

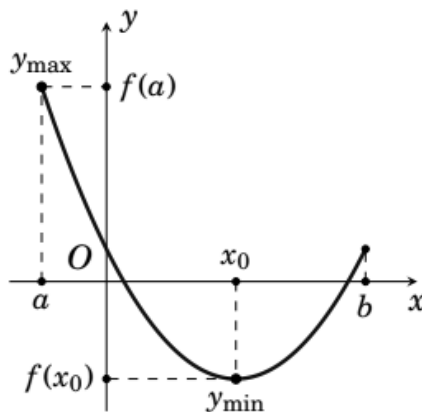


BÀI 02 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Định nghĩa giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D . Khi đó ta có:



- M là giá trị lớn nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}$. Kí hiệu $\max_{x \in D} f(x) = M$
- m là giá trị nhỏ nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases}$. Kí hiệu $\min_{x \in D} f(x) = m$

2 Một số lưu ý

- Khi yêu cầu tìm max min của hàm số mà không nói rõ xét trên tập nào thì ta hiểu là tìm max min trên miền xác định của hàm số đó.
- Để tìm max min của hàm số $y = f(x)$ trên miền D ta thường lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên D . Từ bảng biến thiên ta có thể kết luận:

Điểm ở vị trí cao nhất $\longrightarrow$ Kết luận max

Điểm ở vị trí thấp nhất $\longrightarrow$ Kết luận min

- Để tìm max min của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ ($f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên $(a; b)$ có thể trừ một số hữu hạn các điểm và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm trong $(a; b)$) thì ta có thể giải theo các bước sau:

Bước 1: Giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm các nghiệm $x_0 \in (a; b)$

Bước 2: Tìm các điểm $x_i \in (a; b)$ mà tại đó đạo hàm không xác định (nếu có)

Bước 3: Tính toán $f(a), f(x_0), f(x_i), f(b)$ (*)

Bước 4: Gọi M, m lần lượt là số lớn nhất và số nhỏ nhất của các kết quả tính toán ở bước (*) thì ta có thể kết luận:

$$M = \max_{[a; b]} f(x); \quad m = \min_{[a; b]} f(x)$$



- Ta có thể sử dụng các bất đẳng thức có sẵn để đánh giá biểu thức cần tìm max, min.
 - Bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm a, b :

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b$

- Bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm a, b, c :

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$

- Bất đẳng thức Cauchy cho n số không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Bài toán tìm max, min của hàm số $y=f(x)$ trên miền D

- Phương pháp giải:**

Bước 1: Tính y' . Giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm $x_i \in D$ và tìm các điểm $x_j \in D$ mà tại đó y' không xác định.

Bước 2: Lập bảng biến thiên của hàm số trên D

Bước 3: Từ bảng biến thiên đưa ra kết luận:

Điểm ở vị trí cao nhất $\longrightarrow$ Kết luận max

Điểm ở vị trí thấp nhất $\longrightarrow$ Kết luận min

- Lưu ý:** Nếu D là đoạn $[a; b]$ và hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì ta có thể làm như sau:

Bước 1: Giải phương trình $f'(x) = 0$ rồi tìm các nghiệm $x_0 \in (a; b)$

Bước 2: Tìm các điểm $x_i \in (a; b)$ mà tại đó đạo hàm không xác định (nếu có)

Bước 3: Tính toán $f(a), f(x_0), f(x_i), f(b)$ (*)

Bước 4: Gọi M, m lần lượt là số lớn nhất và số nhỏ nhất của các kết quả tính toán ở bước (*) thì ta có thể kết luận:

$$M = \max_{[a; b]} f(x); \quad m = \min_{x \in D} f(x)$$

- Lưu ý quan trọng:**

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì $\min_{[a; b]} f(x) = f(a)$ và $\max_{[a; b]} f(x) = f(b)$

- Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì $\min_{[a; b]} f(x) = f(b)$ và $\max_{[a; b]} f(x) = f(a)$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau trên đoạn đã chỉ ra

a) $y = f(x) = x^3 - 33x$ trên đoạn $[2; 19]$

b) $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ trên đoạn $[1; 3]$

c) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$

d) $y = f(x) = \frac{3x - 1}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 2]$

e) $y = 1 + \frac{1}{x}$ trên đoạn $[1; 2]$

f) $y = f(x) = \frac{4}{x} + x + 1$ trên đoạn $[1; 3]$



- g) $y = f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$ trên miền xác định h) $y = f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 2]$
- i) $y = f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$ trên $\mathbb{R}$ k) $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.
- l) $y = f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ m) $y = x + \frac{4}{x - 1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$

Lời giải

a) $y = f(x) = x^3 - 33x$ trên đoạn $[2; 19]$

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 33$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 11 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{11}$

Xét trên $[2; 19]$ ta có $x = \sqrt{11} \in [2; 19]$ ta có $f(2) = -58; f(\sqrt{11}) = -22\sqrt{11}; f(19) = 6232$.

Vậy $\min_{[2; 19]} f(x) = f(\sqrt{11}) = -22\sqrt{11}; \max_{[2; 19]} f(x) = f(19) = 6232$.

b) $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ trên đoạn $[1; 3]$

Ta có $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ là hàm đa thức nên $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$.

Trên đoạn $[1; 3]$ ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1; 3] \\ x = 2 \in [1; 3] \end{cases}$.

Khi đó $f(1) = 1; f(2) = -1; f(3) = 3$. Vậy $\min_{[1; 3]} f(x) = f(2) = -1; \max_{[1; 3]} f(x) = f(3) = 3$

c) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$

Hàm số đã cho xác định với mọi $x \in [2; 4]$ và có đạo hàm $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$.

