



Dạng 2: Bài toán tìm max, min của hàm số có chứa tham số

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để

- Hàm số $y = \frac{x^2+mx+1}{x+m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0; 2]$ tại một điểm $x_0 \in (0, 2)$
- Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-m}{x+2}$ trên $[0; 2]$ bằng 8
- Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1 - m^2$ trên đoạn $[-2; 1]$ bằng -1
- Hàm số $y = \frac{mx-m^2-1}{x+2m}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ bằng $\frac{1}{5}$.

Lời giải

- Hàm số $y = \frac{x^2+mx+1}{x+m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0; 2]$ tại một điểm $x_0 \in (0, 2)$

Điều kiện xác định $x \neq -m$

Hàm số liên tục trên đoạn $[0; 2]$ nên $-m \notin [0; 2] \Rightarrow \begin{cases} -m < 0 \\ -m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \end{cases} (*)$

Ta có: $y' = \frac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2} = \frac{(x+m)^2-1}{(x+m)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -m+1 \\ x_2 = -m-1 \end{cases}$

Vì $x_1 - x_2 = 2$ nên chỉ có nhiều nhất một nghiệm thuộc $(0, 2)$.

Ta thấy: $-m+1 > -m-1, \forall m$ do đó để hàm số liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0; 2]$ tại một

điểm $x_0 \in (0, 2)$ thì $0 < -m+1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1 (**)$

Từ (*) và (**) ta có $0 < m < 1$.

- Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-m}{x+2}$ trên $[0; 2]$ bằng 8

Ta có $y(0) = -\frac{m}{2}$; $y(2) = \frac{2-m}{4}$.

Hàm số $y = \frac{x-m}{x+2}$ xác định trên $[0; 2]$ và đạt các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất tại hai đầu mút.

Do đó $\max_{[0;2]} y + \min_{[0;2]} y = -\frac{m}{2} + \frac{2-m}{4} = \frac{-3m+2}{4}$.

Từ giả thiết suy ra $\frac{-3m+2}{4} = 8 \Leftrightarrow -3m+2 = 32 \Leftrightarrow m = -10$.

- Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1 - m^2$ trên đoạn $[-2; 1]$ bằng -1

Ta có $y' = -3x^2 + 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (nhan)} \\ x = 2 \text{ (loại)} \end{cases}$.

Khi đó $f(-2) = 19 - m^2$; $f(0) = -1 - m^2$ và $f(1) = 1 - m^2$.

Do đó $\min_{[-2;1]} f(x) = f(0) = -1 - m^2$ suy ra $-1 - m^2 = -1 \Leftrightarrow m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

- Hàm số $y = \frac{mx-m^2-1}{x+2m}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ bằng $\frac{1}{5}$.

Ta có $y' = \frac{3m^2+1}{(x+2m)^2} > 0, \forall x \neq -2m$

Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $[1; 3]$ khi $\begin{cases} -2m \notin [1; 3] \\ y(3) = \frac{-m^2+3m-1}{2m+3} = \frac{1}{5} (*) \end{cases}$

Giải (*): $\frac{-m^2+3m-1}{2m+3} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow -5m^2 + 15m - 5 = 2m + 3 \Leftrightarrow -5m^2 + 13m - 8 = 0 \Leftrightarrow$



$$\begin{cases} m = 1(tm) \\ m = \frac{8}{5}(tm) \end{cases}$$

Bài tập 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + m$ trên $[-1; 1]$ bằng 0

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x+5m}{x-3}$ trên $[1; 2]$ bằng 4

Lời giải

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + m$ trên $[-1; 1]$ bằng 0

Hàm số liên tục và xác định trên $[-1; 1]$ và có đạo hàm $f'(x) = -3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = 0 \in [-1; 1] \\ x = -2 \notin [-1; 1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \in [-1; 1] \\ x = -2 \notin [-1; 1] \end{cases}$$

Xét $f(-1) = -2 + m; f(1) = -4 + m$ suy ra $\max_{[-1;1]} f(x) = -2 + m$

Theo đề bài $-2 + m = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x+5m}{x-3}$ trên $[1; 2]$ bằng 4 có đạo hàm $y' = \frac{-3-5m}{(x-3)^2}$

Trường hợp 1: $-3 - 5m > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{3}{5}$

