

BÀI

02

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Công thức cộng

$$\oplus \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\oplus \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\oplus \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\oplus \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\oplus \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\oplus \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

2 Công thức nhân đôi

$$\oplus \sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\oplus \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\oplus \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\oplus \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

3 Công thức hạ bậc

$$\oplus \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\oplus \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\oplus \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

4 Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\oplus \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\oplus \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\oplus \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$

$$\oplus \cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

5 Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\oplus \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\oplus \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\oplus \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\oplus \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

B

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tính giá trị biểu thức chứa các giá trị lượng giác

Phương pháp: Sử dụng các công thức lượng giác đã nêu ở phần lý thuyết để giải quyết bài toán

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính:

a) $\cos\left(a + \frac{\pi}{6}\right)$ biết $\sin a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$

b) $\tan\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$ biết $\cos a = -\frac{1}{3}$ và $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$

Lời giải

a) Vì $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ nên $\cos a < 0$.

Mặt khác, từ $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ suy ra $\cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ta có: $\cos\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \cos a \cos \frac{\pi}{6} - \sin a \sin \frac{\pi}{6} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{6} - 1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6}$.

b) Vì $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin a < 0$, do đó $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} > 0$.

Mặt khác: $1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$ suy ra $\tan a = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 a} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} - 1} = 2\sqrt{2}$.

Ta có: $\tan\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan a - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan a \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{1 + 2\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{9 - 4\sqrt{2}}{7}$.

Bài tập 2: Tính $\sin 2a$; $\cos 2a$; $\tan 2a$, biết:

a) $\sin a = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$

b) $\sin a + \cos a = \frac{1}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{4}$

Lời giải

a) Vì $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ nên $\cos a < 0$.

Mặt khác: $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ suy ra $\cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}; \quad \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}.$$

$$\text{Suy ra } \tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{-\frac{4\sqrt{2}}{9}}{\frac{7}{9}} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}.$$

$$\text{b) Ta có: } (\sin a + \cos a)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \sin^2 a + \cos^2 a + 2\sin a \cos a = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin 2a = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2a = -\frac{3}{4}.$$

Vì $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{4}$ nên $\pi < 2a < \frac{3\pi}{2}$. Do đó $\cos 2a < 0$.

$$\text{Mặt khác: } \sin^2(2a) + \cos^2(2a) = 1 \text{ suy ra } \cos 2a = -\sqrt{1 - \sin^2(2a)} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$$\text{Do đó: } \tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

Bài tập 3: Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$\text{a) } \sin a = \frac{1}{3} \text{ và } \frac{\pi}{2} < a < \pi \quad \text{b) } \sin a + \cos a = \frac{1}{2} \text{ và } \frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{4}$$

WE COACH WE INSPIRE

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } A &= \frac{\sin \frac{\pi}{15} \cos \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{15}}{\cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15} \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{\sin \frac{\pi}{15} \cos \frac{\pi}{10} + \cos \frac{\pi}{15} \sin \frac{\pi}{10}}{\cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15} \sin \frac{\pi}{5}} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{10}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{15} + \frac{\pi}{5}\right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } B &= \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8} = \left(\frac{1}{2} \cdot 2\sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32}\right) \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8} \\ &= \frac{1}{2} \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{32}\right) \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2\sin \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{8} \cdot 2\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{16} \end{aligned}$$

Bài tập 4: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sin(x + 14^\circ)\sin(x + 74^\circ) + \sin(x - 76^\circ)\sin(x - 16^\circ)$

b) $B = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\sin(b-c)}{\cos b \cdot \cos c} + \frac{\sin(c-a)}{\cos c \cdot \cos a}$

Lời giải

a) Ta có $A = \sin(14^\circ + x)\cos(16^\circ - x) + \sin(76^\circ - x)\sin(16^\circ - x)$

$$= \sin(14^\circ + x)\cos(16^\circ - x) + \cos(14^\circ + x)\sin(16^\circ - x) = \sin(14^\circ + 16^\circ + x - x) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

b) $A = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\sin(b-c)}{\cos b \cdot \cos c} + \frac{\sin(c-a)}{\cos c \cdot \cos a}$

Ta có: $A = \frac{\sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\sin b \cdot \cos c - \sin c \cdot \cos b}{\cos b \cdot \cos c} + \frac{\sin c \cdot \cos a - \sin a \cdot \cos c}{\cos c \cdot \cos a}$

$$= \frac{\sin a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} - \frac{\sin b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\sin b \cdot \cos c}{\cos b \cdot \cos c} - \frac{\sin c \cdot \cos b}{\cos b \cdot \cos c} + \frac{\sin c \cdot \cos a}{\cos c \cdot \cos a} - \frac{\sin a \cdot \cos c}{\cos c \cdot \cos a}$$

$$= \tan a - \tan b + \tan b - \tan c + \tan c - \tan a = 0.$$

Bài tập 5: Không dùng máy tính cầm tay. Hãy tính các giá trị lượng giác sau:

a) $\cos 795^\circ$

b) $\tan \frac{7\pi}{12}$

Lời giải

a) Tính $\cos 795^\circ$

Vì $795^\circ = 75^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 30^\circ + 45^\circ + 2 \cdot 360^\circ$ nên

$$\cos 795^\circ = \cos 75^\circ = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

b) Tính $\tan \frac{7\pi}{12}$

$$\tan \frac{7\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$$

Bài tập 6: Tính $A = \cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12}$

Lời giải

Ta có: $A = \left(\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} \right) \left(\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} \right) = \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Bài tập 7: Cho $\cos 2x = -\frac{4}{5}$, với $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin x, \cos x, \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right), \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Vì $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin x > 0, \cos x > 0$.