Trên đoạn $[2; 4]$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Khi đó: $f(2) = 7, f(3) = 6, f(4) = \frac{19}{3}$. Vậy $\min_{[2; 4]} f(x) = 6; \max_{[2; 4]} f(x) = f(2) = 7$.

d) $y = f(x) = \frac{3x - 1}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 2]$

Xét hàm số $f(x) = \frac{3x - 1}{x + 1}$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; Hàm số liên tục trên đoạn $[0; 2]$ và $f'(x) = \frac{4}{(x + 1)^2} > 0, \forall x \neq -1$;

Khi đó: $f(0) = -1; f(2) = \frac{5}{3}$. Vậy $\min_{[0; 2]} f(x) = f(0) = -1; \max_{[0; 2]} f(x) = f(2) = \frac{5}{3}$

e) $y = 1 + \frac{1}{x}$ trên đoạn $[1; 2]$

Ta có $y' = -\frac{1}{x^2} < 0 \forall x \in [1; 2]$ nên hàm số nghịch biến trên $[1; 2]$.



Do đó: $M = \max_{[1;2]} y = y(1) = 2$, $m = \min_{[1;2]} y = y(2) = \frac{3}{2}$.

f) $y = f(x) = \frac{4}{x} + x + 1$ trên đoạn $[1;3]$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[1;3]$ và có đạo hàm $f'(x) = -\frac{4}{x^2} + 1$

Giải $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \notin (1;3) \\ x = 2 \in (1;3) \end{cases}$. Ta có $f(1) = 6; f(2) = 5; f(3) = \frac{16}{3}$.

Vậy $\min_{[1;3]} f(x) = 5$; $\max_{[1;3]} f(x) = 6$.

g) $y = f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$ trên miền xác định

Tập xác định: $D = [-2;2]$ và có đạo hàm $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

Bảng biến thiên:

x	-2	$\sqrt{2}$	2
$f'(x)$	$\parallel$	$+$	$-$
$f(x)$	-2	$2\sqrt{2}$	2

Vậy $\min_{[-2;2]} f(x) = -2$; $\max_{[-2;2]} f(x) = 2\sqrt{2}$.

h) $y = f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$ trên đoạn $[0;2]$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có $f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1} = x + \frac{4}{x + 1}$.

Khi đó $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{(x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0;2] \\ x = -3 \notin [0;2] \end{cases}$.

Ta có $f(0) = 4$; $f(1) = 3$; $f(2) = \frac{10}{3}$. Vậy $\min_{[0;2]} f(x) = 3$ và $\max_{[0;2]} f(x) = 4$

i) $y = f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$ trên $\mathbb{R}$

Ta có $f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$. Suy ra $f'(x) = 0$ khi $x = \pm 1$. Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$



Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

Từ bảng biến thiên, ta có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho lần lượt là 2 và 0.

k) $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $y' = 3 - \frac{8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 3 - \frac{8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt[3]{3}}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số trên $(0; +\infty)$ như sau:

x	0	$\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$	$+\infty$	
y'		-	0	+
y	$+\infty$		$3\sqrt[3]{9}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min_{(0; +\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$.

l) $y = f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có:

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} + 1 \Leftrightarrow f(x) \geq 3.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 1$.

m) $y = x + \frac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$

Ta có: $y = x + \frac{4}{x-1} \Rightarrow y = 1 + \frac{4}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên



x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
y'				$-$	0	$+$
y				$+\infty$		

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min_{x \in (1; +\infty)} y = 5$.

Bài tập 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau trên đoạn đã chỉ ra

a) $y = x - \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; e\right]$

b) $y = x + \cos^2 x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

c) $y = f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1; 2]$

d) $y = \cos 2x + 2 \sin x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Lời giải

a) $y = x - \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; e\right]$.

Tập xác định $D = (0; +\infty)$. Ta có $y' = 1 - \frac{1}{x}$. Xét $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in \left[\frac{1}{2}; e\right]$

Xét $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \ln 2$, $y(1) = 1$, $y(e) = e - 1$. Do đó $m = \min_{\left[\frac{1}{2}; e\right]} y = 1$ và $M = \max_{\left[\frac{1}{2}; e\right]} y = e - 1$.

b) $y = x + \cos^2 x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Hàm số liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ có $y' = 1 - 2 \cos x \sin x = 1 - \sin 2x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \text{ Do } x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$$

Mặt khác $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \end{cases}$. Vậy $\max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$; $\min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} y = 1$.

c) $y = f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1; 2]$.

Ta có $f(x) = (x^2 - 2)e^{2x} \Rightarrow f'(x) = 2xe^{2x} + (x^2 - 2)2e^{2x} = 2e^{2x}(x^2 + x - 2)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [-1; 2] \\ x = -2 \notin [-1; 2] \end{cases}. \text{ Ta có } f(-1) = -e^{-2}; f(1) = -e^2; f(2) = 2e^4$$

Vậy $M = \max_{[-1; 2]} f(x) = f(2) = 2e^4$; $m = \min_{[-1; 2]} f(x) = f(1) = -e^2$.



d) $y = \cos 2x + 2 \sin x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Xét hàm số $y = \cos 2x + 2 \sin x$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $y' = -2 \sin 2x + 2 \cos x = -4 \sin x \cdot \cos x + 2 \cos x = 2 \cos x (-2 \sin x + 1)$.

Giải $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Xét trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $y' = 0$ có các nghiệm $x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{2}$.

Ta có $y(0) = 1; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1; y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$. Suy ra $\max_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = \frac{3}{2}, \min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = 1$.