Suy ra $y' > 0$ thì $\min_{[1;2]} y = y(1) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(1 + 5m) = 4 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{5}$ (nhận)

Trường hợp 2: $-3 - 5m < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{3}{5}$

Suy ra $y' < 0$ thì $\min_{[1;4]} y = y(2) \Leftrightarrow -2 + 5m = 4 \Leftrightarrow m = \frac{6}{5}$ (loại)

WE COACH. WE INSPIRE

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x+m}{x-3}$ (với m là tham số). Giá trị của m để $\max_{[-1;2]} f(x) + \min_{[-1;2]} f(x) = 8$ là

A. $m = \frac{4}{5}$.

B. $m = -\frac{46}{5}$.

C. $m = -12$.

D. $m = \frac{18}{5}$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = \frac{-6-m}{(x-3)^2}$.

Nếu $m = -6 \Rightarrow y = 2$ (loại).

Nếu $m \neq -6$ khi đó $y' < 0, \forall x \in [-1; 2]$ hoặc $y' > 0, \forall x \in [-1; 2]$ nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất tại $x = 1, x = 2$.



Theo bài ra ta có: $\max_{[-1;2]} f(x) + \min_{[-1;2]} f(x) = 8 \Leftrightarrow f(-1) + f(2) = 8 \Leftrightarrow \frac{-2+m}{-4} + \frac{4+m}{-1} = 8 \Leftrightarrow$
 $m = -\frac{46}{5}$

Câu 2: Cho hàm số $y = x + \cos^2 x + m$ (m là tham số). Với giá trị nào của tham số m thì $\min_{[0; \frac{\pi}{4}]} y = 4$

- A.** $m = 3$. **B.** $m = \frac{3}{4}$. **C.** $m = \frac{5}{2}$. **D.** $m = 0$.

Lời giải

Ta có: $y' = 1 - 2 \sin x \cdot \cos x = 1 - \sin 2x \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = x + \cos^2 x + m$
 Do đó $\min_{[0; \frac{\pi}{4}]} y = y(0) = 1 + m = 4 \Leftrightarrow m = 3$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$. Biết $\max_{(-\infty; 0)} f(x) = 5$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $(0; +\infty)$ là

- A.** $\min_{(0; +\infty)} f(x) = 1$. **B.** $\min_{(0; +\infty)} f(x) = 2$. **C.** $\min_{(0; +\infty)} f(x) = 3$. **D.** $\min_{(0; +\infty)} f(x) = -1$.

Lời giải

Xét trên khoảng $(-\infty; 0)$ có $f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-1	0	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$				
	$-\infty$	$m+2$		m

Khi đó ta có $\max_{(-\infty; 0)} f(x) = 5 \Leftrightarrow m + 2 = 5 \Leftrightarrow m = 3 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x + 3$.

Xét trên khoảng $(0; +\infty)$. Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	3		1		$+\infty$

Vậy $\min_{(0; +\infty)} f(x) = 1$.

Câu 4: Cho hàm số $y = (x + m)^3 - 3(x + m) + 1 + n$. Biết hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ và giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 1]$ bằng 4. Tính $m + n$

- A.** $m + n = 0$. **B.** $m + n = 2$. **C.** $m + n = -1$. **D.** $m + n = 1$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3(x + m)^2 - 3 = 3(x + m + 1)(x + m - 1)$

Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - m = x_2 \\ x = -1 - m = x_1 \end{cases}$

Để hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$ thì $x_1 \leq 0 < 2 \leq x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot y'(0) \leq 0 \\ 3 \cdot y'(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y'(0) \leq 0 \\ y'(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - 3 \leq 0 \\ 3(2+m)^2 - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 \leq 0 \\ (2+m)^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 1 \\ -1 \leq 2+m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 1 \\ -3 \leq m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1 \quad (1)$$

Với $m = -1$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 1] \\ x = 2 \notin [-1; 1] \end{cases}$

Ta có $y(0) = n + 3$, $y(1) = n + 1$, $y(-1) = n - 1 \Rightarrow \max_{[-1;1]} y = n + 3 = 4 \Rightarrow n = 1 \quad (2)$

Từ (1) vào (2) $\Rightarrow m + n = 0$.

Câu 5: Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2} + m$ là $3\sqrt{2}$. Giá trị của m là

A. $m = 2\sqrt{2}$. **B.** $m = -\sqrt{2}$. **C.** $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $m = \sqrt{2}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $-2 \leq x \leq 2$.