Áp dụng công thức hạ bậc, ta có :

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{9}{10} \Rightarrow \sin x = \frac{3}{\sqrt{10}} ; \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Theo công thức cộng, ta có

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30} + 3\sqrt{10}}{20}$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x = -\frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Bài tập 8: Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15}}{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{15}}$$

$$\text{b) } B = \sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9}$$

Lời giải

$$\text{a) } C = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15}}{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{15}} = \frac{2 \cos \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{15} \right) \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{15} \right)}{-2 \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{15} \right) \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{15} \right)} = -\frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = -\cot \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

$$\text{b) } D = \left(\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9} \right) - \sin \frac{5\pi}{9} = 2 \sin \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{9} = \sin \frac{4\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} = 0.$$

Bài tập 9: Đơn giản biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \frac{\cos a + 2 \cos 2a + \cos 3a}{\sin a + \sin 2a + \sin 3a} \quad \text{b) } B = \frac{\cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(a - \frac{\pi}{3}\right)}{\cot a - \cot \frac{a}{2}}$$

$$\text{c) } C = \cos a + \cos(a + b) + \cos(a + 2b) + \dots + \cos(a + nb) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Lời giải

$$\text{a) } A = \frac{(\cos a + \cos 3a) + 2 \cos 2a}{(\sin a + \sin 3a) + 2 \sin 2a} = \frac{2 \cos 2a \cos a + 2 \cos 2a}{2 \sin 2a \cos a + 2 \sin 2a} = \frac{2 \cos 2a (\cos a + 1)}{2 \sin 2a (\cos a + 1)} = \cot 2a$$

b) Ta có $\cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(a - \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos a \cos \frac{\pi}{3} = \cos a$ và

$$\cot a - \cot \frac{a}{2} = \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\cos \frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} = \frac{\sin \frac{a}{2} \cos a - \cos \frac{a}{2} \sin a}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{a}{2} - a\right)}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = \frac{-\sin \frac{a}{2}}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = -\frac{1}{\sin a}$$

Suy ra $B = \frac{\cos a}{-\frac{1}{\sin a}} = -\sin a \cos a = -\frac{\sin 2a}{2}$.

c) Ta có

$$\begin{aligned} C \cdot 2\sin \frac{b}{2} &= 2\sin \frac{b}{2} \cos a + 2\sin \frac{b}{2} \cos(a+b) + 2\sin \frac{b}{2} \cos(a+2b) + \dots + 2\sin \frac{b}{2} \cos(a+nb) \\ &= \sin\left(\frac{b}{2} + a\right) + \sin\left(\frac{b}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{3b}{2} + a\right) + \sin\left(-\frac{b}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{5b}{2} + a\right) + \sin\left(-\frac{3b}{2} - a\right) \\ &\quad + \dots + \sin\left(\frac{(2n+1)b}{2} + a\right) + \sin\left(-\frac{(2n-1)b}{2} - a\right) \end{aligned}$$

$$\sin\left(\frac{b}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{(2n+1)b}{2} + a\right) = 2\sin(n+1)b \cos\left(\frac{nb}{2} - a\right)$$

Suy ra $C = \frac{\sin(n+1)b \cos\left(\frac{nb}{2} - a\right)}{\sin \frac{b}{2}}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tính $\sin 105^\circ$ ta được:

A. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. B. $-\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. D. $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Có: $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ$.

$$\Rightarrow \sin 105^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Câu 2: Tính $\tan 105^\circ$ ta được:

A. $-(2 + \sqrt{3})$. B. $2 + \sqrt{3}$. C. $2 - \sqrt{3}$. D. $-(2 - \sqrt{3})$.

Lời giải

$$\tan 105^{\circ} = \frac{\sin 105^{\circ}}{\cos 105^{\circ}} = \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = -(2 + \sqrt{3}).$$

Câu 3: Rút gọn biểu thức: $\cos 54^{\circ} \cos 4^{\circ} - \cos 36^{\circ} \cos 86^{\circ}$, ta được:

- A. $\cos 50^{\circ}$. **B.** $\cos 58^{\circ}$. C. $\sin 50^{\circ}$. D. $\sin 58^{\circ}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos 54^{\circ} \cos 4^{\circ} - \cos 36^{\circ} \cos 86^{\circ} = \cos 54^{\circ} \cos 4^{\circ} - \sin 54^{\circ} \sin 4^{\circ} = \cos(54^{\circ} + 4^{\circ}) = \cos 58^{\circ}$$

Câu 4: Rút gọn biểu thức $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ta được

- A. $\sqrt{2} \sin x$. **B.** $-\sqrt{2} \sin x$. C. $\sqrt{2} \cos x$. D. $-\sqrt{2} \cos x$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= -2 \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{4} + x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{4} - x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \\ &= -2 \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = -\sqrt{2} \sin x \end{aligned}$$

Câu 5: Giá trị của biểu thức $\cos \frac{37\pi}{12}$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. **C.** $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \cos \frac{37\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{12} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{12}\right) \\ &= \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{7\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{7\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Câu 6: Rút gọn biểu thức $M = \cos^4 15^{\circ} - \sin^4 15^{\circ}$.

