



Dạng 3: Bài toán tối ưu, thực tế liên quan đến max min

- **Bài toán chuyển động**
 - Gọi $s(t)$ là hàm quãng đường; $v(t)$ là hàm vận tốc; $a(t)$ là hàm gia tốc
 - Khi đó $s'(t) = v(t)$; $v'(t) = a(t)$
- **Bài toán thực tế - tối ưu**
 - Biểu diễn dữ kiện cần đạt max – min qua một hàm $f(t)$
 - Khảo sát hàm $f(t)$ trên miền điều kiện của hàm và suy ra kết quả.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Một chất điểm chuyển động có vận tốc tức thời $v(t)$ phụ thuộc vào thời gian t theo hàm số $v(t) = -t^4 + 24t^2 + 500$ (m/s). Trong khoảng thời gian từ $t = 0$ (s) đến $t = 5$ (s) chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm nào?

Lời giải

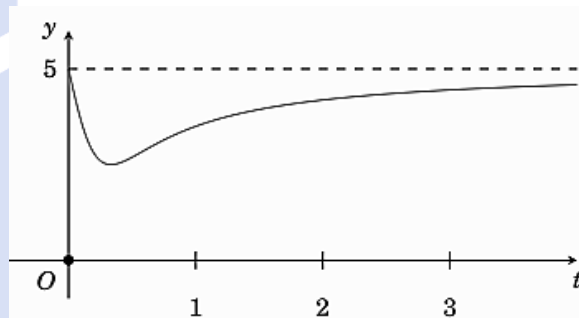
$$\text{Ta có } v'(t) = -4t^3 + 48t = -4t(t^2 - 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \pm 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0; 5]$ ta có:

$$v(0) = 500; v(2\sqrt{3}) = 664; v(5) = 475$$

Vậy vận tốc lớn nhất khi $t = 2\sqrt{3} \approx 4$ giây.

Bài tập 2: Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ ($t \geq 0$) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số có đồ thị là đường cong $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2+1}$ như hình bên. Vào các thời điểm nào nồng độ oxygen trong nước cao nhất và thấp nhất?



Lời giải

Xét hàm số $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2+1}$ trên $0; +\infty$ có $y'(t) =$

$$\frac{135t^2-15}{(9t^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$

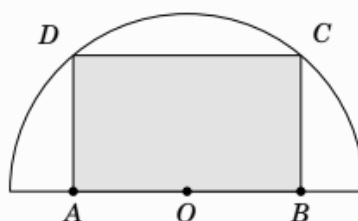
Mặt khác: $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[5 - \frac{15t}{9t^2+1} \right] = 5$ và $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[5 - \frac{15t}{9t^2+1} \right] = 5$

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$y'(t)$	-	0	+
$y(t)$	5	0	5

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min_{0; +\infty} y(t) = 0$ và $\max_{0; +\infty} y(t) = 5$

Bài tập 3: Tính diện tích lớn nhất S_{max} của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $R = 6$ cm nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp.



Lời giải

Gọi chiều dài $AD = 2x$ với $0 < x < 6 \Rightarrow AB = \sqrt{36 - x^2}$

Diện tích hình chữ nhật là $S = 2x \cdot \sqrt{36 - x^2}$ và xét hàm số $f(x) = 2x\sqrt{36 - x^2}$ trên $(0; 6)$

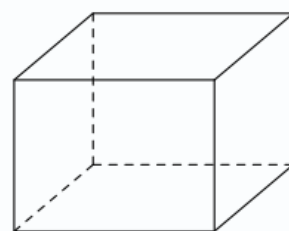
Ta có: $f'(x) = \sqrt{36 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3\sqrt{2}$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	0	$3\sqrt{2}$	6
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	36	0

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích hình chữ nhật đạt được là 36cm^2 .

Bài tập 4: Một người muốn xây một cái bể chứa nước, dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288dm^3 . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/ m^2 . Nếu người đó biết xác định các kích thước của bể hợp lý thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi người đó trả chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây dựng bể đó là bao nhiêu?



Lời giải

Gọi $x(x > 0)$ là chiều rộng của đáy bể. Khi đó chiều dài của đáy bể là $2x$ là chiều cao của bể là $\frac{0,144}{x^2}$.

Khi đó diện tích cần xây là $2x^2 + \frac{0,864}{x}$

Xét hàm số $f(x) = 2x^2 + \frac{0,864}{x}$ có $f'(x) = 4x - \frac{0,864}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0,6$

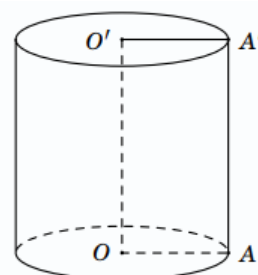
Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	0	0,6	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	2,16	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min f(x) = f(0,6) = 2,16$

Vậy chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây bể là: $500000 \cdot 2,16 = 1080000$ đồng.

Bài tập 5: Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích 1000cm^3 . Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá $1,2$ nghìn đồng/ cm^2 , trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá $0,75$ nghìn đồng/ cm^2 . Tìm các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.



Lời giải

Gọi bán kính của đáy bình là $x(\text{cm})$, $x > 0$ suy ra chiều cao là $\frac{100}{\pi \cdot x^2}(\text{cm})$

Chi phí để sản xuất một chiếc bình là: $T(x) = 2 \cdot 1,2 \cdot \pi \cdot x^2 + 0,75 \cdot \frac{2000}{x} = 2,4\pi x^2 + \frac{1500}{x}$ nghìn

Để chi phí sản xuất mỗi chiếc bình là thấp nhất thì $T(x)$ là nhỏ nhất

Xét hàm số $T(x)$ có $T'(x) = 4,8\pi x - \frac{1500}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}$ (thỏa mãn)

Bảng biến thiên:

x	0	$\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}$	12
$T'(x)$	-	0	+
$T(x)$	$+\infty$	$T\left(\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}\right)$	$T(12)$

Để chi phí sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất thì bán kính đáy của bình là $\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}$ cm và chiều cao của bình là $\frac{100}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}\right)^2}$ (cm)

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một chất điểm chuyển động với quãng đường $s(t)$ cho bởi công thức $s(t) = 6t^2 - t^3$, t (giây) là thời gian. Hỏi trong khoảng thời gian từ 0 đến 4 giây, vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (giây) bằng bao nhiêu?