Ta có: $y = x + \sqrt{4 - x^2} + m \Rightarrow y' = 1 + \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Bảng biến thiên

x	-2	$\sqrt{2}$	2
y'	$+$	0	$-$
y	$-2 + m$	$2\sqrt{2} + m$	$2 + m$

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là $3\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} + m = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$ (với m là tham số thực). Biết $\max_{(-\infty;0)} f(x) = 5$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $(0; +\infty)$ là

A. $\min_{(0;+\infty)} f(x) = 1$. **B.** $\min_{(0;+\infty)} f(x) = 2$. **C.** $\min_{(0;+\infty)} f(x) = 3$. **D.** $\min_{(0;+\infty)} f(x) = -1$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y			$m+2$		$+\infty$
	$-\infty$			$m-2$	

Vậy $\max_{(-\infty;0)} f(x) = f(-1) \Rightarrow f(-1) = 5 \Leftrightarrow m + 2 = 5 \Leftrightarrow m = 3$.

$$\min_{(0;+\infty)} f(x) = f(1) = m - 2 = 3 - 2 = 1.$$

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực). Gọi m_0 là giá trị của m thỏa mãn $\min_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m_0 < -1$. **B.** $m_0 > 4$. **C.** $1 \leq m_0 < 3$. **D.** $3 < m_0 \leq 4$.

Lời giải

Ta có: $y' = \frac{-m-1}{(x-1)^2}$. Với $x \neq 1$.



Nếu $-m - 1 > 0 \Leftrightarrow m < -1$

$\Rightarrow y' > 0 \Rightarrow$ hàm số đã cho đồng biến trên $[2; 4] \Rightarrow \min_{[2;4]} y = y(2) = m + 2$.

Theo giả thiết: $m + 2 = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (loại).

Nếu $-m - 1 < 0 \Leftrightarrow m > -1$

$\Rightarrow y' < 0 \Rightarrow$ hàm số đã cho nghịch biến trên $[2; 4] \Rightarrow \min_{[2;4]} y = y(4) = \frac{4+m}{3}$.

Theo giả thiết: $\frac{m+4}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5$. Vậy $m_0 = 5$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = 10^x + x$ và hàm số $g(x) = x^3 - mx^2 + (m^2 + 1)x - 2$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $g(x + f(x))$ trên đoạn $[0; 1]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của tham số m bằng

A. $\frac{21}{2}$.

B. 6.

C. 21.

D. 5.

Lời giải

Đặt $t = x + f(x)$ vì $x \in [0; 1] \Rightarrow t \in [1; 12]$.

Xét $g(t) = t^3 - mt^2 + (m^2 + 1)t - 2$ trên $[1; 12]$

$\Rightarrow g'(t) = 3t^2 - 2mt + m^2 + 1$ có $\Delta' = m^2 - 3(m^2 + 1) = -2m^2 - 3 < 0 \forall m$.

$\Rightarrow g'(t) > 0 \forall t \in [1; 12] \Rightarrow y = g(t)$ đồng biến trên $[1; 12]$.

Vậy $M = \max_{t \in [1; 12]} g(t) = g(12) = 12m^2 - 144m + 1738 \Rightarrow M$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $m = \frac{144}{2.12} = 6$.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 1.

A. $m = 20$.

B. $m = 19$.

C. $m = 18$.

D. $m = 21$.

Lời giải

Hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$ và $y' = -3x^2 - 6x$

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 2] \\ x = -2 \notin [-1; 2] \end{cases}$

$y(-1) = m - 2; y(0) = m; y(2) = m - 20$

Suy ra: $\min_{x \in [-1; 2]} y = 1 \Leftrightarrow m - 20 = 1 \Leftrightarrow m = 21$.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x-m^2}{x+8}$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0; 3]$ bằng $-\frac{9}{2}$?

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Hàm số $y = \frac{x-m^2}{x+8}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-8\}$ nên hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[0; 3]$.

Ta có $y' = \frac{8+m^2}{(x+8)^2} > 0, \forall m \in \mathbb{R}, x \neq -8$ nên hàm số đồng biến trên đoạn $[0; 3]$.

Suy ra $\min_{[0;3]} y = y(0) = -\frac{m^2}{8}$. Từ giả thiết suy ra $-\frac{m^2}{8} = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow m^2 = 36 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = -6 \end{cases}$.