- A. $M = 1$. **B.** $M = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = 0$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= \cos^4 15^{\circ} - \sin^4 15^{\circ} = (\cos^2 15^{\circ})^2 - (\sin^2 15^{\circ})^2 \\ &= (\cos^2 15^{\circ} - \sin^2 15^{\circ})(\cos^2 15^{\circ} + \sin^2 15^{\circ}) = \cos^2 15^{\circ} - \sin^2 15^{\circ} = \cos(2 \cdot 15^{\circ}) = \cos 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Câu 7: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos 10^{\circ} \cos 20^{\circ} \cos 40^{\circ} \cos 80^{\circ}$.

- A. $M = \frac{1}{16} \cos 10^{\circ}$. B. $M = \frac{1}{2} \cos 10^{\circ}$. C. $M = \frac{1}{4} \cos 10^{\circ}$. **D.** $M = \frac{1}{8} \cos 10^{\circ}$.

Lời giải

Vì $\sin 10^\circ \neq 0$ nên suy ra

$$M = \frac{16\sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{16\sin 10^\circ} = \frac{8\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{16\sin 10^\circ}$$

$$\Rightarrow M = \frac{4\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{16\sin 10^\circ} = \frac{2\sin 80^\circ \cos 80^\circ}{16\sin 10^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{16\sin 10^\circ}.$$

$$\Rightarrow M = \frac{\sin 20^\circ}{16\sin 10^\circ} = \frac{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ}{16\sin 10^\circ} = \frac{1}{8}\cos 10^\circ.$$

Câu 8: Công thức nào sau đây sai?

A. $\cos(a - b) = \sin a \sin b + \cos a \cos b.$

B. $\cos(a + b) = \sin a \sin b - \cos a \cos b.$

C. $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$

D. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$

Lời giải

Ta có $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$

Câu 9: Khẳng định nào sai trong các khẳng định sau?

A. $\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a.$

B. $\cos 6a = 1 - 2\sin^2 3a.$

C. $\cos 6a = 1 - 6\sin^2 a.$

D. $\cos 6a = 2\cos^2 3a - 1.$

Lời giải

Áp dụng công thức $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$, ta được
 $\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a = 2\cos^2 3a - 1 = 1 - 2\sin^2 3a.$

Câu 10: Khẳng định nào sai trong các khẳng định sau?

A. $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$

B. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$

C. $\sin x = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}.$

D. $\cos 3x = \cos^3 x - \sin^3 x.$

Lời giải

Ta có $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$

Câu 11: Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right).$

B. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right).$

C. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right).$

D. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right).$

Lời giải

Ta có: $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right).$

Câu 12: Có bao nhiêu đẳng thức dưới đây là đồng nhất thức?

1) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

2) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

3) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$

4) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Ta có $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$

Câu 13: Nếu $\cos(a + b) = 0$ thì khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\sin(a + 2b)| = |\sin a|.$

B. $|\sin(a + 2b)| = |\sin b|.$

C. $|\sin(a + 2b)| = |\cos a|.$

D. $|\sin(a + 2b)| = |\cos b|.$

Lời giải

Ta có : $\cos(a + b) = 0 \Leftrightarrow a + b = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow a = -b + \frac{\pi}{2} + k\pi.$

$\Rightarrow |\sin(a + 2b)| = \left| \sin\left(-b + 2b + \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \right| = |\cos(b + k\pi)| = |\cos b|.$

Câu 14: Nếu $\sin(a + b) = 0$ thì khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\cos(a + 2b)| = |\sin a|.$

B. $|\cos(a + 2b)| = |\sin b|.$

C. $|\cos(a + 2b)| = |\cos a|.$

D. $|\cos(a + 2b)| = |\cos b|.$

Lời giải

Ta có $\sin(a + b) = 0 \Leftrightarrow a + b = k\pi \rightarrow a = -b + k\pi.$

$\Rightarrow |\cos(a + 2b)| = |\cos(-b + 2b + k\pi)| = |\cos(b + k\pi)| = |\cos b|.$

Câu 15: Rút gọn $M = \sin(x - y)\cos y + \cos(x - y)\sin y.$

A. $M = \cos x.$

B. $M = \sin x.$

C. $M = \sin x \cos 2y.$

D. $M = \cos x \cos 2y.$

Lời giải

Áp dụng công thức $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, ta được

$M = \sin(x - y)\cos y + \cos(x - y)\sin y = \sin[(x - y) + y] = \sin x.$

Câu 16: Rút gọn $M = \cos(a + b)\cos(a - b) - \sin(a + b)\sin(a - b).$

A. $M = 1 - 2\cos^2 a.$

B. $M = 1 - 2\sin^2 a.$

C. $M = \cos 4a.$

D. $M = \sin 4a.$

Lời giải

Áp dụng công thức $\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x + y)$, ta được