Bài tập 3: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số sau trên miền đã chỉ ra

a) $f(x) = \frac{5 \sin x + 1}{\sin x + 2}$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$

b) $y = \cos^3 x + 2 \sin^2 x + \cos x$ trên miền xác định

Lời giải

a) $f(x) = \frac{5 \sin x + 1}{\sin x + 2}$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$

Đặt $t = \sin x$ với $x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ thì $t \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ nên khi đó ta được hàm số $g(t) = \frac{5t + 1}{t + 2}$

Đạo hàm $g'(t) = \frac{9}{(t + 2)^2} > 0, \forall t \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$

Do $g(0) = \frac{1}{2}; g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{5}$ nên $\min_{\left[0; \frac{1}{2}\right]} g(t) = g(0) = \frac{1}{2}$ nên $\min_{\left[0; \frac{\pi}{6}\right]} f(x) = \frac{1}{2}$.

b) $y = \cos^3 x + 2 \sin^2 x + \cos x$ trên miền xác định

Ta có $y = \cos^3 x + 2 \sin^2 x + \cos x = \cos^3 x + 2(1 - \cos^2 x) + \cos x = \cos^3 x - 2 \cos^2 x + \cos x + 2$

Đặt $t = \cos x$ với $t \in [-1; 1]$ ta được $f(t) = t^3 - 2t^2 + t + 2$

Ta có $f'(t) = 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in [-1; 1] \\ t = \frac{1}{3} \in [-1; 1] \end{cases}$ mà $f(-1) = -2; f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{58}{27}; f(1) = 2$

Vậy $\max_{x \in \mathbb{R}} y = \max_{t \in [-1; 1]} f(t) = \frac{58}{27}$

Bài tập 4: Độ giảm huyết áp của một bệnh $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$ trong đó x là số miligam thuốc được tiêm cho bệnh nhân ($0 < x < 30$). Để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là bao nhiêu mg?

Lời giải



Ta có: $G'(x) = 1,5x - 0,075x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 20 \end{cases}$. Bảng biến thiên:

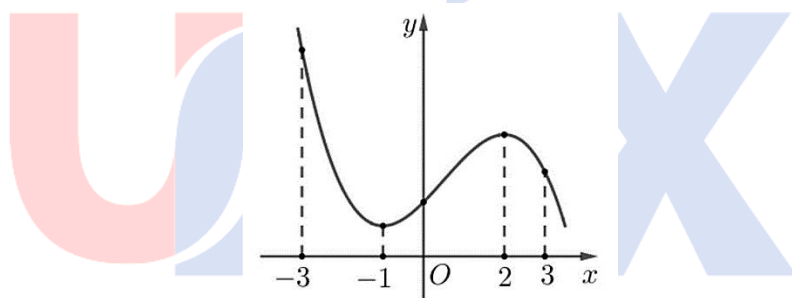
x	0	20	30	
$G'(x)$		+	0	−
$G(x)$	0	G_{max}	0	

Vậy để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là $20(mg)$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

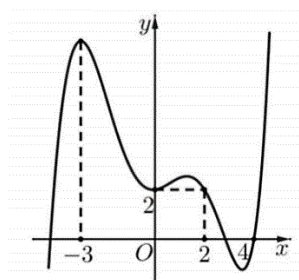
- A. $f(2)$. B. $f(-1)$. C. $f(-3)$. D. $f(3)$

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-3; 3]$ bằng $f(-3)$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3; 4]$ bằng:

- A. $f(2)$. B. $f(-3)$. C. $f(4)$. D. $f(0)$

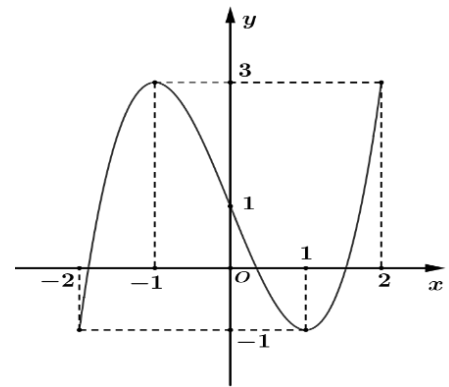


Lời giải

Quan sát hình vẽ ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3; 4]$ bằng $f(-3)$.



Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ có đồ thị như hình vẽ.
 Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 2]$ là



- A. 1. **B.** -1.
 C. -2. **D.** 3.

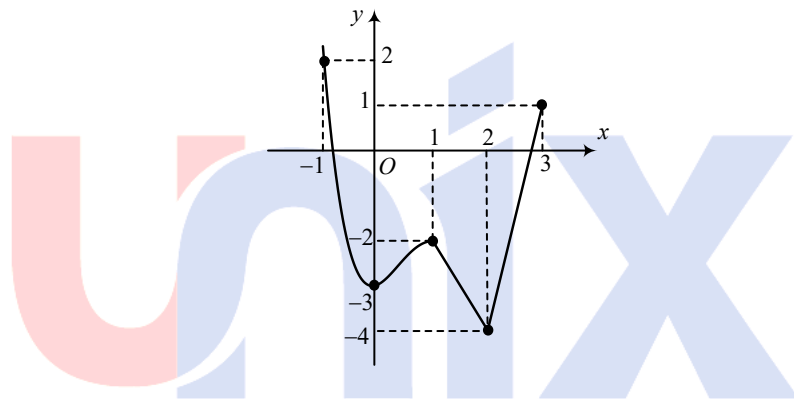
Lời giải

Trên đoạn $[-2; 2]$ ta có $f(x) \geq -1$ và

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy $\min_{[-2; 2]} f(x) = -1$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 3]$. Khi đó, tổng $M + m$ bằng



- A. -6. **B.** -2. C. -5. **D.** 2.

Lời giải

Theo đồ thị, ta có : $M = 2$ và $m = -4 \Rightarrow M + m = -2$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	-3	-1	0	1	2
y	-2	3	0	2	1

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3; 2]$.

