

BÀI

02

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Công thức cộng

$$\oplus \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\oplus \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\oplus \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\oplus \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\oplus \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\oplus \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

2 Công thức nhân đôi

$$\oplus \sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\oplus \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\oplus \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\oplus \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

3 Công thức hạ bậc

$$\oplus \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\oplus \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\oplus \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

4 Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\oplus \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\oplus \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\oplus \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$

$$\oplus \cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

5 Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\oplus \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\oplus \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\oplus \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\oplus \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 2: Giá trị lượng giác của góc lượng giác

Phương pháp: Sử dụng các công thức lượng giác đã nêu ở phần lý thuyết để giải quyết bài toán

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho $\cos(a + 2b) = 2\cos a$. Chứng minh rằng: $\tan(a + b) \cdot \tan b = -\frac{1}{3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos(a + 2b) = 2\cos a \Leftrightarrow \cos[(a + b) + b] = 2\cos[(a + b) - b]$$

$$\Leftrightarrow 3\sin(a + b) \cdot \sin b = -\cos(a + b) \cdot \cos b \Leftrightarrow \tan(a + b) \cdot \tan b = -\frac{1}{3}.$$

Bài tập 2: Cho tam giác ABC , chứng minh rằng:

a) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ (với điều kiện tam giác ABC không vuông);

b) $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1$

Lời giải

a) Do $A + B = \pi - C$ nên $\tan(A + B) = -\tan C \Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$

$$\Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C.$$

b) Do $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ nên $\tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \cot \frac{C}{2} \Leftrightarrow \frac{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}} = \frac{1}{\tan \frac{C}{2}}$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1.$$

Bài tập 3: Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

a) $\sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

b) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha$

c) $\sin \alpha (2\cos 4\alpha + 2\cos 2\alpha + 1) = \sin 5\alpha$

d) $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{1 + \tan \alpha \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

Lời giải

a) $\sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha) = (\sin 60^\circ \cos \alpha + \cos 60^\circ \sin \alpha) - (\sin 60^\circ \cos \alpha - \cos 60^\circ \sin \alpha)$

$$= 2\cos 60^\circ \sin \alpha = 2 \cdot \frac{1}{2} \sin \alpha = \sin \alpha$$

$$b) \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4\alpha) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha$$

$$c) \sin \alpha (2 \cos 4\alpha + 2 \cos 2\alpha + 1) = 2 \sin \alpha \cos 4\alpha + 2 \sin \alpha \cos 2\alpha + \sin \alpha$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} [\sin(-3\alpha) + \sin 5\alpha] + 2 \cdot \frac{1}{2} [\sin(-\alpha) + \sin 3\alpha] + \sin \alpha$$

$$= (-\sin 3\alpha + \sin 5\alpha) + (-\sin \alpha + \sin 3\alpha) + \sin \alpha = \sin 5\alpha$$

$$d) \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\cos \alpha \cos \beta (1 + \tan \alpha \tan \beta)}{\cos \alpha \cos \beta (1 - \tan \alpha \tan \beta)} = \frac{1 + \tan \alpha \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

Bài tập 4: Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} \quad b) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} \quad c) \frac{\sin^2 \alpha}{4 - 4\sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

Lời giải

$$a) \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} = \frac{\sin \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos \alpha + 2\cos^2 \alpha - 1} = \frac{\sin \alpha (1 + 2\cos \alpha)}{\cos \alpha (1 + 2\cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha;$$

$$b) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \frac{-2\sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{2\alpha}{2}}{\frac{\pi}{2} \cos \frac{2\alpha}{2}} = -\frac{\sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha}{\cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha} = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$c) \frac{\sin^2 \alpha}{4 - 4\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2}{4\left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{4\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{4\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

Bài tập 5: Chứng minh đẳng thức sau:

$$a) \sin^4 a + \cos^4 a = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4a. \quad b) \cos a - \sin a = \sqrt{2} \cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$c) \sin a + \sqrt{3} \cos a = 2 \sin\left(a + \frac{\pi}{3}\right).$$

Lời giải

$$a) \sin^4 a + \cos^4 a = (\sin^2 a + \cos^2 a)^2 - 2\sin^2 a \cos^2 a = 1 - 2(\sin a \cos a)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos 4a}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 4a = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4a$$

b) Ta có: $\sqrt{2} \cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\cos a \cos \frac{\pi}{4} - \sin a \sin \frac{\pi}{4} \right)$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos a - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin a \right) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos a - \sin a) = \cos a - \sin a$$

c) Ta có: $2 \sin\left(a + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \left(\sin a \cos \frac{\pi}{3} + \cos a \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} \sin a + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos a \right) = \sin a + \sqrt{3} \cos a.$