$M = \cos(a + b)\cos(a - b) - \sin(a + b)\sin(a - b) = \cos(a + b + a - b) = \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a.$

Câu 17: Rút gọn $M = \cos(a + b)\cos(a - b) + \sin(a + b)\sin(a - b).$

A. $M = 1 - 2\sin^2 b.$

B. $M = 1 + 2\sin^2 b.$

C. $M = \cos 4b.$

D. $M = \sin 4b.$

Lời giải

Áp dụng công thức $\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y)$, ta được

$$M = \cos(a + b) \cos(a - b) + \sin(a + b) \sin(a - b)$$

$$= \cos(a + b - (a - b)) = \cos 2b = 1 - 2\sin^2 b.$$

Câu 18: Giá trị nào sau đây của x thỏa mãn $\sin 2x \cdot \sin 3x = \cos 2x \cdot \cos 3x$?

A. 18° .

B. 30° .

C. 36° .

D. 45° .

Lời giải

Áp dụng công thức $\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \cos(a + b)$, ta được

$$\sin 2x \cdot \sin 3x = \cos 2x \cdot \cos 3x \Leftrightarrow \cos 2x \cdot \cos 3x - \sin 2x \cdot \sin 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 5x = 0 \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}.$$

Câu 19: Rút gọn $M = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $M = \sqrt{2} \sin x$.

B. $M = -\sqrt{2} \sin x$.

C. $M = \sqrt{2} \cos x$.

D. $M = -\sqrt{2} \cos x$.

Lời giải

Áp dụng công thức $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$, ta được

$$M = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -2 \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{4} + x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{4} - x + \frac{\pi}{4}}{2}\right)$$

$$= -2 \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = -\sqrt{2} \sin x.$$

Câu 20: Rút gọn biểu thức $M = \tan x - \tan y$.

A. $M = \tan(x - y)$.

B. $M = \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cdot \cos y}$.

C. $M = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cdot \cos y}$.

D. $M = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } M = \tan x - \tan y = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cos y}.$$

Câu 21: Rút gọn biểu thức $M = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

A. $M = \sin 2\alpha$.

B. $M = \cos 2\alpha$.

C. $M = -\cos 2\alpha$.

D. $M = -\sin 2\alpha$.

Lời giải

$$\text{Vì hai góc } \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \text{ và } \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \text{ phụ nhau nên } \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right).$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } M &= \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Câu 22: Chọn đẳng thức đúng.

A. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \sin a}{2}.$

B. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \sin a}{2}.$

C. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \cos a}{2}.$

D. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \cos a}{2}.$

Lời giải

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)}{2} = \frac{1 + \sin(-a)}{2} = \frac{1 - \sin a}{2}.$$

Câu 23: Gọi $M = \frac{\sin(y-x)}{\sin x \sin y}$ thì

A. $M = \tan x - \tan y.$ **B.** $M = \cot x - \cot y$ **C.** $M = \cot y - \cot x.$ **D.** $M = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin y}.$

Lời giải

$$\text{Ta có : } M = \frac{\sin y \cos x - \cos y \sin x}{\sin x \sin y} = \frac{\sin y \cos x}{\sin x \sin y} - \frac{\cos y \sin x}{\sin x \sin y} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos y}{\sin y} = \cot x - \cot y.$$

Câu 24: Gọi $M = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ thì

A. $M = 2 \cos 2x (\cos x + 1).$

B. $M = 4 \cos 2x \left(\frac{1}{2} + \cos x\right).$

C. $M = \cos 2x (2 \cos x - 1).$

D. $M = \cos 2x (2 \cos x + 1).$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } M &= \cos x + \cos 2x + \cos 3x = (\cos x + \cos 3x) + \cos 2x \\ &= 2 \cos 2x \cos x + \cos 2x = \cos 2x (2 \cos x + 1). \end{aligned}$$

Câu 25: Rút gọn biểu thức $M = \frac{\sin 3x - \sin x}{2 \cos^2 x - 1}.$

A. $\tan 2x$

B. $\sin x.$

C. $2 \tan x.$

D. $2 \sin x.$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{\sin 3x - \sin x}{2 \cos^2 x - 1} = \frac{2 \cos 2x \sin x}{\cos 2x} = 2 \sin x.$$

Câu 26: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2 \cos^2 x + \cos x - 1}.$

A. $\cos x.$

B. $2 \cos x - 1.$

C. $2 \cos x.$

D. $\cos x - 1.$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \frac{(1 + \cos 2x) + (\cos x + \cos 3x)}{(2 \cos^2 x - 1) + \cos x} = \frac{2 \cos^2 x + 2 \cos 2x \cos x}{\cos x + \cos 2x} \\ &= \frac{2 \cos x (\cos x + \cos 2x)}{\cos x + \cos 2x} = 2 \cos x. \end{aligned}$$

Câu 27: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\tan \alpha - \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha} + \cos 2\alpha$.

- A. 0. B. $2 \cos^2 x$. C. 2. D. $\cos 2x$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{\tan \alpha - \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha} &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}}{\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Do đó $A = -\cos 2\alpha + \cos 2\alpha = 0$.

Câu 28: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha}$.