Tính $M + m$.

- A. -1. **B.** 1. C. 3. **D.** 5.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $M = 3, m = -2 \Rightarrow M + m = 1$.



Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$

Biết $f(-2) = f(0) = -3$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-2; 0]$ bằng

- A. $f(-1)$. B. -3 . C. $-f(-1)$. D. 3 .

Lời giải

Dựa vào bảng dấu của đạo hàm ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$			-3	$f(-1)$	-3			
$ f(x) $			3	$-f(-1)$	3			

Dựa vào bảng biến thiên $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-2; 0]$ ta có $\max_{[-2; 0]} |f(x)| = -f(-1)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-3; 2]$. Tính $M.m$.

x	-3	0	1	2
$f(x)$	-4	2	0	1

- A. 6 . B. 7 . C. 5 . D. -8 .

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta xác định được $M = 2$ và $m = -4$.

Từ đó suy ra $M.m = 2.(-4) = -8$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau.

x	0	3	8
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0 10 0		

Hàm số đạt giá trị lớn nhất là $f(x_0)$ tại x_0 . Khi đó tích $x_0.f(x_0)$ bằng

- A. 30 . B. 3 . C. 10 . D. 0 .



Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy, hàm số đạt giá trị lớn nhất là 10 tại $x = 3$ nên $x_0 \cdot f(x_0) = 30$.

Câu 9: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 6x$ trên $[-1; 4]$ là

A. $-4\sqrt{2}$.

B. -5 .

C. 5 .

D. 40 .

Lời giải

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{2} \in [-1; 4]$.

Khi đó $f(-1) = -1 + 6 = 5$, $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$, $f(4) = 64 - 24 = 40$.

Vậy $\min_{[-1; 4]} f(x) = -4\sqrt{2}$ tại $x = \sqrt{2}$.

Câu 10: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ trên đoạn $[0; 4]$. Tính tổng $S = M + m$.

A. $\frac{7}{3}$.

B. 1 .

C. $\frac{10}{3}$.

D. 4 .

Lời giải

Dễ thấy hàm số liên tục trên $\square$.

Ta có: $y' = x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Ta có: $y(0) = 1$; $y(1) = \frac{7}{3}$; $y(3) = 1$; $y(4) = \frac{7}{3}$.

Vậy $\begin{cases} M = \max_{[0; 4]} y = y(1) = y(4) = \frac{7}{3} \\ m = \min_{[0; 4]} y = y(0) = y(3) = 1 \end{cases} \Rightarrow S = M + m = \frac{7}{3} + 1 = \frac{10}{3}$.

Câu 11: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 10$ trên đoạn $[-5; -1]$ bằng

A. 12 .

B. 18 .

C. -40 .

D. 14 .

Lời giải

Trên đoạn $[-5; -1]$ ta có hàm số đã cho liên tục và có

$y' = 3x^2 + 6x \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow x = -2$; $y(-5) = -40$; $y(-2) = 14$; $y(-1) = 12$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-5; -1]$ bằng 14.

Câu 12: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[2; 4]$ là:



- A. $\min_{[2;4]} y = 5$. B. $\min_{[2;4]} y = 0$. C. $\min_{[2;4]} y = 3$. D. $\min_{[2;4]} y = 7$.

Lời giải

Ta có $y = x^3 - 3x + 5 \Rightarrow y = 3x^2 - 3$. Giải $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \notin [2;4] \\ x = -1 \notin [2;4] \end{cases}$.

Ta có $y(2) = 7; y(4) = 57 \Rightarrow \min_{[2;4]} y = y(2) = 7$.

Câu 13: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$ là

- A. 7. B. 8. C. $\frac{19}{3}$. D. $\frac{23}{3}$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = \left(\frac{x^2 + 3}{x - 1} \right)' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [2;4] \\ x = 3 \in [2;4] \end{cases}$.

Lại có $f(2) = 7 > f(4) = \frac{19}{3} > f(3) = 6$ suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$ là 7.

Câu 14: Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$. Tổng $S = 2M - m$ bằng

- A. $S = 0$. B. $S = -\frac{3}{2}$. C. $S = -2$. D. $S = 4$.

Lời giải

Ta có $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{2\sqrt{x+1}}$.

Giải phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Ta có $f(0) = -1; f(3) = -\frac{1}{2}$ và hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$.

Vậy $M = -\frac{1}{2}; m = -1 \Rightarrow S = 2M - m = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$.

Câu 15: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \cos^2 x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ là

- A. $\max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{1}{2}; \min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = -1$. B. $\max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{\pi}{4}; \min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{\pi}{6}$.



C. $\max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}; \min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = 1.$

D. $\max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}; \min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{1}{2}.$

Lời giải

Ta có $f(x) = x + \cos^2 x \Rightarrow f'(x) = 1 - 2 \cos x \cdot \sin x = 1 - \sin 2x.$

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$ Do $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}.$

$f(0) = 1; f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ và hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

Suy ra $\max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}; \min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = 1.$

Câu 16: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+2}{x}$ trên $[1; 2]$

A. $\min y = 3.$
[1;2]

B. $\min y = 2.$
[1;2]

C. $\min y = \frac{1}{2}.$
[1;2]

D. $\min y = \frac{3}{2}.$
[1;2]

Lời giải

Ta có $y' = -\frac{2}{x^2} < 0, \forall x \neq 0$ nên hàm số $y = \frac{x+2}{x}$ nghịch biến trên $[1; 2]$

Do đó $\min_{[1;2]} y = y(2) = 2.$

Câu 17: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{16 - x^2}$ là

A. 16.

B. 4.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Ta có $y = \sqrt{16 - x^2} \leq 4$, dấu “=” khi $x = 0.$ Vậy $\max_{[-4;4]} y = 4.$

Câu 18: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x\sqrt{16 - x^2}.$ Tính $M + m$

A. $8 - \sqrt{8}.$

B. $\sqrt{8}.$

C. 0.

D. 8.

Lời giải

Điều kiện xác định $-4 \leq x \leq 4.$ Đạo hàm $y' = \sqrt{16 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{16 - 2x^2}{\sqrt{16 - x^2}}.$

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 16 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{8}$

Xét $y(-4) = y(4) = 0; y(-\sqrt{8}) = -8; y(\sqrt{8}) = 8$ do đó $M = 8, m = -8.$ Vậy $M + m = 0.$

Câu 19: Trên đoạn $[-4; -1],$ hàm số $y = x + \frac{9}{x-1}$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. -5.

