) $A_1=-\frac{21}{11}$ d) $A_2=\frac{3}{7}$

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $\tan x = -2 \Rightarrow \cot x = -\frac{1}{2}$

b) Sai: Ta có $\tan x = -2$ nên $\cos x \neq 0$

c) Đúng: $A_1 = \dfrac{-\frac{5}{2} + 4.(-2)}{-\frac{5}{2} - 4.(-2)} = -\frac{21}{11}$

d) Sai: Chia tử và mẫu của biểu thức A_2 cho $\cos x$, ta được:

$$A_2 = \frac{\frac{2\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\cos x} - \frac{3\sin x}{\cos x}} = \frac{2\tan x + 1}{1 - 3\tan x} = \frac{2.(-2)+1}{1-3.(-2)} = -\frac{3}{7}$$

Câu 2: Cho $\cot x = 2$. Tính được các biểu thức $B_1 = \dfrac{2\sin x + 3\cos x}{3\sin x - 2\cos x}, B_2 = \dfrac{2}{\cos^2 x - \sin x \cos x}$, khi đó:

a) Vì $\cot x = 2$ nên $\sin x \neq 0$.

b) $B_1 = -8$

c) $B_2 = -5$

d) $B_1 + B_2 = -13$

Lời giải

a) Đúng: Vì $\cot x = 2$ nên $\sin x \neq 0$

b) Đúng: Chia cả tử và mẫu của biểu thức B_1 cho $\sin x$, ta được:

$$B_1 = \frac{2\frac{\sin x}{\sin x} + 3\frac{\cos x}{\sin x}}{3\frac{\sin x}{\sin x} - 2\frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{2 + 3\cot x}{3 - 2\cot x} = \frac{2 + 3\cdot 2}{3 - 2\cdot 2} = -8$$

c) Sai: Chia cả tử và mẫu của biểu thức B_2 cho $\sin^2 x$, ta được:

$$B_2 = \frac{\frac{2}{\sin^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x}} = \frac{2(1+\cot^2 x)}{\cot^2 x - \cot x} = \frac{2(1+2^2)}{2^2 - 2} = 5$$

d) Sai: $B_1 + B_2 = -8 + 5 = -3$

Câu 3: Cho góc lượng giác α thỏa mãn $\cos\alpha = \frac{3}{5}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) Giá trị sin của góc lượng giác α âm.

b) Giá trị tan của góc lượng giác α dương.

c) Giá trị của biểu thức $P = \sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha = \frac{2}{25}$.

d) Giá trị của biểu thức $Q = \tan\alpha + \cot\alpha > 2$.

Lời giải

a) Sai: Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin\alpha > 0$

b) Đúng: Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin\alpha > 0, \cos\alpha > 0 \Rightarrow \tan\alpha > 0$

c) Vì $\cos\alpha = \frac{3}{5}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{4}{5} \Rightarrow P = \sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha = \frac{16}{25} - \frac{18}{25} = -\frac{2}{25}$.

d) Đúng: $Q = \tan\alpha + \cot\alpha = \frac{4}{3} + \frac{3}{4} = \frac{25}{12} > 2$

Câu 4: Cho $\tan\alpha = 2$. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) $\cot\alpha = \frac{1}{2}$.

b) Khi $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ thì $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

c) Giá trị của biểu thức $B = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin^3\alpha + 3\cos^3\alpha + 2\sin\alpha} = \frac{5}{31}$

d) Cho $\frac{\sin^4\alpha}{a} + \frac{\cos^4\alpha}{b} = \frac{1}{a+b}$. Giá trị của biểu thức: $A = \frac{\sin^8\alpha}{a^3} + \frac{\cos^8\alpha}{b^3} = \frac{1}{a^3+b^3}$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $\tan\alpha.\cot\alpha = 1 \Rightarrow \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{2}$.

b) Sai: Ta có: $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$;

Mà $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ nên $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

c) Đúng: $B = \dfrac{\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\cos^3\alpha}}{\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha} + \frac{3\cos^3\alpha}{\cos^3\alpha} + \frac{2\sin\alpha}{\cos^3\alpha}} = \dfrac{\tan\alpha\left(\tan^2\alpha+1\right) - \left(\tan^2\alpha+1\right)}{\tan^3\alpha + 3 + 2\tan\alpha\left(\tan^2\alpha+1\right)}$