- A. $\sin 2\alpha$. B. $\cos 2\alpha$. C. $\tan 2\alpha$. D. $\cot 2\alpha$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \frac{(1 - \cos 4\alpha) + \sin 4\alpha}{(1 + \cos 4\alpha) + \sin 4\alpha} = \frac{2 \sin^2 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2 \cos^2 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)}{2 \cos 2\alpha (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)} = \tan 2\alpha. \end{aligned}$$

Câu 29: Biểu thức $A = \frac{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng:

- A. $-\tan^4 \alpha$. B. $\tan^4 \alpha$. C. $-\cot^4 \alpha$. D. $\cot^4 \alpha$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha; \cos 4\alpha = 2 \cos^2 2\alpha - 1 = 2(1 - 2 \sin^2 \alpha)^2 - 1.$$

$$\text{Do đó: } A = \frac{3 - 4(1 - 2 \sin^2 \alpha) + 2(1 - 2 \sin^2 \alpha)^2 - 1}{3 + 4(2 \cos^2 \alpha - 1) + 2(2 \cos^2 \alpha - 1)^2 - 1} = \frac{8 \sin^2 \alpha - 8 \sin^2 \alpha + 8 \sin^4 \alpha}{8 \cos^2 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 8 \cos^4 \alpha} = \tan^4 \alpha.$$

Câu 30: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha}$.

- A. $\tan \alpha$. B. $2 \tan \alpha$. C. $\tan 2\alpha + \tan \alpha$. D. $\tan 2\alpha$.

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha (2 \cos \alpha + 1)}{2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha (2 \cos \alpha + 1)}{\cos \alpha (2 \cos \alpha + 1)} = \tan \alpha.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho biết $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \text{b) } \sin 2\alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{9} & \text{c) } \cos 2\alpha = \frac{7}{9} & \text{d) } \cot 2\alpha = \frac{7\sqrt{2}}{8} \end{array}$$

Lời giải

a) Đúng: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha < 0$.

Ta có: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

b) Sai: $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$

c) Đúng: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$

d) Sai: $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{4\sqrt{2}}{7} \Rightarrow \cot 2\alpha = \frac{1}{\tan 2\alpha} = -\frac{7\sqrt{2}}{8}$

Câu 2: Cho biết $\cos 2\alpha = -\frac{1}{4}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0 & \text{b) } \sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{4} & \text{c) } \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{4} & \text{d) } \cot \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5} \end{array}$$

Lời giải

a) Đúng: Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0$.

b) Sai: Ta có: $\cos 2\alpha = -\frac{1}{4} \Rightarrow 1 - 2\sin^2 \alpha = -\frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{5}{8} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{4}$;

c) Sai: $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{10}{16}} = -\frac{\sqrt{6}}{4}$;

d) Đúng: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

Câu 3: Cho biết $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \cos \alpha < 0 & \text{b) } \cos \alpha = -\frac{4}{5} & \text{c) } \tan \alpha = \frac{3}{4} & \text{d) } \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{48 - \sqrt{3}}{11} \end{array}$$

Lời giải

a) Đúng: Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha < 0$.

b) Đúng: Ta có: $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{4}{5}$

c) Sai: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4}$.

d) Sai: Ta có: $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{3}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{3}} = \frac{\tan \alpha + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \tan \alpha}$.

Suy ra: $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\frac{3}{4} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{-3 + 4\sqrt{3}}{4 + 3\sqrt{3}} = \frac{48 - 25\sqrt{3}}{11}$.

Câu 4: Cho biết $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\cos \alpha > 0$ b) $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ c) $\tan \alpha = -\frac{12}{5}$ d) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{5 - \sqrt{3}}{26}$

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha$
 $= \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{6\sqrt{3}}{13}$. Do $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \cos \alpha > 0$.

b) Đúng: Ta có $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{5}{13}$.

c) Đúng: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{12}{5}$

d) Sai: $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{13} - \frac{6\sqrt{3}}{13} = \frac{5 - 12\sqrt{3}}{26}$.

Câu 5: Cho biết $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\cos x > 0$ b) $\cos x = \frac{\sqrt{6}}{3}$ c) $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{6} - 3}{8}$.

Lời giải

a) Đúng: Vì $0 < x < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos x > 0$.

b) Đúng: Ta có: $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

c) Sai: $\tan x = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) Sai: $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} - 3}{6}$.

Câu 6: Cho biết $\cos x = -\frac{12}{13}$ và $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\sin x > 0$ b) $\sin x = -\frac{5}{13}$ c) $\cot x = \frac{5}{12}$ d) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{5 - 12\sqrt{3}}{26}$

Lời giải

a) Sai: Vì $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin x < 0$.

b) Đúng: Ta có: $\cos x = -\frac{12}{13} \Rightarrow \sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2} = -\frac{5}{13}$.

c) Sai: $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{12}{5}$

d) Đúng: $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{5 - 12\sqrt{3}}{26}$

Câu 7: Cho biết $\tan x = \sqrt{2}$ và $0 < x < 90^\circ$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\cos x > 0$ b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\sin x = \frac{\sqrt{6}}{3}$ d) $\cos(x - 30^\circ) = \frac{3 - \sqrt{6}}{6}$