B. $-\frac{29}{5}.$

C. $-\frac{11}{2}.$

D. 4.

Lời giải



Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\text{Ta có } y' = 1 - \frac{9}{(x-1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{9}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \notin [-4; -1] \\ x = -2 \in [-4; -1] \end{cases}$$

Ta thấy $y(-4) = -\frac{29}{5}$; $y(-2) = -5$; $y(-1) = -\frac{11}{2}$. Vậy $\max_{[-4; -1]} y = y(-2) = -5$.

Câu 20: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{4}{x} + x + 1$ trên đoạn $[1; 3]$

. Tính $M - m$.

A. 9.

B. 5.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = -\frac{4}{x^2} + 1 = \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in [1; 3] \\ x = -2 \notin [1; 3] \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } y(1) = 6, y(2) = 5, y(3) = \frac{16}{3} \Rightarrow M = 6, m = 5 \Rightarrow M - m = 1.$$

Câu 21: Trên đoạn $\left[\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right]$, hàm số $y = 2x^3 + \frac{1}{2x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x = \frac{1}{2}$.

B. $x = \frac{3}{2}$.

C. $x = \frac{1}{3}$.

D. $x = 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\text{Ta có: } y' = 8x^2 - \frac{1}{2x^2}, y' = 0 \Leftrightarrow 8x^2 - \frac{1}{2x^2} = 0 \Leftrightarrow 16x^4 = 1 \Leftrightarrow x^4 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right] \\ x = -\frac{1}{2} \notin \left[\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right] \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{85}{54}, y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}, y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{85}{12} \Rightarrow \max_{\left[\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right]} y = y\left(\frac{1}{2}\right).$$

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2x+14} + \sqrt{5-x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -7$.

B. Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{6}$.

C. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 1$.

D. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Tập xác định $D = [-7; 5]$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+14}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+14} = 2\sqrt{5-x} \Leftrightarrow x = 1(n).$$

$$f(1) = 16; f(-7) = 2\sqrt{3}; f(5) = 2\sqrt{6} \Rightarrow \max_{[-7; 5]} f(x) = 16 \text{ tại } x = 1 \text{ và } \min_{[-7; 5]} f(x) = 2\sqrt{3}$$



Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{3}$ là mệnh đề đúng.

Câu 23: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\cos x - \frac{4}{3}\cos^3 x$ trên $[0; \pi]$.

- A. $\max_{[0; \pi]} y = \frac{2}{3}$. B. $\max_{[0; \pi]} y = \frac{10}{3}$. C. $\max_{[0; \pi]} y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. D. $\max_{[0; \pi]} y = 0$.

Lời giải

Đặt $t = \cos x \Rightarrow t \in [-1; 1]$. Đặt $f(t) = 2t - \frac{4}{3}t^3$, suy ra $f'(t) = 2 - 4t^2$.

$$\text{Do đó } f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-1}{\sqrt{2}} \in [-1; 1] \\ t = \frac{1}{\sqrt{2}} \in [-1; 1] \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } f(-1) = \frac{-2}{3}, f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-2\sqrt{2}}{3}, f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}, f(1) = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy } \max_{[0; \pi]} y = \max_{[-1; 1]} f(t) = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 24: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x}$ là

- A. $\sqrt{3}$. B. $\sqrt{2}$. C. 1. D. 2.

Lời giải

Tập xác định: $D = [3; 5]$

$$\text{Ta có } y' = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-3} = \sqrt{5-x} \\ x-3 > 0 \\ 5-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = 5-x \\ x > 3 \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Ta có: $f(3) = f(5) = \sqrt{2}$; $f(4) = 2$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 2.

Câu 25: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + x + 3}{x - 2}$ trên $[-2; 1]$.

Giá trị của $M + m$ bằng

- A. -6. B. $-\frac{9}{4}$. C. $-\frac{25}{4}$. D. -5.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\text{Ta có } y' = \frac{(2x+1)(x-2) - (x^2 + x + 3)}{x-2} = \frac{x^2 - 4x - 5}{x-2} = \frac{(x+1)(x-5)}{x-2}$$

$$\text{Đạo hàm } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in [-2; 1] \\ x = 5 \notin [-2; 1] \end{cases}.$$



Khi đó $f(-2) = \frac{-5}{4}$; $f(1) = -5$; $f(-1) = -1 \Rightarrow \begin{cases} M = -1 \\ m = -5 \end{cases}$. Suy ra $M + m = -6$.

Câu 26: Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 4x + \sin^2 \pi x$ trên đoạn $[-1; 2]$. Giá trị của $m + M$ bằng

- A. 0. B. 4. C. -2. D. -4.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 4 + 2\pi \sin \pi x \cdot \cos \pi x = 4 + \pi \sin 2\pi x$. Do $-1 \leq \sin 2\pi x \leq 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \forall x \in [-1; 2]$

Vậy $m + M = f(-1) + f(2) = -4 + \sin^2(-\pi) + 8 + \sin^2(2\pi) = 4$.