Suy ra $B = \frac{2(4+1)-(4+1)}{8+3+2.2(4+1)} = \frac{5}{31}$.

d) Sai: Đặt $\cos^2\alpha = t \Rightarrow \frac{(1-t)^2}{a} + \frac{t^2}{b} = \frac{1}{a+b}$

$\Leftrightarrow b(1-t)^2 + at^2 = \frac{ab}{a+b} \Leftrightarrow at^2 + bt^2 - 2bt + b = \frac{ab}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)t^2 - 2bt + b = \frac{ab}{a+b}$

$\Leftrightarrow (a+b)^2t^2 - 2b(a+b)t + b^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{b}{a+b}$.

Suy ra $\cos^2\alpha = \frac{b}{a+b}; \sin^2\alpha = \frac{a}{a+b}$.

Vậy: $\frac{\sin^8\alpha}{a^3}+\frac{\cos^8\alpha}{b^3}=\frac{a}{(a+b)^4}+\frac{b}{(a+b)^4}=\frac{1}{(a+b)^3}$.

Câu 5: Cho góc α thỏa mãn $\frac{-\pi}{2}<\alpha<0$ và $\cot\alpha=-3$. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) $\sin\alpha>0$

b) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{10}$

c) $\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos^3\alpha+3\sin^3\alpha+2\cos\alpha}=\frac{10}{21}$

d) $\left[\tan\frac{17\pi}{4}+\tan\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)\right]^2+\left[\cot\frac{13\pi}{4}+\cot(7\pi-\alpha)\right]^2=20$

Lời giải

a) Sai: Do $\frac{-\pi}{2}<\alpha<0$ nên $\sin\alpha<0$.

b) Đúng: $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{10}$ do $\frac{-\pi}{2}<\alpha<0$ nên $\sin\alpha<0$

Từ hệ thức $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$, suy ra $\sin\alpha=-\sqrt{\frac{1}{1+\cot^2\alpha}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

c) Đúng: $\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos^3\alpha+3\sin^3\alpha+2\cos\alpha}=\frac{10}{21}$. Xét biểu thức $P=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos^3\alpha+3\sin^3\alpha+2\cos\alpha}$

Chia cả tử và mẫu cho $\sin^3\alpha$ ta được:

$$P=\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}-\frac{1}{\sin^2\alpha}}{\frac{\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}+3+2\frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}}=\frac{\cot\alpha.(1+\cot^2\alpha)-(1+\cot^2\alpha)}{\cot^3\alpha+3+2.\cot\alpha.(1+\cot^2\alpha)}$$

Thay $\cot\alpha=-3$ vào P ta được $P=\frac{10}{21}$.

d) Đúng: $\left[\tan\frac{17\pi}{4}+\tan\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)\right]^2+\left[\cot\frac{13\pi}{4}+\cot(7\pi-\alpha)\right]^2=20$

Ta có $\tan\frac{17\pi}{4}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+4\pi\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$ và $\tan\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$.

Và $\cot\frac{13\pi}{4}=\cot\left(\frac{\pi}{4}+3\pi\right)=\cot\frac{\pi}{4}=1$; $\cot(7\pi-\alpha)=-\cot\alpha$

Suy ra $\left[\tan\frac{17\pi}{4}+\tan\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)\right]^2+\left[\cot\frac{13\pi}{4}+\cot(7\pi-\alpha)\right]^2$

$=(1+\cot x)^2+(1-\cot x)^2=2+2\cot^2 x=2+2.(-3)^2=20$.

Do đó, mệnh đề $\left[\tan\frac{17\pi}{4}+\tan\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)\right]^2+\left[\cot\frac{13\pi}{4}+\cot(7\pi-\alpha)\right]^2=20$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Rút gọn biểu thức $A=2\cos^4 x-\sin^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+3\sin^2 x$.

Lời giải

$A=2\cos^4 x-\sin^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+3\sin^2 x$

$=\cos^4 x-\sin^4 x+\cos^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+3\sin^2 x=\cos^2 x-\sin^2 x+\cos^2 x+3\sin^2 x$

$=2\cos^2 x+2\sin^2 x=2$

Câu 2: Cho góc α thỏa mãn $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ và $\sin\alpha-2\cos\alpha=1$. Tính $P=2\tan\alpha-\cot\alpha$.