Lời giải

a) Đúng: Vì $0 < x < 90^\circ$ nên $\cos x > 0$.

b) Đúng: Ta có: $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + 2 = 3 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) Đúng: Mặt khác: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin x = \tan x \cos x = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

d) Sai: $\cos(x - 30^\circ) = \cos x \cos 30^\circ + \sin x \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 + \sqrt{6}}{6}$

Câu 8: Biết $\sin a = \frac{8}{17}$, $\tan b = \frac{5}{12}$ và a, b là các góc nhọn. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\tan a = \frac{8}{15}$ b) $\sin(a - b) = \frac{21}{221}$ c) $\cos(a + b) = \frac{14}{22}$ d) $\tan(a + b) = \frac{17}{14}$

Lời giải

a) Đúng: Vì a, b là các góc nhọn nên $\cos a > 0, \cos b > 0$.

Ta có: $\cos a = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 a}}{17} = \frac{15}{17} \Rightarrow \tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{8}{15}$;

b) Đúng: $\cos b = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 b}} = \frac{12}{13} \Rightarrow \sin b = \cos b \tan b = \frac{5}{13}$.

Khi đó: $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b = \frac{8}{17} \cdot \frac{12}{13} - \frac{15}{17} \cdot \frac{5}{13} = \frac{21}{221}$.

c) Sai: $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = \frac{15}{17} \cdot \frac{12}{13} - \frac{8}{17} \cdot \frac{5}{13} = \frac{140}{221}$

d) Sai: $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{\frac{8}{15} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{8}{15} \cdot \frac{5}{12}} = \frac{171}{140}$.

Câu 9: Biết $0 < a, b < \frac{\pi}{2}$, $a + b = \frac{\pi}{4}$ và $\tan a \tan b = 3 - 2\sqrt{2}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\tan a + \tan b = -2 + 2\sqrt{2}$.

b) $\tan a = -1 + \sqrt{2}$

c) $\tan b = -1 - \sqrt{2}$

d) $\tan a - \tan b = -2 - 2\sqrt{2}$.

Lời giải

a) Đúng: $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \Rightarrow \tan a + \tan b = \tan(a + b)(1 - \tan a \tan b)$ mà $a + b = \frac{\pi}{4}$

và $\tan a \tan b = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow \tan a + \tan b = \tan \frac{\pi}{4} [1 - (3 - 2\sqrt{2})] = -2 + 2\sqrt{2}$.

b) Đúng: Đặt $S = \tan a + \tan b$; $P = \tan a \tan b$.

Khi đó $\tan a, \tan b$ là nghiệm của phương trình

$$X^2 - SX + P = 0 \Leftrightarrow X^2 - (-2 + 2\sqrt{2})X + 3 - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow X = -1 + \sqrt{2}.$$

Suy ra $\tan a = \tan b = -1 + \sqrt{2}$.

c) Sai: $\tan b = -1 + \sqrt{2}$

d) Sai: $\tan a - \tan b = 0$

Câu 10: Cho $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

b) $\tan \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{\sqrt{5} - 2\sqrt{3}}{6}$

d) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}{6}$

Lời giải

Thay $\cot \alpha = -3$ vào P ta được $P = \frac{10}{21}$.

$$d) \text{ Đúng : } \left[\tan \frac{17\pi}{4} + \tan \left(\frac{7\pi}{2} - \alpha \right) \right]^2 + \left[\cot \frac{13\pi}{4} + \cot (7\pi - \alpha) \right]^2 = 20$$

$$\text{Ta có } \tan \frac{17\pi}{4} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + 4\pi \right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \text{ và } \tan \left(\frac{7\pi}{2} - \alpha \right) = \cot \alpha.$$

$$\text{Và } \cot \frac{13\pi}{4} = \cot \left(\frac{\pi}{4} + 3\pi \right) = \cot \frac{\pi}{4} = 1; \cot (7\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } & \left[\tan \frac{17\pi}{4} + \tan \left(\frac{7\pi}{2} - \alpha \right) \right]^2 + \left[\cot \frac{13\pi}{4} + \cot (7\pi - \alpha) \right]^2 \\ &= (1 + \cot x)^2 + (1 - \cot x)^2 = 2 + 2\cot^2 x = 2 + 2.(-3)^2 = 20. \end{aligned}$$

Câu 12: Cho $\cos a = \frac{3}{4}$; $\sin a > 0$; $\sin b = \frac{3}{5}$; $\cos b < 0$. Xét tính đúng – sai của các phát biểu sau:

a) Giá trị của $\tan a = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

b) Giá trị của $\cot b = -\frac{2}{3}$.

c) Giá trị của $\cos 2a + \cos 2b$ thuộc khoảng $\left(\frac{1}{2}; 1 \right)$.

d) Giá trị của $\cos(a+b)$ thuộc khoảng $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3} \right)$.