Câu 27: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \cos^2 x$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là:

- A. $\frac{\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{2} + 1$. C. 1. D. $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: $y = f(x) = x + \cos^2 x$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$y' = f'(x) = 1 - 2\sin x \cdot \cos x = 1 - \sin 2x$; $y' = f'(x) = 1 - 2\sin x \cdot \cos x = 1 - \sin 2x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ do $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

Khi đó $f(0) = 1$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$. Vậy $\max_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

Câu 28: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{-x^2 - 4}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{3}{2}; 4\right]$.

- A. -4. B. $-\frac{25}{6}$. C. -5. D. -2.

Lời giải

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $\left[\frac{3}{2}; 4\right]$

$f'(x) = \frac{-x^2 + 4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \notin \left[\frac{3}{2}; 4\right] \\ x = 2 \in \left[\frac{3}{2}; 4\right] \end{cases}$; $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{25}{6}$; $f(2) = -4$; $f(4) = -5$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{-x^2 - 4}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{3}{2}; 4\right]$ là -4.



- Câu 29:** Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 2x + \cos \frac{\pi x}{2}$ trên đoạn $[-2; 2]$. Giá trị của $m + M$ bằng
- A. 2. B. -2. C. 0. D. -4.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 2 - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} > 0, \forall x \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[-2; 2]$

Khi đó $m + M = f(-2) + f(2) = -4 - 1 + 4 - 1 = -2$.

- Câu 30:** Cho hàm số $y = \sin x \cdot \cos^2 \frac{x}{2}$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0; \pi]$ bằng
- A. 0. B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải

Ta có: $y = \sin x \cdot \cos^2 \frac{x}{2} = \sin x \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right) = \frac{1}{4} (2 \sin x + \sin 2x)$

Đạo hàm $y' = \frac{1}{2} (\cos x + \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Xét trên khoảng $(0; \pi)$ ta có nghiệm là $x = \frac{\pi}{3}; y(0) = 0; y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}; y(\pi) = 0$.

Vậy $\max_{[0; \pi]} y = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

- Câu 31:** Gọi M, m thứ tự là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[-2; 0]$ Tính $P = M + m$?
- A. $P = 1$ B. $P = -3$ C. $P = -\frac{13}{3}$ D. $P = -5$

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Xét trên $[-2; 0]$ hàm số xác định và liên tục.

Đạo hàm $y' = \frac{2x(x-1) - x^2 - 3}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in [-2; 0] \\ x = 3 \end{cases}$

Khi đó $y(-2) = -\frac{7}{3}, y(0) = -3, y(-1) = -2$

Vậy $m = \min_{[-2; 0]} y = -3, M = \max_{[-2; 0]} y = -2 \Rightarrow P = m + M = -5$.

- Câu 32:** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$ là bao nhiêu?
- A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{2}{5}$. C. $\frac{3}{2}$. D. 0.

Lời giải



Tập xác định : $D = [-1; 4]$. Ta có $y' = \frac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x+4}} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Khi đó $y(-1) = 0; y(4) = 0; y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}$. Vậy $\max_{[-1;4]} y = \frac{5}{2}$.

Câu 33: Cho hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $\left(-25; \frac{11}{10}\right)$. Tìm giá trị của M .

- A.** $M = 1$. **B.** $M = \frac{1}{2}$. **C.** $M = 0$. **D.** $\frac{129}{250}$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 3x$; cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	-25	0	1	$\frac{11}{10}$
y'	+	0	-	0
y		1		$\frac{129}{250}$

Vậy $M = 1$.

Câu 34: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{1 + \cos 2x}{2 + \sin x}$ bằng

A. $4\sqrt{2} - 4$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $8 - 4\sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có: $f(x) = \frac{1 + \cos 2x}{2 + \sin x} = \frac{2 - 2\sin^2 x}{2 + \sin x}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(2 - 2\sin^2 x)' \cdot (2 + \sin x) - (2 + \sin x)' (2 - 2\sin^2 x)}{(2 + \sin x)^2}$$

$$= \frac{-4\sin x \cdot \cos x \cdot (2 + \sin x) - \cos x (2 - 2\sin^2 x)}{(2 + \sin x)^2} = \frac{-2\cos x (\sin^2 x + 4\sin x + 1)}{(2 + \sin x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2\cos x (\sin^2 x + 4\sin x + 1)}{(2 + \sin x)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -2 + \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \arcsin(-2 + \sqrt{3}) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin(-2 + \sqrt{3}) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Do hàm số $y = f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π nên chỉ xét trên đoạn $[-\pi; \pi]$ ta có:



$$x \in \left\{ \arcsin(-2 + \sqrt{3}); \pi - \arcsin(-2 + \sqrt{3}); \pm \frac{\pi}{2} \right\}. \text{ Tính được: } f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$f\left(\arcsin(-2 + \sqrt{3})\right) = f\left(\pi - \arcsin(-2 + \sqrt{3})\right) = 8 - 4\sqrt{3} = \max f(x).$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $(-4; 4)$ và có bảng biến thiên như sau:

x	-4	2	0	4	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	-10	0	-4	10	

- a) $\min y = -4$ và $\max y = 10$.
 b) $\max y = 10$ và $\min y = -10$.
 c) $\max y = 0$ và $\min y = -4$.
 d) Hàm số không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $(-4; 4)$.

Lời giải

Theo định nghĩa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất, ta thấy hàm số không có GTLN, NN trên $(-4; 4)$.

- a) Sai: $\min y = -4$ và $\max y = 10$.
 b) Sai: $\max y = 10$ và $\min y = -10$.
 c) Sai: $\max y = 0$ và $\min y = -4$.
 d) Đúng: Hàm số không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $(-4; 4)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = x + \frac{4}{x}, x \in (0; +\infty)$.