Lời giải

Với $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ suy ra $\begin{cases}\sin\alpha<0\\ \cos\alpha<0\end{cases}$.

Ta có $\begin{cases}\sin\alpha-2\cos\alpha=1\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{cases}\Rightarrow(1+2\cos\alpha)^2+\cos^2\alpha=1$

$\Leftrightarrow 5\cos^2\alpha+4\cos\alpha=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\alpha=0\ (loa\ddot{}\ ,\\ \cos\alpha=-\frac{4}{5}\end{array}\right.$.

Từ hệ thức $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, suy ra $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ (do $\sin\alpha<0$) $\Rightarrow\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}$

và $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{4}{3}$.

Thay $\tan\alpha=\frac{3}{4}$ và $\cot\alpha=\frac{4}{3}$ vào P, ta được $P=\frac{1}{6}\approx 0{,}17$

Câu 3: Cho góc α thỏa mãn $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Tính $P=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha$.

Lời giải

Ta có $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{1}{4}$.

Khi đó $P=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}$

$=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}=\frac{1-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha\cos\alpha)^2}=14.$

Câu 4: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ và $\tan\alpha-\cot\alpha=1$. Tính $P=\tan\alpha+\cot\alpha$.

Lời giải

Ta có: $\tan\alpha - \cot\alpha = 1 \Leftrightarrow \tan\alpha - \dfrac{1}{\tan\alpha} = 1 \Leftrightarrow \tan^2\alpha - \tan\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan\alpha = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Do $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ suy ra $\tan\alpha < 0$ nên $\tan\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{2}{1-\sqrt{5}}$.

Thay $\tan\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ và $\cot\alpha = \dfrac{2}{1-\sqrt{5}}$ vào P ta được $P = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} + \dfrac{2}{1-\sqrt{5}} = -\sqrt{5} \approx -2,24$

Câu 5: Cho góc α thỏa mãn $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{12}{25}$ và $\sin\alpha + \cos\alpha > 0$. Tính $P = \sin^3\alpha + \cos^3\alpha$.

A. $P = \dfrac{91}{125}$. **B.** $P = \dfrac{49}{25}$. **C.** $P = \dfrac{7}{5}$. **D.** $P = \dfrac{1}{9}$.

Lời giải

Áp dụng $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$, ta có

$P = \sin^3\alpha + \cos^3\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)^3 - 3\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)$.

Ta có $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 + \dfrac{24}{25} = \dfrac{49}{25}$.

Vì $\sin\alpha + \cos\alpha > 0$ nên ta chọn $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{7}{5}$.

Thay $\begin{cases} \sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{7}{5} \\ \sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{12}{25} \end{cases}$ vào P, ta được $P = \left(\dfrac{7}{5}\right)^3 - 3.\dfrac{12}{25}.\dfrac{7}{5} = \dfrac{91}{125} \approx 0,73$

Câu 6: Cho góc α thỏa mãn $\tan\alpha = 2$. Tính $P = \dfrac{2\sin^2\alpha + 3\sin\alpha.\cos\alpha + 4\cos^2\alpha}{5\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha}$.

Lời giải

Chia cả tử và mẫu của P cho $\cos^2\alpha$ ta được

$P = \dfrac{2\tan^2\alpha + 3\tan\alpha + 4}{5\tan^2\alpha + 6} = \dfrac{2.2^2 + 3.2 + 4}{5.2^2 + 6} = \dfrac{9}{13} \approx 0,69$

Câu 7: Huyện lị Quản Bạ tỉnh Hà Giang và huyện lị Cái Nước tỉnh Cà Mau cùng nằm ở $105°$ kinh đông, nhưng Quản Bạ ở $23°$ vĩ bắc, Cái Nước ở vĩ độ $9°$ bắc. Hãy tính độ dài của cung kinh tuyến nối hai huyện lị đó (khoảng cách theo đường chim bay), coi Trái Đất có bán kính $6278km$.

Lời giải

Góc ở tâm chắn cung kinh tuyến nối huyện Quản Bạ tỉnh Hà Giang và huyện Cái Nước tỉnh Cà Mau có số đo bằng $23° - 9° = 14°$.

Vậy độ dài cung kinh tuyến đó bằng $\dfrac{6378.14.\pi}{180} \approx 1558(km)$

----------HẾT----------