Lời giải

a) Đúng : Ta có $\tan^2 a + 1 = \frac{1}{\cos^2 a} \Rightarrow \tan a = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 a} - 1} = \sqrt{\frac{16}{9} - 1} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

b) Sai: Ta có $\cot^2 b + 1 = \frac{1}{\sin^2 b} \Rightarrow \cot b = -\sqrt{\frac{1}{\sin^2 b} - 1} = -\sqrt{\frac{25}{9} - 1} = -\frac{4}{3}$

c) Sai : Ta có $\cos 2a + \cos 2b = 2\cos^2 a - 1 + 1 - 2\sin^2 b = 2 \cdot \frac{9}{16} - 2 \cdot \frac{9}{25} = \frac{81}{200} = 0,405 \notin \left(\frac{1}{2}; 1 \right)$

d) Sai : $\begin{cases} \cos a = \frac{3}{4} \\ \sin a > 0 \end{cases} \Rightarrow \sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ và } \begin{cases} \sin b = \frac{3}{5} \\ \cos b < 0 \end{cases} \Rightarrow \cos b = -\sqrt{1 - \sin^2 b} = -\frac{4}{5}$

$$\text{Suy ra } \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5} \right) - \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{3}{5} \left(1 + \frac{\sqrt{7}}{4} \right) \notin \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3} \right)$$

Câu 13: Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\sin^2 x = \frac{1 + \sin 2x}{2}$

b) Nếu $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ thì $\cos 2\alpha = -\frac{7}{9}$

c) Nếu $\sin x = \frac{3}{4}$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $\sin 2x = \frac{3\sqrt{7}}{8}$

d) Cho $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ với $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ biết $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = a + b\sqrt{c}$. ($a, b, c \in \mathbb{Z}, c \geq 0$) Khi đó $a + b + c = 0$.

Lời giải

a) Sai: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

b) Đúng: $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = \frac{-7}{9}$

c) Đúng : Ta có $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$.

Vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $\cos x > 0 \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{7}}{4}$ suy ra $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$

d) Đúng: Ta có $\tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} - 1 = \frac{5}{4}$

Vì $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ nên $\tan \alpha < 0 \Rightarrow \tan \alpha = \frac{-\sqrt{5}}{2}$

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{-\sqrt{5}}{2} + 1}{1 - \left(\frac{-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot 1} = \frac{-\sqrt{5} + 2}{2 + \sqrt{5}} = -9 + 4\sqrt{5}$$

Vậy $a = -9, b = 4, c = 5$ nên mệnh đề đúng.

Câu 14: Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

b) $\sin 31^\circ \cdot \cos 12^\circ + \cos 12^\circ \cdot \sin 31^\circ = \sin 19^\circ$.

c) Cho $\cos x = \frac{4}{5}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Giá trị của $\sin 2x$ là $-\frac{24}{25}$.

d) Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Biết giá trị của $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1 - a\sqrt{6}}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ thì $a + b = 4$.

Lời giải

a) Đúng: Theo công thức cộng $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

b) Sai: Áp dụng công thức cộng: $\sin 31^\circ \cdot \cos 12^\circ + \cos 12^\circ \cdot \sin 31^\circ = \sin(31^\circ + 12^\circ) = \sin 43^\circ$

c) Đúng : Ta có $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{5}$.

Mặt khác, vì $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \Rightarrow \sin x < 0$.

Vậy $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$.

d) Vì $\sin \alpha = \frac{1}{3}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Do đó $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \sin \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1-2\sqrt{6}}{6}$.

với $a = 2, b = 6$. Tính $a + b = 8$. Nên $a + b = 4$ là sai.

Câu 15: Xét tính đúng sai của các đẳng thức sau:

a) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$.

b) $4 \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \sin 4x + \sin 2x - \sin 6x$.

c) $1 + \sin 2x + \cos 2x = 2\sqrt{2} \sin x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

d) $\sin^2 x + 2 \sin(a-x) \cdot \sin x \cdot \cos a + \sin^2(a-x) = \cos^2 a$.

Lời giải

a) Sai: Theo công thức cộng ta có $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x$.

b) Đúng: Áp dụng quy tắc từ tích sang tổng, ta được:

$$4 \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = 2(\cos x - \cos 3x) \sin 3x = \sin 4x + \sin 2x - \sin 6x.$$

Do đó $4 \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \sin 4x + \sin 2x - \sin 6x$

c) Sai: Ta có $1 + \sin 2x + \cos 2x = 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 2 \cos x (\sin x + \cos x)$.

Mà $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\cos x \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin x \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

d) Ta có: $\sin^2 x + 2 \sin(a-x) \cdot \sin x \cdot \cos a + \sin^2(a-x)$

$$\begin{aligned}
 &= \sin^2 x + \sin(a-x) \cdot [\sin(x+a) + \sin(x-a)] + \sin^2(a-x) \\
 &= \sin^2 x + \sin(a-x) \cdot [\sin(x+a) + \sin(x-a) + \sin(a-x)] \\
 &= \sin^2 x + \sin(a-x) \cdot [\sin(x+a) + \sin(x-a) - \sin(x-a)] \\
 &= \sin^2 x + \sin(a-x) \cdot \sin(x+a) = \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{\cos 2a - \cos 2x}{2} = \frac{1 - \cos 2a}{2} = \sin^2 a.
 \end{aligned}$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ + \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$.

Lời giải

Áp dụng công thức nhân đôi $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$.