- a) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$ và không có giá trị lớn nhất trên $(0; +\infty)$.
 b) Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $(0; +\infty)$.
 c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$ và không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$.
 d) Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất trên $(0; +\infty)$.

Lời giải



Ta có $y = x + \frac{4}{x} \Rightarrow y' = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = x + \frac{4}{x}, x \in (0; +\infty)$

x	0	2	$+\infty$		
y'		−	0	+	
y	$+\infty$		4		$+\infty$

Căn cứ vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$ và không có giá trị lớn nhất trên $(0; +\infty)$.

- a) Đúng: Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$ và không có giá trị lớn nhất trên $(0; +\infty)$.
 b) Sai: Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $(0; +\infty)$.
 c) Sai: Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$ và không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$.
 d) Sai: Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất trên $(0; +\infty)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và có bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		-2		-1		$+\infty$

- a) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1; 0)$; $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$
 b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$ và có giá trị cực tiểu là $y = -2$
 c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 0$
 d) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng -3 .

Lời giải

- a) Sai: Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1; 0)$; $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$
 b) Đúng: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$ và có giá trị cực tiểu là $y = -2$
 c) Đúng: Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 0$
 d) Đúng: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng -3 .

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và có bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây:



x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			4		4			
	$-\infty$			3			$-\infty$	

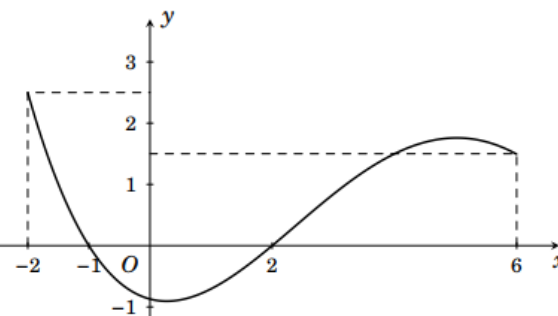
- a) Cực đại của hàm số là 4
 b) Cực tiểu của hàm số là 3
 c) $\max y = 4$
 d) $\min y = 3$

Lời giải

- a) Đúng: Cực đại của hàm số là 4
 b) Đúng: Cực tiểu của hàm số là 3
 c) Đúng: $\max y = 4$
 d) Sai: Từ bảng biến thiên ta thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ nên hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ bên.

- a) $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(-1)$
 b) $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(6)$
 c) $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(-2)$
 d) $\max_{[-2; 6]} f(x) = \max\{f(-1); f(6)\}$



Lời giải

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	-2	-1	2	6	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$f(-2)$	$f(-1)$	$f(2)$	$f(6)$	

Hàm số đồng biến trên $(-2; -1)$ và $(2; 6)$ do $f'(x) > 0$ nên $f(-1) > f(-2)$ và $f(6) > f(2)$

Hàm số nghịch biến trên $(-1; 2)$ do $f'(x) < 0$ suy ra $f(-1) > f(2)$

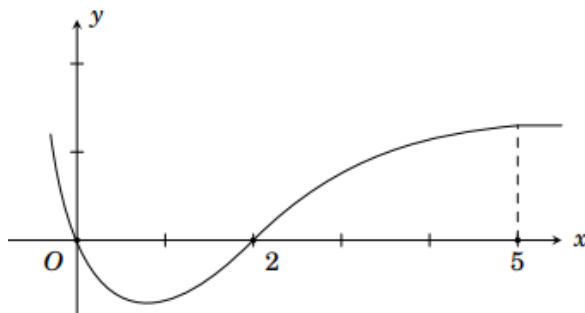
Từ đó có thể suy ra được $\max_{[-2; 6]} f(x) = \max\{f(-2); f(-1); f(2); f(6)\} = \max\{f(-1); f(6)\}$

- a) Sai: $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(-1)$
 b) Sai: $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(6)$
 c) Sai: $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(-2)$



d) Đúng: $\max_{[-2;6]} f(x) = \max \{f(-1); f(6)\}$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$



- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$
 c) $\min_{[0;5]} f(x) = f(0)$ và $\max_{[0;5]} f(x) = f(5)$ d) $\min_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $\max_{[0;5]} f(x) = f(5)$

Lời giải

Bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[0; 5]$

x	0	2	3	5
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(5)$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $\max_{[0;5]} f(x) = \max \{f(0); f(5)\}$

Theo bảng biến thiên thì $f(3) > f(2)$ nên $f(3) - f(2) > 0$

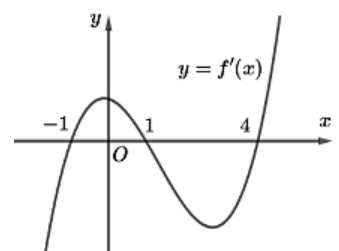
Theo giả thiết ta có $f(0) + f(3) = f(2) + f(5) \Leftrightarrow f(5) = f(0) - [f(3) - f(2)] < f(0)$

Suy ra $\max_{[0;5]} f(x) = f(0)$. Vậy $\min_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $\max_{[0;5]} f(x) = f(0)$

- a) Sai: Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$
 b) Đúng: Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$
 c) Sai: $\min_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $\max_{[0;5]} f(x) = f(0)$
 d) Đúng: $\min_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $\max_{[0;5]} f(x) = f(0)$

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.