Bài tập 6: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Lời giải

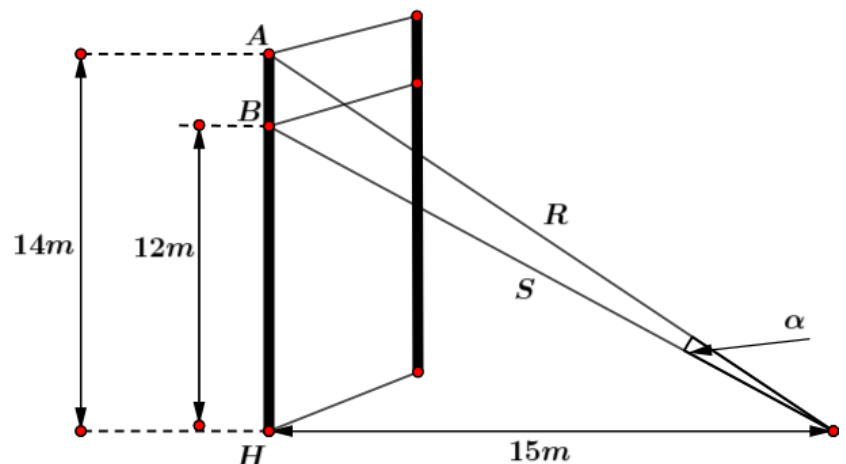
Ta có: $VT = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}.$

Mặt khác, trong tam giác ABC ta có: $A+B+C=\pi$ nên $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}.$

Từ đó suy ra: $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}, \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2}.$

Vậy $VT = 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2}$
 $= 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) = 4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = VP$

Bài tập 7: Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14 m. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12 m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m.



Lời giải

a) Ta có: $\alpha = AOH - BOH.$

Trong tam giác vuông AOH ta có: $\tan AOH = \frac{AH}{OH} = \frac{14}{15}.$

Trong tam giác vuông BOH ta có: $\tan BOH = \frac{BH}{OH} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

$$\text{Vậy } \tan \alpha = \tan(AOH - BOH) = \frac{\tan AOH - \tan BOH}{1 + \tan AOH \cdot \tan BOH} = \frac{\frac{14}{15} - \frac{4}{5}}{1 + \frac{14}{15} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{10}{131}.$$

b) Từ kết quả câu a ta có: $\alpha \approx 4^\circ$.

Bài tập 8: Trong vật lí thì phương trình tổng quát của một vật dao động điều hòa cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hòa có phương trình:

$$x_1(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) (\text{cm}); x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) (\text{cm})$$

Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2 \left[2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right) \cos \frac{\pi}{4} \right] = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

Biên độ là $A = 2\sqrt{2}$ và pha ban đầu là $\varphi = -\frac{\pi}{12}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 - \sin a - \cos 2a}{\sin 2a - \cos a}$.

- A. 1. B. $\tan \alpha$. C. $\frac{5}{2}$. D. $2 \tan \alpha$.

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \frac{1 - \sin a + 2 \sin^2 a - 1}{2 \sin a \cdot \cos a - \cos a} = \frac{\sin a (2 \sin a - 1)}{\cos a (2 \sin a - 1)} = \frac{\sin a}{\cos a} = \tan a.$$

Câu 2: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin x + \sin \frac{x}{2}}{1 + \cos x + \cos \frac{x}{2}}$ được:

- A. $\tan \frac{x}{2}$. B. $\cot x$. C. $\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$. D. $\sin x$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin x = \sin \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}; 1 + \cos x = 1 + \cos \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right) = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\text{Do đó } A = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2} \left(2 \cos \frac{x}{2} + 1 \right)}{\cos \frac{x}{2} \left(2 \cos \frac{x}{2} + 1 \right)} = \tan \frac{x}{2}.$$

Câu 3: Rút gọn biểu thức $A = \sin \alpha \cdot \cos^5 \alpha - \sin^5 \alpha \cdot \cos \alpha$.

- A. $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$. B. $-\frac{1}{2} \sin 4\alpha$. C. $\frac{3}{4} \sin 4\alpha$. D. $\frac{1}{4} \sin 4\alpha$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin \alpha \cdot \cos^5 \alpha - \sin^5 \alpha \cdot \cos \alpha &= \sin \alpha \cdot \cos \alpha (\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha. \end{aligned}$$

Câu 4: Biểu thức $M = \cos(-53^\circ) \cdot \sin(-337^\circ) + \sin(307^\circ) \cdot \sin(113^\circ)$ có giá trị bằng:

- A. $-\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Ấn máy tính được đáp án A.