A. $t = 3s$.

B. $t = 4s$.

C. $t = 2s$.

D. $t = 6s$.

Lời giải

Ta có $v(t) = s'(t) = 12t - 3t^2$; $v'(t) = 12 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Lập bảng biến thiên ta thấy $v(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = 2$ giây.

Câu 2: Trong 3 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 3 giây đầu tiên đó?

A. 13m/s.

B. 10 m/s.

C. 9 m/s.

D. 12 m/s.

Lời giải

Ta có $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t + 1$. Xét hàm số $v(t) = -3t^2 + 12t + 1$ trên đoạn $[0; 5]$

$$v'(t) = -6t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Tính các giá trị $v(0) = 1$; $v(2) = 13$; $v(3) = 10$

So sánh các giá trị ta suy ra $\max_{[0;3]} v(t) = 13$.

Câu 3: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân là bao nhiêu để huyết áp được giảm nhanh nhất?

A. 24mg.

B. 20 mg.

C. 15 mg.

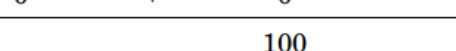
D. 10 mg.

Lời giải

Bài toán trở thành tìm $x \in [0; 30]$ để hàm số $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$ đạt giá trị lớn nhất

$$\text{Ta có: } G(x) = 0,025x^2(30 - x) \Rightarrow G'(x) = 0,025(60x - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 20 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	20	30	
$G'(x)$	0	+	0	-
$G(x)$				

Từ bảng biến thiên ta thấy $\max_{[0;30]} G(x) = G(20) = 100$

Vậy liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhanh nhất là 20mg.

Câu 4: Trong thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức:

$$N(t) = 1000 + \frac{100}{100+t^2} \text{ (con)}$$

Trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

A. 1008 con. B. 1012 con. C. 1005 con. D. 1020 con.

Lời giải

Xét hàm số $N(t) = 1000 + \frac{100}{100+t^2}$ có $N'(t) = \frac{100 \cdot (100+t^2) - 100t \cdot 2t}{(100+t^2)^2} = \frac{100(100-t^2)}{(100+t^2)^2}$

Khi đó với $t > 0$ $N'(t) = 0 \Leftrightarrow 100 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 10$

Bảng biến thiên của hàm số $N(t)$ như sau:

t	0	10	$+\infty$
$N'(t)$	+	0	-
$N(t)$	1000	1005	1000

Căn cứ vào bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(0; +\infty)$ hàm số $N(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 1005 tại $t = 10$.

Vậy số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện nuôi cấy vào môi trường dinh dưỡng là 1005 con.

Câu 5: Tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5cm có thể có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. 25cm^2 . B. $\frac{125}{4}\text{cm}^2$. C. $\frac{625}{4}\text{cm}^2$. D. 125cm^2 .

Lời giải

Gọi một cạnh góc vuông là x ($0 < x < 5$) thì cạnh góc vuông còn lại là $\sqrt{25 - x^2}$

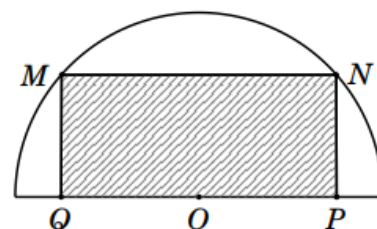
Như vậy, diện tích $S = \frac{x\sqrt{25-x^2}}{2}$. Đặt $f(x) = 25x^2 - x^4$

Ta có $f'(x) = 50x - 4x^3$. Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

Vì vậy $\max_{(0;5)} f(x) = f\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{625}{4}$

Vậy tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5cm có thể có diện tích lớn nhất bằng $\frac{625}{4}\text{cm}^2$.

Câu 6: Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính $R = 3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (hình vẽ bên). Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là



A. $\frac{9}{2}$.

B. $6\sqrt{2}$.

C. 9.

D. $9\sqrt{2}$.

Lời giải

Đặt $OQ = x$, ($0 < x < 3$) $\Rightarrow MQ = \sqrt{MO^2 - OQ^2} = \sqrt{9 - x^2}$

Ta có $S_{MNPQ} = PQ \cdot MQ = 2x \cdot \sqrt{9 - x^2} \leq 2 \cdot \frac{x^2 + 9 - x^2}{2} = 9$

Dấu " $=$ " xảy ra khi $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 7: Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước $10\text{cm} \times 16\text{cm}$. Người ta cắt bỏ 4 góc của tấm tôn 4 miếng hình vuông bằng nhau rồi gò lại thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Để thể tích của hình hộp đó lớn nhất thì độ dài cạnh hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng

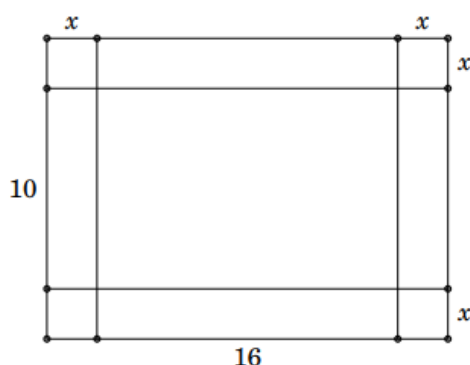
A. 3m .

B. 4m .

C. 5m .

D. 2m .

Lời giải



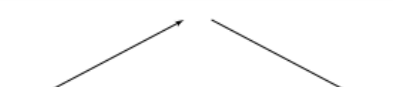
Giả sử độ dài cạnh hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng x , ($0 < 2x < 10, 0 < x < 5$).

Khi đó hình hộp chữ nhật có chiều cao bằng x , chiều rộng bằng $10 - 2x$ và chiều dài bằng $16 - 2x$

Suy ra hình hộp chữ nhật có thể tích $V = x(10 - 2x)(16 - 2x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$

Xét hàm số $f(x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$ trên $(0; 5)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$

$f'(x) = 12x^2 - 104x + 160 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{20}{3} \end{cases}$. Bảng biến thiên hàm số $f(x)$ trên $(0; 5)$ như sau:

x	0	2	5
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $(0; 5)$ tại $x = 2$ hay hình hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất khi độ dài cạnh hình vuông của miếng tôn bị cắt bỏ bằng 2m .