- a) Hàm số có hai điểm cực trị
 b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$
 c) $f(1) > f(2) > f(4)$
 d) Trên đoạn $[1; 4]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ là $f(1)$





Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$

Khi đó $f'(x) < 0 \Leftrightarrow (-\infty; -1) \cup (1; 4)$ và $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 1) \cup (4; +\infty)$

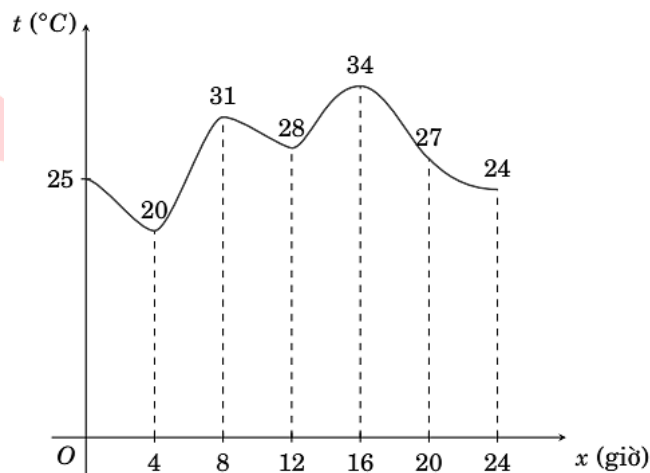
Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$								

The diagram shows a sequence of arrows representing the function's behavior. It starts with a downward arrow labeled CT, followed by an upward arrow labeled CTĐ, then another downward arrow labeled CT, and finally an upward arrow. These arrows are positioned between the critical points x = -1, 1, and 4.

- a) Sai: Hàm số có ba điểm cực trị
- b) Sai: Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ và $(4; +\infty)$
- c) Đúng: $f(1) > f(2) > f(4)$
- d) Đúng: Trên đoạn $[1; 4]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ là $f(1)$

Câu 8: Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở một thành phố trong một ngày



- a) Nhiệt độ cao nhất trong ngày là $28^\circ C$
- b) Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là $20^\circ C$
- c) Thời điểm nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc 16 giờ
- d) Thời điểm nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc 4 giờ

Lời giải

- a) Sai: Nhiệt độ cao nhất trong ngày là $34^\circ C$
- b) Đúng: Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là $20^\circ C$
- c) Đúng: Thời điểm nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc 16 giờ



d) Đúng: Thời điểm nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc 4 giờ

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 30x$. Với các số nguyên a, b mà $a < b$ thì giá trị nhỏ nhất của $f(b) - f(a)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $f'(x) = 12x^2 - 18x - 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	2	2,5	3	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	17	-63	$-\frac{275}{4}$	-64	$+\infty$

Với các số nguyên a, b mà $a < b$, để $f(b) - f(a)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $\begin{cases} f(b) < 0 \\ f(a) > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f(b) = f(2) = -64; f(a) = f(-1) = 17$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(b) - f(a)$ bằng -81 .

Câu 2: Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^3 x - 2\cos^2 x + 3\sin x + 6$ trên $[0; \pi]$ lần lượt là M, m . Tính tổng $M + m$.

Lời giải

Ta có $y = \sin^3 x - 2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x + 6 \Rightarrow y = \sin^3 x + 2\sin^2 x + 3\sin x + 4$.

Đặt $t = \sin x$. Do $x \in [0; \pi]$ nên $t \in [0; 1]$. Khi đó bài toán đã cho trở thành tính tổng của giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(t) = t^3 + 2t^2 + 3t + 4$ trên đoạn $[0; 1]$.

Ta có $y' = f'(t) = 3t^2 + 4t + 3 = 3\left(t^2 + 2\frac{2}{3}t + \frac{4}{9}\right) + \frac{15}{9} > 0, \forall t \in [0; 1]$.

Suy ra hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên đoạn $[0; 1]$.

Khi đó: $M = \max_{[0; 1]} f(t) = f(1) = 10; m = \min_{[0; 1]} f(t) = f(0) = 4$. Vậy $M + m = 14$.

Câu 3: Cho hàm số $y = e^x(x^2 - 3)$, gọi $M = \frac{a}{e^b}$ ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$) là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-5; -2]$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$?

Lời giải

Ta có: $y' = e^x(x^2 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \in [-5; -2] \\ x = 1 \notin [-5; -2] \end{cases}$



Ta có $y(-5) = \frac{22}{e^5}; y(-3) = \frac{6}{e^3}; y(-2) = \frac{1}{e^2}$. Khi đó $\max_{[-5;-2]} y = \frac{6}{e^3} \Rightarrow a = 6; b = 3 \Rightarrow a + b = 9$.

Câu 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{16}{x}$ trên đoạn $[1; 4]$

Lời giải

Ta có: $y = x^2 + \frac{16}{x} \Rightarrow y' = 2x - \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x - \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 16 = 0 \Rightarrow x = 2 \in [1; 4]$

Khi đó: $y(1) = 17; y(2) = 12; y(4) = 20$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{16}{x}$ trên đoạn $[1; 4]$ bằng 12.

Câu 5: Cho hàm số $y = x + \frac{1}{x+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1; 2]$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Ta có: $y = x + \frac{1}{x+2} \Rightarrow y' = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$

Khi đó: $y(-1) = 0$ và $y(2) = \frac{9}{4}$.

Do đó: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1; 2]$ là $y(-1) = 0$ và giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 2]$ là $y(2) = \frac{9}{4}$.

Câu 6: Một loại vi khuẩn được tiêm một loại thuốc kích thích sự sinh sản. Sau t phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức $N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3$ ($0 \leq t \leq 30$). Hỏi sau bao giây thì số vi khuẩn lớn nhất?

Lời giải

Xét hàm số $N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3$ ($0 \leq t \leq 30$).

Ta có: $N'(t) = 60t - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 20 \end{cases}$

t	0	20	30
N'	+	0	-
N			

Với $t = 20$ giây thì số vi khuẩn lớn nhất.

-----HẾT-----