Câu 5: Rút gọn biểu thức: $\sin(a - 17^\circ) \cdot \cos(a + 13^\circ) - \sin(a + 13^\circ) \cdot \cos(a - 17^\circ)$, ta được

- A. $\sin 2a$. B. $\cos 2a$. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sin(a - 17^\circ) \cdot \cos(a + 13^\circ) - \sin(a + 13^\circ) \cdot \cos(a - 17^\circ) &= \sin[(a - 17^\circ) - (a + 13^\circ)] \\ &= \sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Câu 6: Giá trị của biểu thức $\cos \frac{37\pi}{12}$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. C. $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\cos \frac{37\pi}{12} &= \cos \left(2\pi + \pi + \frac{\pi}{12} \right) = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{12} \right) = -\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = -\cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= -\left(\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Câu 7: Rút gọn biểu thức: $\cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) - \cos x$ ta được kết quả là

- A. 0. B. $-\cos x$. C. $-2\cos x$. D. $\sin x - \cos x$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) - \cos x &= -\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \cos x \\ &= -2\cos x.\end{aligned}$$

Câu 8: Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. $2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$. B. $\cos 2a = 2\cos a - 1$.
C. $\sin 2a = 2\sin a \cos a$. D. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cdot \cos a$.

Lời giải

Có $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

Câu 9: Gọi $M = \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ$ thì:

- A. $M = 1$. B. $M = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = 0$.

Lời giải

$$\begin{aligned}M &= \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ = (\cos^2 15^\circ)^2 - (\sin^2 15^\circ)^2 = (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)(\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) \\ &= \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos(2 \cdot 15^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Câu 10: Giá trị đúng của $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Sử dụng máy tính dễ dàng có được đáp án B.

Câu 11: Cho hai góc nhọn a và b . Biết $\cos a = \frac{1}{3}$, $\cos b = \frac{1}{4}$.

Giá trị $\cos(a + b) \cdot \cos(a - b)$ bằng

- A. $-\frac{113}{144}$. B. $-\frac{115}{144}$. C. $-\frac{117}{144}$. D. $-\frac{119}{144}$.

Lời giải

$$\cos(a+b).\cos(a-b) = \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2b) = \cos^2 a + \cos^2 b - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{119}{144}$$

Câu 12: Nếu biết $\sin a = \frac{8}{17}$, $\tan b = \frac{5}{12}$ và a, b đều là các góc nhọn và dương thì $\sin(a-b)$ là:

- A. $\frac{20}{220}$. B. $-\frac{20}{220}$. C. $\frac{21}{221}$. D. $\frac{22}{221}$.

Lời giải

Ta có a, b đều là các góc nhọn và dương.

$$\sin a = \frac{8}{17} \Rightarrow \cos a = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \frac{15}{17}.$$

$$\tan b = \frac{5}{12} \Rightarrow \cos b = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{25}{144}}} = \frac{12}{13} \Rightarrow \sin b = \tan b \cdot \cos b = \frac{5}{13}.$$

$$\Rightarrow \sin(a-b) = \frac{8}{17} \cdot \frac{12}{13} - \frac{15}{17} \cdot \frac{5}{13} = \frac{21}{221}.$$

Câu 13: Nếu $\tan x = 0.5$; $\sin y = \frac{3}{5}$ ($0 < y < 90^\circ$) thì $\tan(x+y)$ bằng:

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Lời giải

$$\tan x = 0.5 = \frac{1}{2}, \sin y = \frac{3}{5} \quad (0 < y < 90^\circ) \Rightarrow \cos y = \frac{4}{5} \Rightarrow \tan y = \frac{3}{4}.$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}} = 2.$$

Câu 14: Gọi $M = \tan x - \tan y$ thì:

- A. $M = \tan(x-y)$. B. $M = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$. C. $M = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$. D. $M = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } M = \tan x - \tan y = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}.$$

Câu 15: Gọi $M = \cos(a+b).\cos(a-b) - \sin(a+b).\sin(a-b)$ thì:

- A. $M = 1 - 2\cos^2 a$. B. $M = 1 - 2\sin^2 a$. C. $M = \cos 4a$. D. $M = \sin 4a$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } M &= \cos(a+b).\cos(a-b) - \sin(a+b).\sin(a-b) \\ &= \cos(a+b+a-b) = \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a. \end{aligned}$$

Câu 16: Nếu $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ thì $\sin 2x$ bằng

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{-3}{4}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin x + \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{-3}{4}$$

Câu 17: Biết $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Giá trị của $P = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$ là

- A. $P = 0$. B. $P = -1$. C. $P = \frac{1}{2}$. D. $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{2}.$$

$$\text{Từ } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha < 0 \text{ nên } \cos \alpha = -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } P &= \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2\alpha \cos \frac{\pi}{3} + \sin 2\alpha \sin \frac{\pi}{3} \\ &= (2\cos^2 \alpha - 1) \cdot \frac{1}{2} + 2\sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} + \sqrt{3} \sin \alpha \cos \alpha = -1. \end{aligned}$$

Câu 18: Biểu thức $\frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng:

- A. $\sin 2\alpha$. B. $\cos 2\alpha$. C. $\tan 2\alpha$. D. $\cot 2\alpha$.