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.



Câu 11: Cho hàm số $y = (x^3 - 3x - m + 1)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 4 là

A. -2.

B. 2.

C. -4.

D. 4.

Lời giải

Đặt $t = g(x) = x^3 - 3x + 1$ là hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1; 1]$.

Ta khảo sát hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$			1		$-\infty$
		-3				

Từ bảng biến thiên ta thấy $x \in [-1; 1]$ thì $t \in [-3; 1]$

Bài toán trở thành: Tìm m để hàm số $y = f(t) = (t - m)^2$ có giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-3; 1]$ bằng 4.

Ta có $f'(t) = 2(t - m) = 0 \Leftrightarrow t = m$.

Nếu $m \in [-3; 1]$ thì $\min_{[-3; 1]} f(t) = f(m) = 0$, tức là không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $m > 1$ thì $\min_{[-3; 1]} f(t) = f(1) = (1 - m)^2$

$$\Leftrightarrow (1 - m)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$$

Nếu $m < -3$ thì $\min_{[-3; 1]} f(t) = f(-3) = (-3 - m)^2$

$$\Leftrightarrow (-3 - m)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5 \\ m = -1 \end{cases}$$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán: $m = 3; m = -5$.

Vậy tổng tất cả các giá trị của m là -2.

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{x-m^2}{x-8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 3]$ bằng m . Giá trị m_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. (20; 25).

B. (6; 9).

C. (5; 6).

D. (2; 5).

Lời giải

Ta có : $y' = \frac{8+m^2}{(x+8)^2} > 0, \forall x \neq -8$

Do đó $\min_{[0; 3]} y = y(0) = \frac{-m^2}{8}$. Theo giả thiết $\min_{[0; 3]} y = -3 \Rightarrow \frac{-m^2}{8} = -3 \Leftrightarrow m^2 = 24 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{6}$



Câu 13: Cho hàm số $f(x) = \frac{x-m^2}{x+4}$. Gọi m_0 là giá trị lớn nhất của tham số m để hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 6]$ bằng -4 . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m_0 \in (5; 7)$. B. $m_0 \in (1; 3)$. C. $m_0 \in (7; 9)$. **D. $m_0 \in (3; 5)$.**

Lời giải

Ta có: $f(x) = \frac{x-m^2}{x+4} \Rightarrow f'(x) = \frac{m^2+4}{(x+4)^2} > 0, \forall m$. Hàm số đồng biến trên $[0; 6]$.

Suy ra: $\min_{[0;6]} f(x) = f(0) = -\frac{m^2}{4} = -4 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 4$ suy ra $m = 4$.

Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{x-m^2-2}{x-m}$, với m là tham số. Gọi S là tập các giá trị của m để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 4]$ bằng -1 . Tổng tất cả các phần tử của S bằng

- A. -6 . B. -1 . C. 1 . **D. -3 .**

Lời giải

Ta có: $y' = \frac{m^2-m+2}{(x+m)^2} > 0, \forall x \neq m$.

Suy ra $\max_{[0;4]} y = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} y(4) = -1 \\ m \notin [0; 4] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 6 = 0 \\ m > 4 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -3 \\ m > 4 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3$.

Khi đó $S = \{-3\}$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng -3 .

Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{x-m}{x+1}$ với m là số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0; 2]$ bằng 6 .

- A. $m = 4$. **B. $m = -4$.** C. $m = 1$. D. $m = -1$.

Lời giải

Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2]$ bằng 6 khi:

$$y(0) + y(2) = 6 \Leftrightarrow -m + \frac{2-m}{3} = 6 \Leftrightarrow m = -4.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{x-m^2-2}{x-m}$, với m là tham số

- a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$
b) Khi $m = 1$ thì hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$
c) Khi $m = 1$ thì trên đoạn $[1; 4]$ hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$
d) Có duy nhất 1 giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 4]$ bằng -1 .

Lời giải

- a) Sai: Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$
b) Đúng: Khi $m = 1$ thì hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$
Ta có $y' = \frac{m^2-m+2}{(x-m)^2} > 0, \forall m$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; m)$ và $(m; +\infty)$



x	$-\infty$	m	$+\infty$
y'	+		+
y	1	$+\infty$	1

c) Sai: Khi $m = 1$ thì trên đoạn $[1; 4]$ hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$

d) Đúng: Có duy nhất 1 giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 4]$ bằng -1 .