Ta có $M = (\cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ) + (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)$.

$$= (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)(\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) + (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ).$$

$$= (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) + (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) = \cos 30^\circ + \cos 30^\circ = \sqrt{3}.$$

Câu 2: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos^6 15^\circ - \sin^6 15^\circ$.

Lời giải

Ta có : $\cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha)$

$$= \cos 2\alpha \cdot \left[(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \right] = \cos 2\alpha \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha \right).$$

$$\text{Vậy } M = \cos 30^\circ \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 30^\circ \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{15\sqrt{3}}{32} \approx 0,81$$

Câu 3: Giá trị của biểu thức $\cos \frac{\pi}{30} \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{\pi}{5}$ là

Lời giải

$$\text{Ta có } \cos \frac{\pi}{30} \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{\pi}{5} = \cos \left(\frac{\pi}{30} - \frac{\pi}{5} \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$$

Câu 4: Giá trị của biểu thức $P = \frac{\sin \frac{5\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{18}}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12}}$ là

Lời giải

$$\text{Áp dụng công thức } \begin{cases} \sin a \cos b - \cos a \sin b = \sin(a-b) \\ \cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a+b) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \sin \frac{5\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{18} = \sin \left(\frac{5\pi}{18} - \frac{\pi}{9} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Và } \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}. \text{ Vậy } P = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1.$$

Câu 5: Giá trị đúng của biểu thức $\frac{\tan 225^\circ - \cot 81^\circ \cdot \cot 69^\circ}{\cot 261^\circ + \tan 201^\circ}$ bằng

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{\tan 225^\circ - \cot 81^\circ \cdot \cot 69^\circ}{\cot 261^\circ + \tan 201^\circ} &= \frac{\tan(180^\circ + 45^\circ) - \tan 9^\circ \cdot \cot 69^\circ}{\cot(180^\circ + 81^\circ) + \tan(180^\circ + 21^\circ)} \\ &= \frac{1 - \tan 9^\circ \cdot \tan 21^\circ}{\tan 9^\circ + \tan 21^\circ} = \frac{1}{\tan(9^\circ + 21^\circ)} = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Câu 6: Giá trị của biểu thức $M = \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{11\pi}{24}$ bằng

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin \frac{7\pi}{24} &= \cos \frac{5\pi}{24} \text{ và } \sin \frac{11\pi}{24} = \cos \frac{\pi}{24}. \\ \text{Do đó } M &= \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \cos \frac{5\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24} = \frac{1}{4} \cdot \left(2 \cdot \sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \right) \cdot \left(2 \cdot \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \cos \frac{5\pi}{24} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(\cos \frac{6\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{8} \cdot \left(0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{16} \approx 0,06 \end{aligned}$$

Câu 7: Giá trị của biểu thức $A = \sin \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$ là

Lời giải

Áp dụng công thức $\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$, ta có

$$\begin{aligned} A &= \sin \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{16} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{32} \approx 0,05 \end{aligned}$$

Câu 8: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$.

Lời giải

Áp dụng công thức $\sin a - \sin b = 2 \cdot \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2 \sin \frac{\pi}{7} \cdot M &= 2 \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cdot \cos \frac{6\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7} \\ &= \sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{7\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7} = -\sin \frac{\pi}{7} + \sin \pi = -\sin \frac{\pi}{7}. \end{aligned}$$

Vậy giá trị biểu thức $M = -\frac{1}{2}$.

Câu 9: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Tính $P = \sin 2(\alpha + \pi)$.

Lời giải

Ta có $P = \sin 2(\alpha + \pi) = \sin(2\alpha + 2\pi) = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{3}{5}$.

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên ta chọn $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$.

Thay $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ và $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ vào P , ta được $P = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25} \approx -0,96$.

Câu 10: Cho góc α thỏa mãn $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $P = \frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$.

Lời giải

Ta có $P = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 2 \cos \alpha$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên ta chọn $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow P = \frac{2\sqrt{5}}{3} \approx 1,49$

Câu 11: Biết $\sin(\pi - \alpha) = -\frac{3}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$.

Lời giải

Ta có $-\frac{3}{5} = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5}$.

Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

Suy ra $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10} \approx -0,92$

Câu 12: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Tính $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$.

Lời giải

Áp dụng công thức $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$, ta được

$$P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos 2\alpha\right).$$

$$\text{Ta có } \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}.$$

$$\text{Thay vào } P, \text{ ta được } P = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{7}{25}\right) = \frac{11}{100} \approx 0,11$$

Câu 13: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Tính $P = \cos 4\alpha$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2\left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}.$$

$$\text{Suy ra } P = \cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2 \cdot \frac{49}{625} - 1 = -\frac{527}{625} = -0,8$$

Câu 14: Cho góc α thỏa mãn $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$. Tính $P = \sin \alpha - \cos \alpha$.

Lời giải

$$\text{Vì } \frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi \text{ suy ra } \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases} \text{ nên } \sin \alpha - \cos \alpha > 0.$$

$$\text{Ta có } (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}. \text{ Suy ra } \sin \alpha - \cos \alpha = \pm \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Do } \sin \alpha - \cos \alpha > 0 \text{ nên } \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}. \text{ Vậy } P = \frac{3}{\sqrt{5}} \approx 1,34$$

HẾT