Lời giải

$$\frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha} = \frac{2\sin^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)}{2\cos 2\alpha (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)} = \tan 2\alpha.$$

Câu 19: Biểu thức $\frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng:

- A. $-\tan^4 \alpha$. B. $\tan^4 \alpha$. C. $-\cot^4 \alpha$. D. $\cot^4 \alpha$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} &= \frac{3 - 4(1 - 2\sin^2 \alpha) + 2(1 - 2\sin^2 \alpha)^2 - 1}{3 + 4(2\cos^2 \alpha - 1) + 2(2\cos^2 \alpha - 1)^2 - 1} \\ &= \frac{8\sin^2 \alpha - 8\sin^2 \alpha + 8\sin^4 \alpha}{8\cos^2 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 8\cos^4 \alpha} = \tan^4 \alpha. \end{aligned}$$

Câu 20: Khi $\alpha = \frac{\pi}{6}$ thì biểu thức $\frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha}$ có giá trị bằng.

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{1}{9}$.

D. $\frac{1}{12}$.

Lời giải

$$\frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha} = \frac{4\sin^4 \alpha}{4(1 - \sin^2 \alpha) - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha(1 - \sin^2 \alpha)} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \tan^4 \alpha \Rightarrow \text{BT} = \tan^4 \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{9}.$$

Câu 21: Nếu $\tan \frac{x}{2} = \frac{a}{b}$ thì biểu thức $a \sin x + b \cos x$ bằng:

A. a .

B. b .

C. $\frac{a+b}{a}$.

D. $\frac{a+b}{b}$.

Lời giải

Đặt $t = \tan \frac{x}{2} = \frac{a}{b}$ nên $\sin x = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\frac{a}{b}}{1+\frac{a^2}{b^2}} = \frac{2ab}{a^2+b^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-\frac{a^2}{b^2}}{1+\frac{a^2}{b^2}} = \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$.

Vậy $a \sin x + b \cos x = \frac{2a^2b}{a^2+b^2} + \frac{b^3-a^2b}{a^2+b^2} = b$.

Câu 22: Nếu $\tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ thì giá trị của biểu thức $\frac{\sin x}{2-3\cos x}$ bằng.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Đặt $t = \tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ nên $\sin x = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$.

Vậy $\frac{\sin x}{2-3\cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{2-\frac{9}{5}} = 4$.

Câu 23: Biết $\sin x = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < x < 180^\circ$ thì biểu thức $\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}$ có giá trị bằng:

A. $2\sqrt{2}$.

B. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

C. $-2\sqrt{2}$.

D. $\frac{-1}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải

Ta có: $\sin x = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < x < 180^\circ$.

$\Rightarrow \cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = \frac{7}{9}$

Thay vào biểu thức ta được:
$$\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x} = \frac{1 - \frac{4\sqrt{2}}{9} + \frac{7}{9}}{1 - \frac{4\sqrt{2}}{9} - \frac{7}{9}} = -2\sqrt{2}.$$

Câu 24: Rút gọn biểu thức $P = \cos(120^\circ + x) + \cos(120^\circ - x) - \cos x$ ta được kết quả là:

- A. 0. B. $-\cos x$. C. $-2\cos x$. D. $\sin x - \cos x$.

Lời giải

Ta có: $P = 2\cos 120^\circ \cos x - \cos x = -\cos x - \cos x = -2\cos x$.

Câu 25: Tích số $\cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$ bằng

- A. $\frac{1}{16}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $\frac{3}{16}$. D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ &= \cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \frac{1}{2}(\cos 120^\circ + \cos 20^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(-\frac{\cos 10^\circ}{2} + \frac{\cos 30^\circ + \cos 10^\circ}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{16}. \end{aligned}$$

Câu 26: Cho biểu thức $A = \sin^2(a+b) - \sin^2 a - \sin^2 b$. Hãy chọn kết quả đúng

- A. $A = 2\cos a \cdot \sin b \cdot \sin(a+b)$. B. $A = 2\sin a \cdot \cos b \cdot \cos(a+b)$.
 C. $A = 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos(a+b)$. D. $A = 2\sin a \cdot \sin b \cdot \cos(a+b)$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \sin^2(a+b) - \sin^2 a - \sin^2 b = \sin^2(a+b) - \frac{1 - \cos 2a}{2} - \frac{1 - \cos 2b}{2} \\ &= \sin^2(a+b) - 1 + \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2b) = -\cos^2(a+b) + \cos(a+b)\cos(a-b) \\ &= \cos(a+b)[\cos(a-b) - \cos(a+b)] = 2\sin a \sin b \cos(a+b). \end{aligned}$$

Câu 27: Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC , khi đó.