Câu 8: Ông Bình dự định sử dụng hết $5,5\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

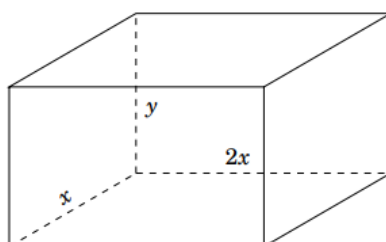
A. $1,01\text{m}^3$.

B. $1,17\text{m}^3$.

C. $1,51\text{m}^3$.

D. $1,40\text{m}^3$.

Lời giải



Gọi $x, 2x, y$ với $x, y > 0$ lần lượt là chiều rộng, chiều dài, chiều cao của bể cá.

Theo giả thiết ta có: $2.2xy + 2.xy + 2x^2 = 5,5 \Leftrightarrow 6xy + 2x^2 = 5,5 \Leftrightarrow y = \frac{5,5-2x^2}{6x}$

Do $y > 0$ nên $5,5 - 2x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{\sqrt{11}}{2}$

Thể tích bể cá là: $V(x) = 2x^2y = 2x^2 \cdot \frac{5,5-2x^2}{6x} = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{6}x$

Xét hàm số $V(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{6}x$ trên khoảng $(0; \frac{\sqrt{11}}{2})$ có $V'(x) = -2x^2 + \frac{11}{6} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{11}{12}}$

Bảng biến thiên:

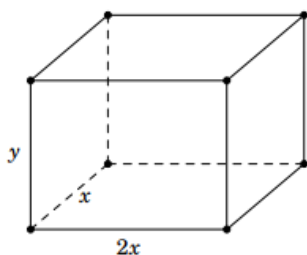
x	0	$\sqrt{\frac{11}{12}}$	$\frac{\sqrt{11}}{2}$
V'		+	0
		-	
V			

Thể tích lớn nhất của bể cá là $V\left(\sqrt{\frac{11}{12}}\right) = 1,17m^3$

Câu 9: Người ta muốn xây một chiếc bể nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3}m^3$. Biết đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là 700000 đồng/ m^2 . Tìm kích thước của bể để chi phí thuê nhân công ít nhất. Khi đó chi phí thuê nhân công là

A. 120 triệu đồng. **B. 105 triệu đồng.** C. 115 triệu đồng. D. 110 triệu đồng.

Lời giải



Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá (điều kiện $x, y > 0$).

Với giả thiết của bài toán, thể tích bể cá là: $V = 2x^2y = \frac{500}{3} \Rightarrow y = \frac{250}{3x^2}$

Để chi phí thuê nhân công ít nhất thì tổng diện tích các mặt của bể cá phải nhỏ nhất.

Tổng diện tích các mặt của bể cá $S = 2xy + 2.2xy + 2x^2 = 6xy + 2x^2 = \frac{500}{x} + 2x^2$

Xét hàm số $S(x) = \frac{500}{x} + 2x^2$ trên khoảng $(0; +\infty)$ có $S'(x) = -\frac{500}{x^2} + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 5$

Bảng biến thiên:

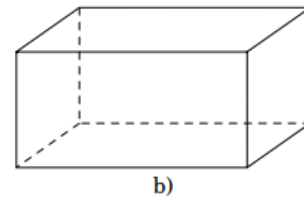
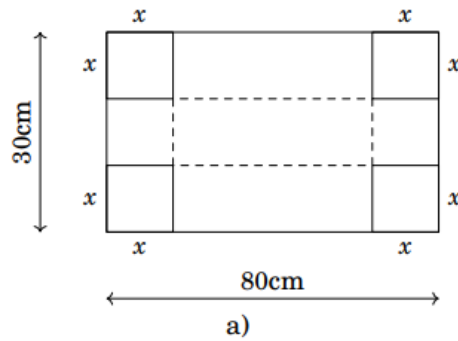
x	0	5	$+\infty$
$S'(x)$	-	0	+
$S(x)$	$+\infty$	150	$+\infty$

Do đó $\min S = 150$ tại $x = 5$.

Khi đó chi phí thuê nhân công là: $T = 150.700000 = 105$ triệu đồng.

Câu 10: Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 30cm và chiều dài 80cm (hình a) người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh x (cm) với $5 \leq x \leq 10$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp

chữ nhật không nắp (hình b). Tìm x để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. $\frac{10}{3}$ cm.

B. $\frac{20}{3}$ cm.

C. $\frac{31}{3}$ cm.

D. $\frac{40}{3}$ cm.

Lời giải

Thể tích chiếc hộp là: $V(x) = x(30 - 2x)(80 - 2x) = 2400x - 220x^2 + 4x^3$ với $5 \leq x \leq 10$

Ta có $V'(x) = 12x^2 - 440x + 2400 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{20}{3} \in [5; 10] \\ x = 30 \notin [5; 10] \end{cases}$

$V(5) = 700; V\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{200000}{27}; V(10) = 6000$

Do đó $\max_{[5;10]} V(x) = \frac{200000}{27}$ khi $x = \frac{20}{3}$. Vậy để thể tích hộp là lớn nhất khi $x = \frac{20}{3}$ cm.

Câu 11: Một sợi dây có chiều dài là 6m được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích hai hình thu được là nhỏ nhất?



A. $\frac{12}{4+\sqrt{3}}$ m.

B. $\frac{18\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ m.

C. $\frac{36\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ m.

D. $\frac{18}{9+4\sqrt{3}}$ m.

Lời giải

Gọi độ dài cạnh hình tam giác đều là $x(m)$. Khi đó độ dài cạnh hình vuông là $\frac{6-3x}{4}$

Tổng diện tích khi đó là: $S = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \left(\frac{6-3x}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}[(9 + 4\sqrt{3})x^2 - 36x + 36]$

Xét hàm số $f(x) = (9 + 4\sqrt{3})x^2 - 36x + 36, x \in (0; 6)$

Ta có $f(x)$ là hàm tam thức bậc hai có $-\frac{b}{2a} = \frac{18}{9+4\sqrt{3}} \in (0; 6)$ và $a > 0$

Suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -\frac{b}{2a} = \frac{18}{9+4\sqrt{3}} \in (0; 6)$

Vậy diện tích nhỏ nhất khi $x = \frac{18}{9+4\sqrt{3}}$ m

Câu 12: Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe X với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi theo đó, giá bán mới là bao nhiêu thì lợi nhuận thu được cao nhất?