Từ bảng biến thiên, hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $[0; 4]$ bằng -1 khi $\begin{cases} m < 0 \\ f(4) = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} m < 0 \\ \frac{2 - m^2}{4 - m} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 + m - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3$$

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$, với m là tham số

a) Khi $m = 0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$

b) Khi $m = 0$ thì hàm số có hai điểm cực trị

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2]$ bằng $m - 2$

d) Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Khi đó S có một phần tử

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 3$. Bảng biến thiên như sau:

x	0	1	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	m	$-2 + m$	$2 + m$

Trường hợp 1: $2 + m < 0 \Leftrightarrow m < -2$. Khi đó $\max_{[0;2]} |f(x)| = -(-2 + m) = 2 - m$

$$2 - m = 3 \Leftrightarrow m = -1 \text{ (loại)}$$

Trường hợp 2: $\begin{cases} 2 + m > 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 0$.

Khi đó $|m - 2| = 2 - m > 2 > 2 + m \Rightarrow \max_{[0;2]} |f(x)| = -(-2 + m) = 2 - m = 3 \Leftrightarrow m = -1$ (thỏa mãn)

Trường hợp 3: $\begin{cases} -2 + m < 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2$.

Khi đó $|m - 2| = 2 - m < 2 < 2 + m \Rightarrow \max_{[0;2]} |f(x)| = 2 + m = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (thỏa mãn)

Trường hợp 4: $-2 + m > 0 \Leftrightarrow m > 2$. Khi đó $\max_{[0;2]} |f(x)| = 2 + m = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (loại)

a) Sai: Khi $m = 0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$

b) Đúng: Khi $m = 0$ thì hàm số có hai điểm cực trị

c) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2]$ bằng $m - 2$



d) Sai: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Khi đó S có hai phần tử

Câu 3: Cho hàm số $y = mx + \frac{36}{x+1}$, với m là tham số

a) Hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn $[0; 3]$ khi $m \leq 0$

b) Khi $m \leq 0$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 3]$ là $3m + 9$

c) Khi $\frac{9}{4} \leq m \leq 36$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \frac{36}{x+1}$ trên $[0; 3]$ là $-m + 12\sqrt{m}$

d) Có đúng một giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \frac{36}{x+1}$ trên $[0; 3]$ bằng 20.

Lời giải

Ta có $y' = m - \frac{36}{(x+1)^2}$.

Với $m \leq 0$, hàm số nghịch biến trên $[0; 3]$ nên $\min_{x \in [0; 3]} y = y(3) = 3m + 9$

Suy ra $3m + 9 = 20 \Leftrightarrow m = \frac{11}{3}$ (không thỏa mãn)

Với $m > 0$, ta có: $y' = \frac{m(x+1)^2 - 36}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x + 1 = \pm \frac{6}{\sqrt{m}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \frac{6}{\sqrt{m}} \\ x = -1 - \frac{6}{\sqrt{m}} \text{ (loại)} \end{cases}$

Khi $0 \leq -1 + \frac{6}{\sqrt{m}} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{9}{4} \leq m \leq 36$, ta có bảng biến thiên của hàm số:

x	0	$-1 + \frac{6}{\sqrt{m}}$	3
y'	-	0	+
y	36	$-m + 12\sqrt{m}$	$3m + 9$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $\min_{x \in [0; 3]} y = y\left(-1 + \frac{6}{\sqrt{m}}\right) = -m + 12\sqrt{m} = 20 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} m = 4 \\ m = 100 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Khi $-1 + \frac{6}{\sqrt{m}} > 3 \Leftrightarrow m < \frac{9}{4}$, ta có bảng biến thiên của hàm số:

x	0	3
y'	-	-
y	36	$3m + 9$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $\min_{x \in [0; 3]} y = y(3) = 3m + 9 = 20 \Leftrightarrow m = \frac{11}{9}$ (loại).

Vậy giá trị nhỏ nhất bằng 20 khi $m = 4$.

a) Đúng: Hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn $[0; 3]$ khi $m \leq 0$

b) Đúng: Khi $m \leq 0$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 3]$ là $3m + 9$

c) Đúng: Khi $\frac{9}{4} \leq m \leq 36$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \frac{36}{x+1}$ trên $[0; 3]$ là $-m + 12\sqrt{m}$

d) Sai: Có đúng một giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \frac{36}{x+1}$ trên $[0; 3]$ bằng 20.



Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{x^2+mx-1}{x+m}$, với m là tham số thực dương

- Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$
- Trên đoạn $[2; 4]$ thì đạo hàm của hàm số luôn nhận giá trị dương
- Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[2; 4]$ là $\min_{[2;4]} y = y(2)$
- Chỉ có duy nhất một giá trị của tham số m để $\min_{[2;4]} y = \frac{9}{5}$

Lời giải

- Sai: Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$
- Đúng: Trên đoạn $[2; 4]$ thì đạo hàm của hàm số luôn nhận giá trị dương

Với $m > 0$ ta có $y' = \frac{x^2+2mx+m^2+1}{(x+m)^2} > 0, \forall x \in [2; 4]$

Do đó $\min_{[2;4]} y = y(2) = \frac{2m+3}{m+2} = \frac{9}{5} \Leftrightarrow m = 3$

- Sai: Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[2; 4]$ là $\min_{[2;4]} y = y(4)$
- Đúng: Chỉ có duy nhất một giá trị của tham số m để $\min_{[2;4]} y = \frac{9}{5}$ là $m = 3$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = ax^3 - 4(a+2)x + 1$ với a là tham số. Nếu $\max_{-\infty;0} f(x) = f(-2)$ thì $\max_{[0;3]} f(x)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = 3ax^2 - 4(a+2)$

Khi đó: $\max_{-\infty;0} f(x) = f(-2) \Rightarrow f'(-2) = 0 \Leftrightarrow 12a - 4(a+2) = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

Suy ra $f(x) = x^3 - 12x + 1; f'(x) = 3x^2 - 12; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(-2)$		-13	$+\infty$

Vậy với $a = 1$ thì hàm số đạt $\max_{-\infty;0} f(x) = f(-2)$ và khi đó $\max_{[0;3]} f(x) = 1$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = x^3 + (1+m^2)x + 1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 1]$ không vượt quá 7. Số phần tử nguyên của S là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $f(x) = x^3 + (1+m^2)x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 1 + m^2 > 0, x \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số đồng biến trên $[0; 1]$

$\max_{[0;1]} f(x) = f(1) = m^2 + 3$. Yêu cầu bài toán tương đương $m^2 + 3 \leq 7 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$.

Vậy $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ hay S có 5 phần tử.

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x) = |4x - m| - x^2$ đạt giá trị lớn nhất



bằng 5?

Lời giải

Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 5 thì $|4x - m| - x^2 \leq 5 \Leftrightarrow |4x - m| \leq x^2 + 5$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - m \leq x^2 + 5, \forall x \in \mathbb{R} \\ 4x - m \geq -x^2 - 5, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -x^2 + 4x - 5, \forall x \in \mathbb{R} \\ m \leq x^2 + 4x + 5, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq 1 \end{cases}.$$

Do đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ bằng 5 $\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{-1; 1\}$.

Vậy có 2 giá trị m cần tìm.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{2\sqrt{x+1}+m}{\sqrt{x+1}+4}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 8]$ nhỏ hơn 3. Số phần tử của tập S là bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot \frac{8-m}{(\sqrt{x+1}+4)^2}.$$

Trường hợp 1: Nếu $m < 8 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(-1; 8)$.

$$\Rightarrow \max_{[-1;8]} f(x) = f(8) = \frac{6+m}{7} < 3 \Leftrightarrow m < 15 \text{ mà } m < 8; m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}.$$

Trường hợp 2: Nếu $m > 8 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(-1; 8)$

$$\Rightarrow \max_{[-1;8]} f(x) = f(-1) = \frac{m}{4} < 3 \Leftrightarrow m < 12 \text{ mà } m > 8; m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m \in \{9; 10; 11\}.$$

Trường hợp 3: Nếu $m = 8 \Rightarrow f(x) = 2 \Rightarrow \max_{[-1;8]} f(x) = 2 < 3$ (thỏa mãn) $\Rightarrow m = 8$ thỏa mãn.

Vậy có 11 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x-m}{x+1}$. Tìm m để $\max_{[1;2]} f(x) + \min_{[1;2]} f(x) = -8$.