- A. $\sin C = -\sin(A+B)$. B. $\cos C = \cos(A+B)$.
 C. $\tan C = \tan(A+B)$. D. $\cot C = -\cot(A+B)$.

Lời giải

Vì A, B, C là các góc của tam giác ABC nên $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - (A + B)$.

Do đó C và $(A + B)$ là 2 góc bù nhau.

$$\Rightarrow \sin C = \sin(A + B); \cos C = -\cos(A + B); \tan C = -\tan(A + B); \cot C = -\cot(A + B).$$

Câu 28: Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC , khi đó.

Tư vấn hướng nghiệp cho học sinh bằng phân tích nhân tướng học – xem chỉ tay – tử vi

A. $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$.

B. $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = -\cos\frac{C}{2}$.

C. $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$.

D. $\cot\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$.

Lời giải

Vì A, B, C là các góc của tam giác ABC nên $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - (A + B)$.

$\Rightarrow \frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{A+B}{2}$. Do đó $\frac{C}{2}$ và $\frac{A+B}{2}$ là 2 góc phụ nhau.

$\Rightarrow \sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A+B}{2}; \cos\frac{C}{2} = \sin\frac{A+B}{2}; \tan\frac{C}{2} = \cot\frac{A+B}{2}; \cot\frac{C}{2} = \tan\frac{A+B}{2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Không dùng máy tính cầm tay. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\sin\frac{19\pi}{24}\cos\frac{37\pi}{24} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$

b) $\cos\frac{41\pi}{12} - \cos\frac{13\pi}{12} = \sqrt{2}$

c) $\frac{\tan\frac{\pi}{7} + \tan\frac{3\pi}{28}}{1 + \tan\frac{6\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{28}} = 2$.

d) $\sin\frac{\pi}{9} - \sin\frac{5\pi}{9} + \sin\frac{7\pi}{9} = 0$

Lời giải

a) Đúng: $\sin\frac{19\pi}{24}\cos\frac{37\pi}{24} = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{19\pi}{24} - \frac{37\pi}{24}\right) + \sin\left(\frac{19\pi}{24} + \frac{37\pi}{24}\right)\right]$
 $= \frac{1}{2}\left[\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\frac{7\pi}{3}\right] = \frac{1}{2}\left(-\sin\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\right)$
 $= \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$

b) Sai: $\cos\frac{41\pi}{12} - \cos\frac{13\pi}{12} = -2\sin\frac{\frac{41\pi}{12} + \frac{13\pi}{12}}{2}\sin\frac{\frac{41\pi}{12} - \frac{13\pi}{12}}{2} = -2\sin\frac{9\pi}{4}\sin\frac{7\pi}{6}$
 $= 2\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Sai: $\frac{\tan\frac{\pi}{7} + \tan\frac{3\pi}{28}}{1 + \tan\frac{6\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{28}} = \frac{\tan\frac{\pi}{7} + \tan\frac{3\pi}{28}}{1 + \tan\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)\tan\frac{3\pi}{28}} = \frac{\tan\frac{\pi}{7} + \tan\frac{3\pi}{28}}{1 - \tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{28}} = \tan\left(\frac{\pi}{7} + \frac{3\pi}{28}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

$$\begin{aligned} \text{d) Đúng: } \sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9} &= \left(\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9} \right) - \sin \frac{5\pi}{9} \\ &= 2 \sin \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{9} = \sin \frac{4\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} = 0. \end{aligned}$$

Câu 2: Cho $\cos \alpha = \frac{11}{61}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = -\frac{60}{61}$

b) $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{71}{49}$

c) $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\tan\left(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha\right) = -\frac{4799}{2159}$

Lời giải

a) Sai: Vì $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ nên $\sin \alpha < 0$.

$$\text{Do đó, } \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{11}{61}\right)^2} = -\frac{60}{61}.$$

$$\text{Suy ra } \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{6} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{6} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{61} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{60}{61}\right) = \frac{11 + 60\sqrt{3}}{122}.$$

b) Đúng: Ta có $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{60}{61}}{\frac{11}{61}} = -\frac{60}{11}.$

$$\text{Do đó } \cot\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}}{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1 - \left(-\frac{60}{11}\right) \cdot 1}{\left(-\frac{60}{11}\right) + 1} = -\frac{71}{49}.$$

c) Sai: Ta có $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \left(\frac{11}{61}\right)^2 - 1 = -\frac{3479}{3721};$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \left(-\frac{60}{61}\right) \cdot \frac{11}{61} = -\frac{1320}{3721}.$$

$$\Rightarrow \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2\alpha \cos \frac{\pi}{3} - \sin 2\alpha \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{3479}{3721} \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{1320}{3721}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-3479 + 1320\sqrt{3}}{7442}.$$

d) Đúng: Ta có $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{-\frac{1320}{3721}}{-\frac{3479}{3721}} = \frac{1320}{3479}.$

$$\text{Suy ra } \tan\left(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha\right) = \frac{\tan\frac{3\pi}{4} - \tan 2\alpha}{1 + \tan\frac{3\pi}{4} \tan 2\alpha} = \frac{-1 - \frac{1320}{3479}}{1 + (-1) \cdot \frac{1320}{3479}} = -\frac{4799}{2159}.$$