A. 30 triệu đồng.

B. 30,5 triệu đồng.

C. 29,5 triệu đồng.

D. 32 triệu đồng.



Lời giải

Gọi giá bán mới là x (triệu đồng) với $27 \leq x \leq 31$

Khi đó số xe bán ra là $600 + (31 - x) \cdot 200$

Lợi nhuận thu được là: $f(x) = [600 + (31 - x) \cdot 200](x - 27) = (-200x + 6800)(x - 27)$

$$= -200x^2 + 12200x - 183600 = -200\left(x - \frac{61}{2}\right)^2 + 2450 \leq 2450$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi $x - \frac{61}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 30,5$

Vậy giá bán mới là 30,5 triệu đồng thì lợi nhuận lớn nhất thu được là 2450 triệu đồng.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng được tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức:

$$V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4 \text{ với } 0 \leq t \leq 0,5$$

Gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \leq t \leq 0,5$

a) Lượng xăng ban đầu trong bình ban đầu là 1 lít.

b) Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là 41,5 lít

c) $V'(t) = 300(2t - 3t^2) + 4$, với $0 \leq t \leq 0,5$

d) Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất

Lời giải

a) Sai: Số xăng trong bình ban đầu là $V(0) = 4$ lít

b) Đúng: Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là $V = V\left(\frac{1}{2}\right) = 41,5$ lít

c) Sai: Xét hàm số $V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4$ với $0 \leq t \leq 0,5$

Đạo hàm $V'(t) = 300t(2 - 3t)$

d) Đúng: Cho $V'(t) = 0 \Leftrightarrow 300t(2 - 3t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \in [0; 0,5] \\ t = \frac{2}{3} \in [0; 0,5] \end{cases}$

Các giá trị $V(0) = 4; V\left(\frac{1}{2}\right) = 41,5$

Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất.

Câu 2: Tại một xí nghiệp chuyên sản xuất vật liệu xây dựng, nếu trong một ngày xí nghiệp sản xuất $x(m^3)$ sản phẩm thì phải bỏ ra các khoản chi phí bao gồm: 4triệu đồng chi phí cố định; 0,2triệu đồng chi phí cho mỗi mét khối sản phẩm và $0,001x^2$ triệu đồng chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết rằng, mỗi ngày xí nghiệp sản xuất được tối đa $100m^3$ sản phẩm. Gọi $C(x)$ là tổng chi phí để xí nghiệp sản xuất $x(m^3)$ sản phẩm trong một ngày và $\bar{C}$ là chi phí trung bình trên mỗi mét khối sản phẩm.

a) $C = 0,2x + 0,001x^2$ với $0 \leq x \leq 100$

b) Tổng chi phí sản xuất $100m^3$ sản phẩm là 34 triệu đồng

c) $\bar{C} = 0,001x + \frac{4}{x} + 0,2$ với $0 \leq x \leq 100$

d) $\bar{C}$ có giá trị thấp nhất bằng 0,326 triệu đồng (kết quả làm tròn ba chữ số thập phân)

Lời giải

a) Sai: Tổng chi phí (triệu đồng) để xí nghiệp sản xuất $x(m^3)$ sản phẩm trong một ngày là :

$$C = C(x) = 4 + 0,2x + 0,001x^2 \text{ với } 0 \leq x \leq 100$$

b) Đúng: Thay $x = 100$ vào hàm $C(x)$ ta thu được kết quả là 34 triệu đồng

c) Đúng: Chi phí trung bình (triệu đồng) trên mỗi mét khối sản phẩm là

$$\bar{C} = \bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{4+0,2x+0,001x^2}{x} = 0,001x + \frac{4}{x} + 0,2 \text{ với } 0 \leq x \leq 100$$

d) Đúng: Ta có $\bar{C}'(x) = 0,001 - \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 0,001 - \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4000 \Leftrightarrow x = 20\sqrt{10} \in 0; 100$

$$\bar{C}(20\sqrt{10}) = \frac{\sqrt{10}}{25} + \frac{1}{5} \approx 0,326$$

Bảng biến thiên

x	0	$20\sqrt{10}$	100
$\bar{C}'(x)$	-	0	+
$\bar{C}(x)$	$+\infty$	$\frac{\sqrt{10}}{25} + \frac{1}{5}$	0,34

Từ bảng biến thiên, ta thấy

$$\bar{C}(20\sqrt{10}) \approx 0,326$$

(triệu

đồng/ m^3

sản phẩm), đạt được khi $x = 20\sqrt{10} \approx 63 m^3$.

Câu 3: Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.

b) Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 600 triệu đồng.

c) Lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm ($0 \leq x \leq 100$) cho B được biểu diễn bằng công thức $-0,01x^3 + 15x - 100$.

d) A bán cho B khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

Lời giải

a) Đúng: Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là $C(10) = 100 + 30 \cdot 10 = 400$ triệu.

b) Sai: Số tiền mà A thu được (gọi là doanh thu) từ việc bán x tấn sản phẩm ($0 \leq x \leq 100$) cho B là: $R(x) = x \cdot P(x) = x(45 - 0,001x^2) = 45x - 0,001x^3$ triệu đồng

Thay $x = 10$ ta được $R(10) = 449$ triệu đồng

c) Đúng: Lợi nhuận (triệu đồng) mà A thu được là:

$$P(x) = R(x) - C(x) = x(45 - 0,001x^2) - (100 + 30x) = -0,001x^3 + 15x - 100$$

d) Đúng: Xét hàm số $P(x) = -0,001x^3 + 15x - 100$ với ($0 \leq x \leq 100$) ta có:

$$P'(x) = -0,003x^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5000 \Leftrightarrow x = 50\sqrt{2} \in [0; 100]$$

Ta có $P(0) = -100$; $P(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100 \approx 607$; $P(100) = 400$

Bảng biến thiên

x	0	$50\sqrt{2}$	100
y'	+	0	-
y	100	$500\sqrt{2} - 100$	400

Từ bảng biến thiên ta có $\max_{[0;100]} P = P(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100 \approx 667$

Vậy A thu được lợi nhuận lớn nhất khi bán $50\sqrt{2} \approx 70,7$ tấn sản phẩm cho B mỗi tháng và lợi nhuận lớn nhất thu được khoảng 607 triệu đồng.

Câu 4: Khi nuôi tôm trong một hồ tự nhiên, một nhà khoa học đã thống kê được rằng: Nếu trên mỗi mét vuông mặt hồ thả x con tôm giống thì cuối vụ mỗi con tôm có cân nặng trung bình là $108 - x^2$ (gam).