Lời giải

$$\text{Đạo hàm: } y' = \frac{1+m}{(x+1)^2}.$$

Do hàm số $y = f(x) = \frac{x-m}{x+1}$ chỉ đồng biến hoặc nghịch biến trên $[1; 2]$ khi $m \neq -1$.

$$\text{Do đó } \max_{[1;2]} f(x) + \min_{[1;2]} f(x) = -8$$

$$\Leftrightarrow y(1) + y(2) = -8 \Leftrightarrow \frac{1-m}{2} + \frac{2-m}{3} = -8 \Leftrightarrow 3(1-m) + 2(2-m) = -48 \Leftrightarrow m = 11$$

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2020; 2020]$ để biểu thức $y = 4x^2\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2} + 4mx^3 - 3mx + m^2$ có giá trị lớn nhất không nhỏ hơn 5?

Lời giải

$$\text{Điều kiện } 1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

$$\text{Ta có } y = -4(1-x^2)\sqrt{1-x^2} + 3\sqrt{1-x^2} + m(4x^3 - 3x) + m^2.$$

$$\text{Đặt } x = \cos t; t \in [0; \pi] \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = |\sin t| = \sin t.$$



Biểu thức y có dạng

$$g(t) = 3 \sin t - 4 \sin^3 t + m(4 \cos^3 t - 3 \cos t) + m^2 = \sin 3t + m \cos 3t + m^2 \leq \sqrt{1+m^2} + m^2.$$

Giá trị lớn nhất của y là $M = \sqrt{1+m^2} + m^2 \geq 5 \Leftrightarrow m^2 + 1 + \sqrt{1+m^2} - 6 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+m^2} \geq 2 \\ \sqrt{1+m^2} \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 \geq 3 \Leftrightarrow |m| \geq \sqrt{3}.$$

Do m nguyên thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ nên $m \in \{\pm 2; \pm 3; \pm 4; \dots; \pm 2020\}$.

Vậy có 4038 số nguyên m thỏa mãn đề bài.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{3-m\sqrt{3}\cos x}{\sin x+2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2025; 2025]$ để giá trị lớn nhất của hàm số lớn hơn 4?

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $\forall x \in \mathbb{R}$ do $\sin x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y = \frac{3-m\sqrt{3}\cos x}{\sin x+2} \Leftrightarrow y \sin x + 2y = 3 - m\sqrt{3}\cos x \Leftrightarrow y \sin x + m\sqrt{3}\cos x = 3 - 2y.$$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $y^2 + (m\sqrt{3})^2 \geq (3 - 2y)^2$

$$\Leftrightarrow y^2 - 4y + 3 - m^2 \leq 0 \Leftrightarrow (y - 2)^2 \leq m^2 + 1 \Leftrightarrow |y - 2| \leq \sqrt{m^2 + 1} \Leftrightarrow -\sqrt{m^2 + 1} \leq y - 2 \leq \sqrt{m^2 + 1} \Leftrightarrow 2 - \sqrt{m^2 + 1} \leq y \leq 2 + \sqrt{m^2 + 1}.$$

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số đã cho bằng $2 + \sqrt{m^2 + 1}$.

$$\text{Ta có } 2 + \sqrt{m^2 + 1} > 4 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 1} > 2 \Leftrightarrow m^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\sqrt{3} \\ m > \sqrt{3} \end{cases}.$$

Vì m là số nguyên thuộc đoạn $[-2022; 2022]$

nên $m \in \{-2025; -2021; \dots; -3; -2; 2; 3; 4; \dots; 2025\}$.

Vậy có 4048 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{mx-m^2-2}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\max_{[-2;0]} y = \frac{-1}{3}$. Có bao nhiêu giá trị dương của m thỏa mãn điều kiện bài toán?

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = \frac{m^2-m+2}{(x-1)^2} > 0 \text{ với } \forall x \in [-2; 0]$$

$$\Rightarrow \text{hàm số } y = \frac{mx-m^2-2}{-x+1} \text{ đồng biến trên } [-2; 0] \Rightarrow \max_{[-2;0]} y = y(0) = m^2 + 2.$$

Theo đề bài ta có $\Rightarrow m^2 + 2 = 3 \Rightarrow m = \pm 1$ mà $m > 0$ nên ta nhận giá trị $m = 1$.

Vậy có 1 giá trị dương của m thỏa mãn điều kiện bài toán.

-----HẾT-----