Câu 3: Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\sin x \cos^5 x - \cos x \sin^5 x = \sin 4x$

b) $\frac{\sin 3x \cos 2x + \sin x \cos 6x}{\sin 4x} = \cos 3x;$

c) $\frac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x} = \cot 2x$

d) $\frac{2\sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} - \tan y = 1.$

Lời giải

a) $\sin x \cos^5 x - \cos x \sin^5 x = \sin x \cos x (\cos^4 x - \sin^4 x)$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x (\cos^2 x - \sin^2 x) (\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

b) $\frac{\sin 3x \cos 2x + \sin x \cos 6x}{\sin 4x} = \frac{\frac{1}{2}(\sin x + \sin 5x) + \frac{1}{2}[\sin(-5x) + \sin 7x]}{\sin 4x}$

$$= \frac{\sin x + \sin 5x - \sin 5x + \sin 7x}{2 \sin 4x} = \frac{\sin x + \sin 7x}{2 \sin 4x} = \frac{2 \sin 4x \cos 3x}{2 \sin 4x} = \cos 3x;$$

c) $\frac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x} = \frac{(\cos x + \cos 3x) - \cos 2x}{(\sin x + \sin 3x) - \sin 2x} = \frac{2 \cos 2x \cos x - \cos 2x}{2 \sin 2x \cos x - \sin 2x}$

$$= \frac{\cos 2x (2 \cos x - 1)}{\sin 2x (2 \cos x - 1)} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \cot 2x;$$

d) $\frac{2 \sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} - \tan y = \frac{2(\sin x \cos y + \cos x \sin y)}{2 \cos x \cos y} - \tan y$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} - \tan y = \tan x + \tan y - \tan y = \tan x.$$

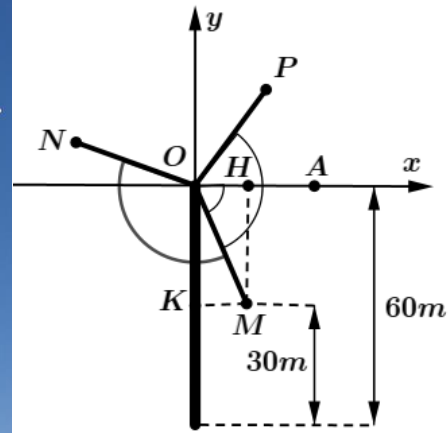
Câu 4: Trong hình vẽ dưới đây, ba điểm M, N, P nằm ở đầu các cánh quạt của tuabin gió. Biết các cánh quạt dài 31 m, độ cao của điểm M so với mặt đất là 30 m, góc giữa các cánh quạt là $\frac{2\pi}{3}$ và số góc (OA, OM) là α . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{61}}{31}$

b) Giá trị sin của góc lượng giác (OA, ON) là một số âm

c) Chiều cao của các điểm N và P so với mặt đất (theo đơn vị mét) khoảng 89,76 m.

d) Chiều cao của các điểm P so với mặt đất (theo đơn vị mét) khoảng 52,87 m.



Lời giải

Từ điểm M kẻ MH vuông góc với Ox , MK vuông góc với Oy .

Ta có: $MH = 60 - 30 = 30$ m khi đó hoành độ điểm M là 30.

Mặt khác hoành độ điểm M là: $x_M = 31 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{30}{31} \Rightarrow \sin \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{30}{31}\right)^2} = -\frac{\sqrt{61}}{31}$

Vì các cánh quạt tạo thành 3 góc bằng nhau nên $MOP = NOP = MON = 120^\circ$

$\Rightarrow AOP = MOP - MOA \Rightarrow \sin AOP = \sin(MOP - MOA)$

$= \sin MOP \cdot \cos MOA - \cos MOP \cdot \sin MOA = \sin \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \alpha - \cos \frac{2\pi}{3} \cdot \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{30}{31} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{61}}{31} \approx 0,96$.

Vì vậy chiều cao của điểm P so với mặt đất khoảng: $31 \cdot \sin \alpha + 60 = 89,76$ (m)

Ta có: $\cos AOP \approx \sqrt{1 - 0,96^2} = 0,28$ suy ra $AON = AOP + PON$

$\Rightarrow \sin AON = \sin(AOP + PON) = \sin AOP \cdot \cos PON + \cos AOP \cdot \sin PON$

$= 0,96 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} - 0,28 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = 0,96 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0,28 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,23$.

$\Rightarrow \sin(OA, ON) = \sin AON \approx -0,23$.