- a) Điều kiện xác định là $x \geq 0$
- b) Sau một vụ lượng tôm trung bình trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên nặng $x(108 - x^2)$
- c) Để cuối vụ thu hoạch được nhiều tôm nhất trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên thì cần thả 16 con tôm giống
- d) Lượng tôm nhiều nhất cuối vụ có thể thu hoạch được trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên là 432 (gam).

Lời giải

- a) Đúng: Điều kiện xác định là $x \geq 0$
- b) Đúng: Sau một vụ lượng tôm trung bình trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên nặng $x(108 - x^2)$
- c) Sai: Xét hàm số $f(x) = 108x - x^3$ trên khoảng $(0; +\infty)$ ta có

$$f'(x) = 108 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow 108 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -6 < 0 \end{cases}$$

x	0	6	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$f(6)$	

Trên khoảng $(0; +\infty)$ hàm số $f(x) = 108x - x^3$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 6$.

Vậy nên thả 6 con tôm giống trên mỗi mét vuông mặt hồ thì cuối vụ thu hoạch được nhiều tôm nhất.

- d) Đúng: Lượng tôm nhiều nhất cuối vụ có thể thu hoạch được trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên là $f(6) = 108.6 - 6^3 = 432$ (gam).

Câu 5: Ông Thanh nuôi cá chim ở một cái ao có diện tích là $50m^2$. Vụ trước ông nuôi với mật độ là 20 con/ m^2 và thu được 1,5 tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi 8 con/ m^2 thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên 0,5kg? Giả sử không có hao hụt khi nuôi.

- a) Số cá giống mà ông thanh đã thả trong vụ vừa qua là 1500 con.
- b) Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phần trong vụ vừa qua là 1,5 (kg).
- c) Tổng trọng lượng cá thu được ở vụ này là $F(x) = -0,0652x^2 + 16x + 1500$ (kg)
- d) Vụ tới ông Thanh phải thả 488 con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất.

Lời giải

- a) Sai: Số cá giống mà ông thanh đã thả trong vụ vừa qua là $50.20 = 1000$ con.
- b) Đúng: Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phần trong vụ vừa qua là: $\frac{1500}{1000} = 1,5$ (kg).
- c) Sai: Gọi số cá giống cần thả ít đi trong vụ này là: x (con), $(x > 0)$
Theo đề bài cứ giảm 8 con thì mỗi con tăng thêm 0,5 (kg/con)
Vậy giảm x con thì mỗi con tăng thêm $0,0625x$ (kg/con).
Tổng số lượng cá thu được ở vụ này được tính bằng công thức:

$$F(x) = (1000 - x)(1,5 + 0,0625x) = -0,0625x^2 + 61x + 1500.$$

Bài toán trở thành tìm x để $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

$$\text{Ta có: } F'(x) = -0,125x + 61 = 0 \Leftrightarrow -0,125x + 61 = 0 \Leftrightarrow x = 488$$

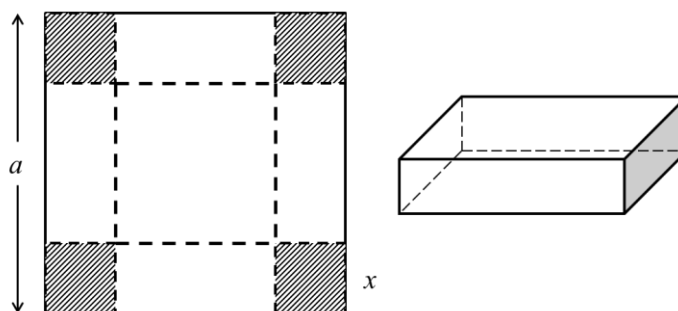
Bảng biến thiên như sau:

x	0	488	1000	
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		$F(max)$		

Vậy ông thanh phải trả số cá giống trong vụ tới là: $1000 - 488 = 512$ con.

d) Sai: Vụ tới ông Thanh phải trả 512 con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất.

Câu 6: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a . Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp.



a) Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\frac{a}{12}$.

b) Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\frac{a}{6}$.

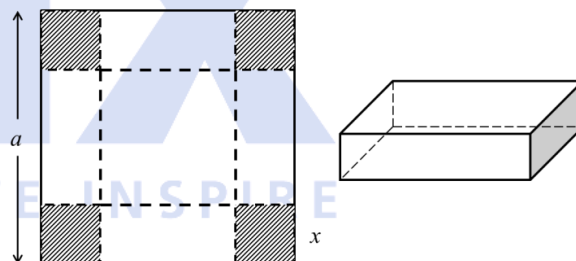
c) Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng $\frac{2a^3}{27}$.

d) Thể tích hộp lớn nhất bằng $\frac{a^3}{27}$.

Lời giải

Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông bị cắt ($0 < x < \frac{a}{2}$).

Thể tích của khối hộp là: $V(x) = x(a - 2x)^2$ ($0 < x < \frac{a}{2}$).



$$V'(x) = (a - 2x)^2 + x \cdot 2(a - 2x) \cdot (-2) = (a - 2x)(a - 6x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{6} \left(0 < x < \frac{a}{2}\right).$$

Bảng biến thiên:

x	0	$a/6$	$a/2$	
$V'(x)$		+	0	–
$V(x)$			$\frac{2a^3}{27}$	
	0			0

$$\text{Vậy } \max_{\left(0; \frac{a}{2}\right)} V(x) = V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27}.$$

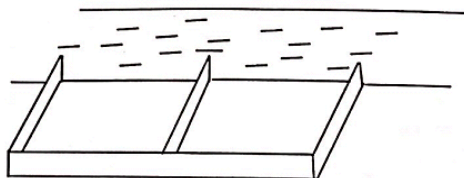
a) Sai: Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\frac{a}{12}$.

b) Đúng: Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\frac{a}{6}$.

c) Đúng: Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng $\frac{2a^3}{27}$.

d) Sai: Thể tích hộp lớn nhất bằng $\frac{a^3}{27}$.

Câu 7: Một người nông dân có 15.000.000 đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50000 đồng một mét. Gọi x là chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E (trong ba mặt song song, $x > 0$). Gọi y là chiều dài mặt hàng rào hình chữ E song song với bờ sông ($y > 0$).



a) Số tiền phải làm là: $x \cdot 60000 + y \cdot 3 \cdot 50000 = 15000000$ đồng.

b) Diện tích đất: $S = x \cdot y = x \cdot \frac{500-5x}{2} = 250x - \frac{5}{2}x^2$

c) Diện tích lớn nhất của đất rào thu được $\max_{(0;+\infty)} S = 6250 \text{ (m}^2\text{)}$

d) Diện tích lớn nhất của đất rào thu được khi chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E là 50m

Lời giải

a) Sai: Số tiền phải làm là: $x \cdot 3 \cdot 50000 + y \cdot 60000 = 15.000.000 \Leftrightarrow y = \frac{500-5x}{2}$.

b) Đúng: Diện tích đất: $S = x \cdot y = x \cdot \frac{500-5x}{2} = 250x - \frac{5}{2}x^2$

c) Đúng: Ta có: $S' = 250 - 5x$; $S' = 0 \Leftrightarrow 250 - 5x \Leftrightarrow x = 50$.

Bảng biến thiên:

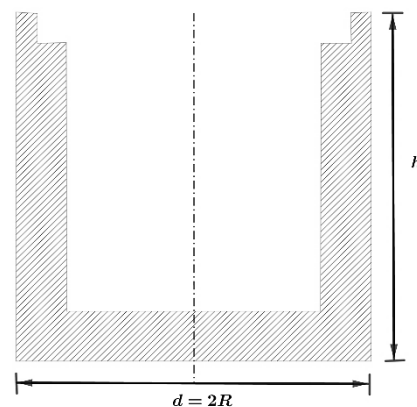
x	0	50	$+\infty$
$S'(x)$		+	0
$S(x)$	0	6250	$-\infty$

d) Đúng: Từ bảng biến thiên có $\max_{(0;+\infty)} S = 6250 \text{ (m}^2\text{)}$ khi $x = 50$.



PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Bác Nam muốn xây dựng một hồ ga không nắp hình trụ với dung tích $3m^3$. Hãy tính chi phí ít nhất mà bác Nam phải bỏ ra xây dựng hồ ga, biết tiền công và vật liệu cho $1m^3$ thành bê tông của hồ ga (thành bê tông đáy và thành bê tông xung quang) là 685000đồng.



Lời giải

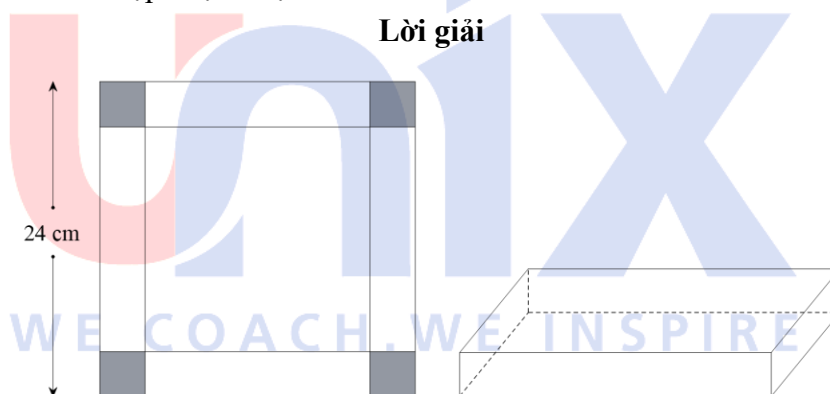
Ta có: $V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{3}{\pi R^2}$.

Mặt khác: $S_{xd} = 2\pi R h + \pi R^2 = \frac{6}{R} + \pi R^2 = \frac{3}{R} + \frac{3}{R} + \pi R^2 \geq 3\sqrt[3]{9\pi}(m^2)$ (Áp dụng BĐT Cauchy).

Để chi phí bác Nam bỏ ra nhỏ nhất khi và chỉ khi diện tích xây dựng hồ ga hình trụ nhỏ nhất, và khi đó $S_{xd} = 3\sqrt[3]{9\pi}(m^2)$.

Vậy số tiền bác Nam phải bỏ ra là: $685000 \cdot 3\sqrt[3]{9\pi} \approx 6260000$ đồng.

Câu 2: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 24cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x cm, rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ bên để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



Lời giải

Gọi x (cm) là cạnh hình vuông bị cắt ($0 < x < 12$).

Thể tích của hộp không nắp bằng $V(x) = x(24 - 2x)^2$.

Ta có $V'(x) = (24 - 2x)(24 - 6x)$ có $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$

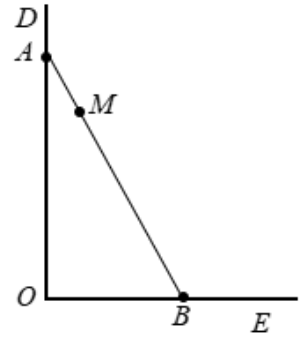
Bảng biến thiên

x	0	4	12	
$V'(x)$		+	0	-
$V(x)$	0			$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $V(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 4$.



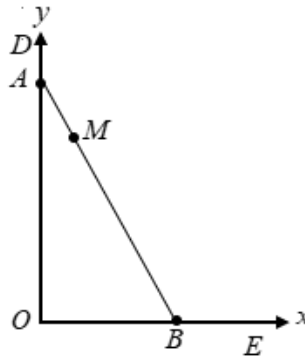
Câu 3: Người ta muốn xây một đoạn đường AB (như hình vẽ) và đoạn đường này phải đi qua điểm M . Biết rằng vị trí điểm M cách OD $125m$ và cách OE $1km$. Giả sử chi phí để làm $100m$ đường là 150 triệu đồng. Chọn vị trí của A và B để hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất. Hỏi chi phí thấp nhất để hoàn thành được con đường là bao nhiêu?



Lời giải

Để hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất thì phải chọn A, B sao cho đoạn thẳng AB là bé nhất. Thiết lập khoảng cách giữa hai điểm A, B và tìm giá trị nhỏ nhất.

Chọn hệ toạ độ xOy như hình dưới đây với OD nằm trên tia Oy . Khi đó điểm $M\left(\frac{1}{8}; 1\right)$.



Gọi $B(m; 0), A(0; n) (m, n > 0)$. Khi đó ta có phương trình theo đoạn chắn là $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$.