Vì vậy chiều cao của điểm N so với mặt đất khoảng: $31 \cdot \sin \alpha + 60 = 52,87$ (m)

a) Đúng: $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{61}}{31}$

b) Đúng: Giá trị sin của các góc lượng giác (OA, ON) là một số âm

c) Sai: Chiều cao của các điểm N và P so với mặt đất (theo đơn vị mét) khoảng 52,87 m.

d) Sai: Chiều cao của các điểm P so với mặt đất (theo đơn vị mét) khoảng 89,76 m.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để $\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \right) = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\text{Vì } -1 \leq \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 \text{ nên } -\sqrt{2} \leq \sin \alpha + \cos \alpha \leq \sqrt{2}. \text{ Suy ra } -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Ta lại có } (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + \sin 2\alpha.$$

$$\text{Suy ra } \sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1 = m^2 - 1.$$

$$\text{Khi đó, } \sin 2\alpha = -\frac{3}{4} \text{ hay } m^2 - 1 = -\frac{3}{4} \text{ suy ra } m = \frac{1}{2} \text{ hoặc } m = -\frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Câu 2: Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \beta = \frac{12}{13}$ và $0^\circ < \alpha, \beta < 90^\circ$. Biết $P = \sin(\alpha + \beta)$ và $Q = \cos(\alpha - \beta)$. Khi đó hãy tính giá trị của $P + Q$.

Lời giải

$$\text{Vì } 0^\circ < \alpha < 90^\circ \text{ nên } \cos \alpha > 0 \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Vì } 0^\circ < \beta < 90^\circ \text{ nên } \sin \beta > 0 \Rightarrow \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}.$$

$$\text{Khi đó: } P = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{56}{65}$$

$$Q = \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{63}{65}.$$

$$\text{Suy ra giá trị biểu thức } P + Q = \frac{56}{65} + \frac{63}{65} = \frac{119}{65}$$

Câu 3: Phương trình dao động điều hoà của một vật tại thời điểm t giây được cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó $x(t)$ cm là li độ của vật tại thời điểm t giây, A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hoà có phương trình lần lượt là:

$$x_1(t) = 3 \cos \left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{3} \right) \text{ (cm)} \text{ và } x_2(t) = 3 \cos \left(\frac{\pi}{4} t - \frac{\pi}{6} \right) \text{ (cm)}$$

Tìm biên độ dao động tổng hợp trên.

Lời giải

$$\text{Ta có } x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right)$$

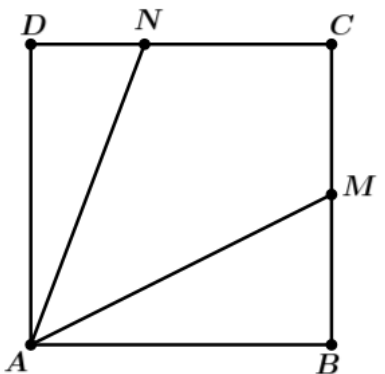
$$= 3.2\cos\frac{\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right)}{2} \cdot \cos\frac{\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right)}{2}$$

$$= 6\cos\frac{\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}}{2} \cos\frac{\frac{\pi}{2}}{2} = 3\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{12}\right).$$

$$\text{Vậy phương trình của dao động tổng hợp là } x(t) = 3\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{12}\right).$$

Dao động tổng hợp trên có biên độ là $A = 3\sqrt{2}$ (cm) và pha ban đầu là $\varphi = \frac{\pi}{12}$.

Câu 4: Trên một mảnh đất hình vuông $ABCD$ bác An đặt một chiếc đèn pin tại vị trí A chiếu chùm sáng phân kì sang phía góc C . Bác An nhận thấy góc chiếu sáng của đèn pin giới hạn bởi hai tia AM và AN mà ở đó các điểm $M \in BC$; $N \in DC$ sao cho $BM = \frac{1}{2}BC$, $DN = \frac{1}{3}DC$. Góc chiếu sáng của đèn pin bằng bao nhiêu độ?



Lời giải

$$\text{Trong tam giác vuông } ABM, \tan BAM = \frac{BM}{BA} = \frac{1}{2}.$$

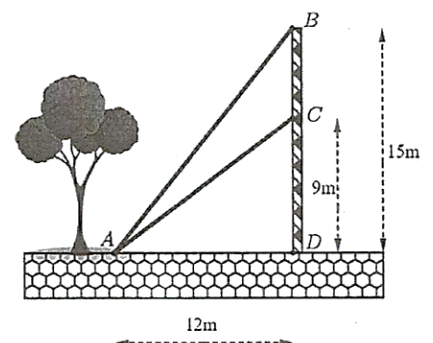
$$\text{Trong tam giác vuông } ADN, \tan DAN = \frac{DN}{DA} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Do đó: } \tan(BAM + DAN) = \frac{\tan BAM + \tan DAN}{1 - \tan BAM \tan DAN} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$$

$$\text{Do } \tan(BAM + DAN) = 1 \text{ nên } BAM + DAN = 45^\circ \Rightarrow MAN = 90^\circ - (BAM + DAN) = 45^\circ.$$

Vậy góc chiếu sáng của đèn pin bằng 45° .