Do đường thẳng đi qua $M\left(\frac{1}{8}; 1\right)$ nên $\frac{1}{8m} + \frac{1}{n} = 1 \Rightarrow \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{8m} = \frac{8m-1}{8m} \Rightarrow n = \frac{8m}{8m-1}$.

Có $AB^2 = m^2 + n^2 = m^2 + \left(\frac{8m}{8m-1}\right)^2 = f(m)$. Xét hàm số $f(m)$, ta có :

$$f'(m) = 2m + 2 \cdot \frac{8m}{8m-1} \cdot \frac{-8}{(8m-1)^2} = 2m \cdot \left(1 - \frac{64}{(8m-1)^3}\right); f'(m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 (\text{loại}) \\ 1 - \frac{64}{(8m-1)^3} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (8m-1)^3 = 64 \Leftrightarrow m = \frac{5}{8}$$

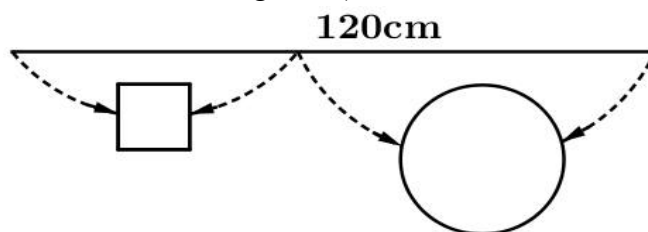
$$f(m) \geq f\left(\frac{5}{8}\right) = \left(\frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{8 \cdot \frac{5}{8}}{8 \cdot \frac{5}{8} - 1}\right)^2 = \frac{25}{64} + \frac{25}{16} = \frac{125}{64} \Rightarrow AB \geq \sqrt{\frac{125}{64}} = \frac{5\sqrt{5}}{8}.$$

Vậy quãng đường ngắn nhất là $\frac{5\sqrt{5}}{8}$ (km)



Giá để làm 1km đường là 1500 triệu đồng = 1,5 tỷ đồng nên khi đó chi phí thấp nhất để hoàn thành con đường là $\frac{5\sqrt{5}}{8} \cdot 1,5 \approx 2,0963$ (tỷ đồng).

Câu 4: Một sợi dây kim loại dài 120cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất được uốn thành hình vuông, đoạn dây thứ hai được uốn thành vòng tròn (tham khảo hình bên dưới).



Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn đạt giá trị nhỏ nhất là (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Gọi độ dài của đoạn dây thứ hai là x cm.

Khi đó, độ dài của đoạn dây thứ nhất là $(120 - x)$ cm ($0 < x < 120$).

Diện tích của hình vuông bằng $\left(\frac{120-x}{4}\right)^2$ và diện tích của hình tròn bằng $\pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi}$.

Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn:

$$S(x) = \left(\frac{120-x}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{4\pi} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16\pi}\right)x^2 - 15x + 900, (0 < x < 120).$$

Ta có $S(x)$ là một hàm số bậc hai, đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{120\pi}{4+\pi} \in (0; 120)$.

$$\text{Vậy } \min S(x) = S\left(\frac{120\pi}{4+\pi}\right) \approx 504\text{cm}^2.$$

Câu 5: Lưu lượng xe ô tô vào đường hầm được cho bởi công thức $f(v) = \frac{386v}{v^2+2v+5}$ (xe/giây), trong đó v (km/h) là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm. Tính vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm sao cho lưu lượng xe là lớn nhất.

Lời giải

Vì v là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm $\Rightarrow v > 0$ và $\frac{5}{v} > 0$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có: $v + \frac{5}{v} \geq 2\sqrt{5} \Rightarrow v + \frac{5}{v} + 2 \geq 2\sqrt{5} + 2$

$$\Rightarrow \frac{386}{v + \frac{5}{v} + 2} \leq \frac{386}{2\sqrt{5} + 2} \Rightarrow f(v) = \frac{386v}{v^2 + 2v + 5} \leq \frac{386}{2\sqrt{5} + 2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow v = \frac{5}{v} \Leftrightarrow v^2 = 5 \Leftrightarrow v = \sqrt{5}$ (vì $v > 0$)

Vậy vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm là $\sqrt{5}$ km/h thì lưu lượng xe là lớn nhất.

Câu 6: Ông Nam cần xây dựng một bể nước mưa có thể tích $V = 8(m^3)$ dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài gấp $\frac{4}{3}$ lần chiều rộng, đáy và nắp đổ bê tông, cốt thép; xung quanh xây bằng gạch và xi măng. Biết rằng chi phí trung bình là 980.000đ/ m^2 và ở nắp để hở một khoảng hình vuông có diện tích bằng $\frac{2}{9}$ diện tích nắp bể. Tính chi phí thấp nhất mà ông Nam phải chi trả (làm tròn đến hàng nghìn đồng).

Lời giải



Gọi chiều rộng của bể là $3x$ (m), chiều dài bể là $4x$ (m) và chiều cao của bể là $\frac{2}{3x^2}$ (m).

Khi đó tổng diện tích bề mặt xây là:

$$T = (3x + 4x) \cdot 2 \cdot \frac{2}{3x^2} + 2 \cdot 3x \cdot 4x - \frac{2}{9} \cdot 3x \cdot 4x = \frac{28}{3x^2} + \frac{64x^2}{3} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{28}{3x^2} \cdot \frac{64x^2}{3}} = \frac{32\sqrt{7}}{3} (m^2).$$

Chi phí C (tính theo đồng) xây dựng là: $C = T \cdot 980000 \geq \frac{32\sqrt{7}}{3} \cdot 980000 \approx 27657000$ (đồng).

Câu 7: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t (giờ) được cho bởi công thức $c(t) = \frac{t}{t^2+1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu (giờ) thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Lời giải

Ta có $c'(t) = \frac{-t^2+1}{(t^2+1)^2}$, $\forall t \in (0; +\infty)$. Cho $c'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

t	0	1	$+\infty$
$c'(t)$	+	0	-
$c(t)$			

Vậy sau khi tiêm 1 giờ, nồng độ thuốc trong máu bệnh nhân cao nhất.

Câu 8: Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số $P(t) = \frac{t+1}{t^2+t+4}$, trong đó $P(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t giờ sử dụng độc tố. Sau bao nhiêu giờ thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm?

Lời giải

$$\text{Xét } P'(t) = \frac{-t^2-2t+3}{(t^2+t+4)^2} = \frac{(t-1)(-t-3)}{(t^2+t+4)^2}.$$

$$P'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 1 \end{cases}.$$

Ta thấy hàm số đạt cực đại tại $t = 1$ và $P'(t) < 0, \forall t \in (1; +\infty)$ nên sau 1 giờ thì vi khuẩn bắt đầu giảm.

Câu 9: Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Ta có } v(t) = s' = -\frac{3}{2}t^2 + 12t; v'(t) = -3t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \text{ và có bảng biến thiên}$$

t	0	4	6
$v'(t)$	+	0	-
$v(t)$		24	

Vậy $\max v(t) = 24(m/s)$ khi $t = 4$.

Câu 10: Một cửa hàng bán vải Thanh Hà với giá bán mỗi kg là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 25kg. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm 4000 đồng cho một kg thì số vải bán được tăng thêm là 50kg. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi kg là 30.000 đồng.

Lời giải

Gọi x đồng ($30.000 < x < 50.000$) là giá bán vải mới để cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất. Suy ra giá bán ra đã giảm là $(50.000 - x)$ đồng.

Số lượng vải bán ra đã tăng thêm là $\frac{50(50000-x)}{4000} = 625 - 0,0125 \cdot x$.

Tổng số vải bán được là $25 + 625 - 0,0125 \cdot x = 650 - 0,0125 \cdot x$.

Doanh thu của cửa hàng là $(650 - 0,0125 \cdot x)x$.

Số tiền vốn ban đầu để mua vải là $(650 - 0,0125 \cdot x)30000$.

Vậy lợi nhuận của cửa hàng là

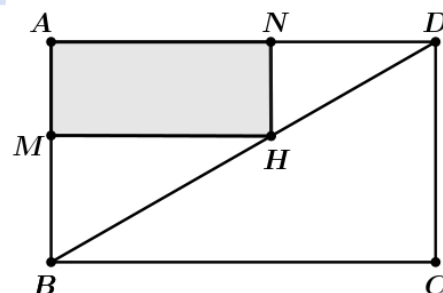
$$(650 - 0,0125 \cdot x)x - (650 - 0,0125 \cdot x)30000 = -0,0125x^2 + 1025x - 19500000.$$

$$\text{Ta có: } f(x) = -0,0125x^2 + 1025x - 19500000 = -0,0125(x - 41000)^2 + 1512500 \leq 1512500.$$

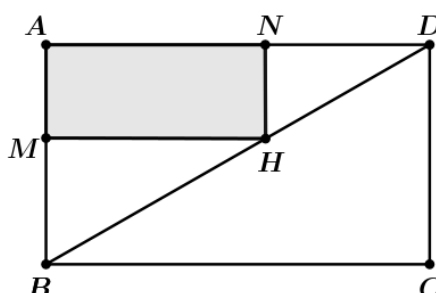
Suy ra $\max f(x) = 1512500$ khi $x = 41.000$ đồng.

Vậy giá bán mỗi cân vải là 41.000 đồng thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

Câu 11: Trên mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích $25m^2$, người chủ lấy một phần đất để trồng cỏ. Biết phần đất trồng cỏ này có dạng hình chữ nhật với hai đỉnh đối diện là A và H , với H thuộc cạnh BD . Hỏi số tiền lớn nhất người chủ cần chuẩn bị để trồng cỏ (miền tô đậm) là bao nhiêu với chi phí trồng cỏ là 70.000đồng/ m^2 ?



Lời giải



$$\text{Ta có } AB \cdot AD = 25(m^2); \frac{NH}{AB} = \frac{DN}{DA}. \text{ Đặt } \frac{NH}{AB} = \frac{DN}{DA} = x \Rightarrow NH = x \cdot AB; AN = (1 - x)AD$$



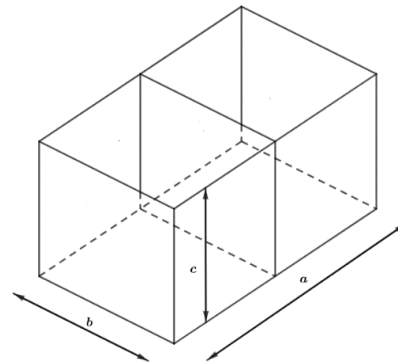
Diện tích đất trồng cỏ là: $S = AN.NH = x.(1-x).AB.AD = 25.x.(1-x)$

Diện tích lớn nhất khi $x.(1-x)$ lớn nhất mà $x.(1-x) \leq \frac{(x+1-x)^2}{4} = \frac{1}{4}$

Diện tích đất trồng cỏ lớn nhất $S = \frac{1}{4}.25 = \frac{25}{4}$

Số tiền lớn nhất để trồng cỏ: $T = \frac{25}{4}.70000 = 437500$ đồng.

Câu 12: Người ta cần làm một cái bể cá có hai ngăn, không có nắp ở phía trên với thể tích $1,296m^3$. Người ta cắt các tấm kính ghép lại một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật (hình vẽ minh họa) với ba kích thước là a, b, c . Người ta phải thiết kế các kích thước là bao nhiêu để đỡ tốn kính nhất (giả sử độ dày của kính không đáng kể). Khi đó hãy tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.



Lời giải

Thể tích bể cá là $V = abc = 1,296$.

Kể cả miếng kính ở giữa, diện tích tổng các miếng kính là $S = ab + 2ac + 3bc$.

Suy ra $\frac{S}{V} = \frac{S}{1,296} = \frac{ab+2ac+3bc}{abc} = \frac{1}{c} + \frac{2}{b} + \frac{3}{a}$.

Áp dụng Cô si cho 3 số $\frac{1}{c}; \frac{2}{b}; \frac{3}{a}$ ta có $\frac{1}{c} + \frac{2}{b} + \frac{3}{a} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{c} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{3}{a}} = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{6}{1,296}} = 5$.

Dấu " $=$ " xảy ra khi $\begin{cases} abc = 1,296 \\ \frac{1}{c} = \frac{2}{b} = \frac{3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1,8 \\ b = 1,2 \\ c = 0,6 \end{cases}$

Vậy để đỡ tốn kính nhất thì $a = 1,8m; b = 1,2m; c = 0,6m$.

Khi đó $T = a + b + c = 1,8 + 1,2 + 0,6 = 3,6$.

-----HẾT-----

WE COACH.WE INSPIRE