Câu 5: Từ một vị trí A , người ta buộc hai sợi cáp AB và AC đến một cái trụ cao $15m$, được dựng vuông góc với mặt đất, chân trụ ở vị trí D . Biết $CD = 9m$ và $AD = 12m$. Tìm góc nhọn $\alpha = BAC$ tạo bởi hai sợi dây cáp đó, đồng thời tính gần đúng α (làm tròn đến hàng phần chục, đơn vị độ).

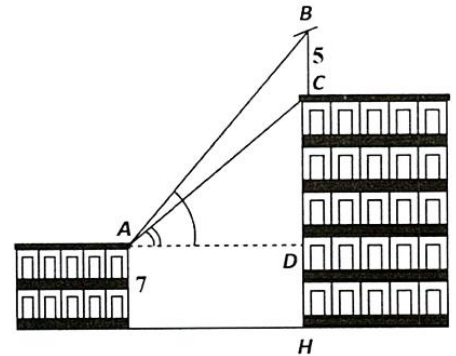


Lời giải

$$\text{Ta có: } \tan \alpha = \tan(BAD - CAD) = \frac{\tan BAD - \tan CAD}{1 + \tan BAD \tan CAD} = \frac{\frac{15}{12} - \frac{9}{12}}{1 + \frac{15}{12} \cdot \frac{9}{12}} = \frac{\frac{6}{12}}{1 + \frac{135}{144}} = \frac{8}{31} \Rightarrow \alpha \approx 14,47^\circ.$$

$$B = \frac{\sin 2x + 2\sin 3x + \sin 4x}{\cos 3x + 2\cos 4x + \cos 5x} = \frac{2\sin 3x \cos x + 2\sin 3x}{2\cos 4x \cos x + 2\cos 4x} = \frac{2\sin 3x(\cos x + 1)}{2\cos 4x(\cos x + 1)} = \frac{\sin 3x}{\cos 4x}$$

Câu 6: Trên nóc một tòa nhà có một cột ăngten cao 5 m. Từ vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăngten dưới góc α và β so với phương nằm ngang. Biết chiều cao của tòa nhà là 18,9 m, hai tòa nhà cách nhau 10 m. Tính góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).



Lời giải

Ta có: $AD = 10$ và $CD = 18,9 - 7 = 11,9$ m; $BD = BC + CD = 11,9 + 5 = 16,9$ m

$$\text{Suy ra } \tan \alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{16,9}{10} \Rightarrow \alpha = 59^\circ.$$

Câu 7: Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hoà có phương trình: $x_1(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\right)$ (cm); $x_2(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}\right)$ (cm). Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t)x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

Lời giải

$$\text{Ta có: } x(t) = x_1(t)x_2(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{aligned} &= 3 \cdot 2 \left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \right] \\ &= 6\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{24}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{24}\right) = 6\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{24}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy biên độ của dao động là } 6\cos\left(\frac{\pi}{24}\right). \text{ Pha ban đầu của chuyển động là } \frac{5\pi}{24}.$$

Câu 8: Hai sóng âm có phương trình lần lượt là $f_1(t) = C \sin \omega t$ và $f_2(t) = C \sin(\omega t + \alpha)$. Hai sóng này giao thoa với nhau tạo nên một âm kết hợp có phương trình

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = C \sin \omega t + C \sin(\omega t + \alpha).$$

Khi $C = 10, \alpha = \frac{\pi}{3}$. Hãy tìm biên độ của sóng âm kết hợp, tức là tìm hai hằng số k và φ sao cho $f(t) = k \sin(\omega t + \varphi)$.

Lời giải

Ta có: $f(t) = f_1(t) + f_2(t) = C \sin \omega t + C \sin(\omega t + \alpha) = C \sin \omega t + C(\sin \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \sin \alpha)$

Vậy $f(t) = C(1 + \cos \alpha) \sin \omega t + C \sin \alpha \cos \omega t = A \sin \omega t + B \cos \omega t$ với $\begin{cases} A = C(1 + \cos \alpha) \\ B = C \sin \alpha \end{cases}$

Khi $C = 10, \alpha = \frac{\pi}{3}$

Ta có: $f(t) = 10 \sin \omega t + 10 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) = 10.2 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \cos \frac{\pi}{6} = 10\sqrt{3} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right).$

Vậy biên độ và pha ban đầu của sóng âm kết hợp lần lượt là $k = 10\sqrt{3}, \varphi = \frac{\pi}{6}$.

-----HẾT-----