



BÀI 03 ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

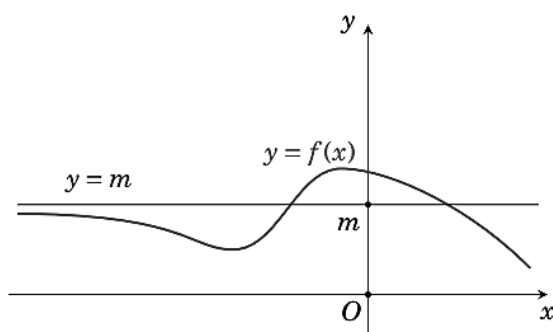
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Đường tiệm cận ngang (TCN)

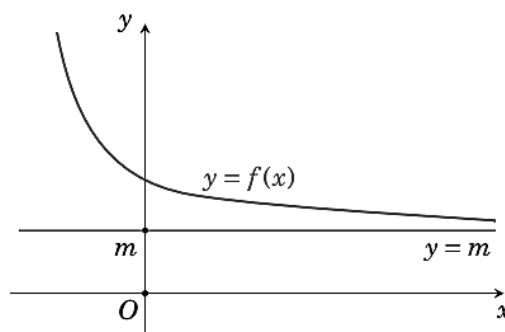
Định nghĩa: Đường thẳng $y = m$ được gọi là một **đường tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$$

Đường thẳng $y = m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như hình vẽ dưới đây



a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m$



b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$

Các bước tìm đường tiệm cận ngang:

Bước 1: Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

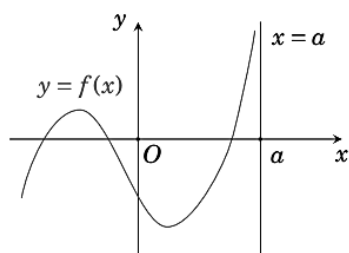
Bước 2: Xem ở “vị trí” nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở “vị trí” đó

2 Đường tiệm cận đứng (TCD)

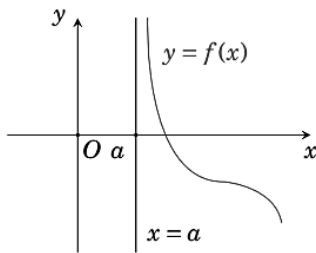
Định nghĩa: Đường thẳng $x = a$ gọi là **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

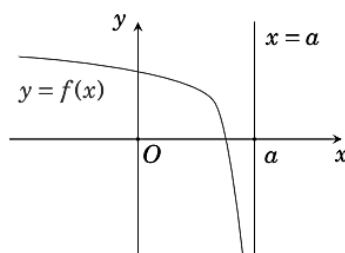
Đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như hình vẽ dưới đây



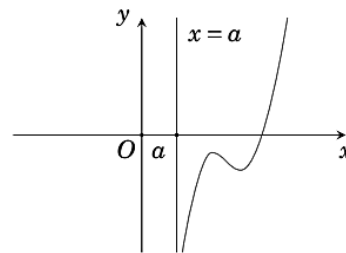
a) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$



b) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$



c) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$



d) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

Các bước tìm đường tiệm cận đứng:

Bước 1: Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x = x_0$

Bước 2: Tính giới hạn một bên tại $x = x_0$.

Nếu xảy ra $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng.

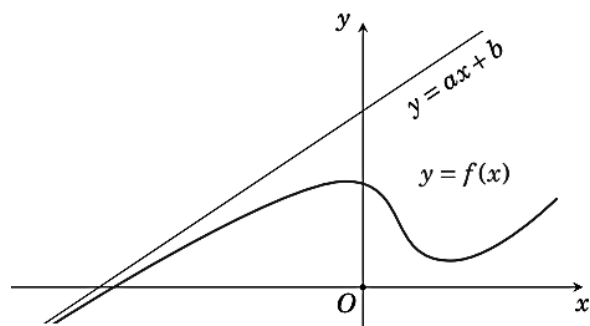
3 Đường tiệm cận xiên (TCX)

Định nghĩa: Đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu:

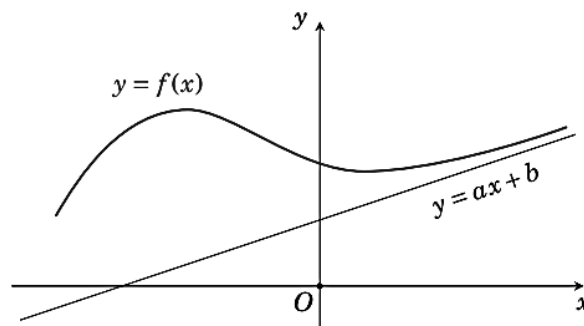
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như hình bên dưới:



a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$



b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

Các bước tìm đường tiệm cận xiên: ta xác định hệ số của a và b trong các trường hợp sau

Bước 1: Tính $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$

Bước 2: Tính $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$. Để tìm đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số thì ta làm như sau:

- Các bước tìm đường tiệm cận ngang:**

Bước 1: Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Bước 2: Xem ở “vị trí” nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở “vị trí” đó

- Các bước tìm đường tiệm cận đứng:**

Bước 1: Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x = x_0$

Bước 2: Tính giới hạn một bên tại $x = x_0$.

Nếu xảy ra $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng.

- Lưu ý:** Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ luôn có TCD: $y = -\frac{d}{c}$ và TCN: $y = \frac{a}{c}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Xác định tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

a) $y = f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$

b) $y = f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Lời giải

a) Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 3$. Tương tự, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$.

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$.

b) Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1$;

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \right) = -1$.



Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có hai tiệm cận ngang là $y=1$ và $y=-1$.

Bài tập 2: Xác định tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

a) $y = f(x) = \frac{3-x}{x+2}$.

b) $y = f(x) = \frac{x^2+2}{x}$

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3-x}{x+2} = +\infty$. Tương tự, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$.

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$.

b) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+2}{x} = +\infty$. Tương tự, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$.

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 0$.

Bài tập 3: Xác định tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

a) $y = \frac{2x-1}{x+1}$

b) $y = \frac{2x-3}{1-2x}$

c) $y = \frac{x^2-5x+4}{x^2-1}$

d) $y = \frac{2x-1}{x^2-3x+2}$

Lời giải

a) Xét $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-1}{x+1} = -\infty$ (hoặc $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x-1}{x+1} = -\infty$) nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng.

Xét $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang

b) Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-3}{1-2x} = -1$ suy ra $y = -1$ là tiệm cận ngang

Xét $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2x-3}{1-2x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{2x-3}{1-2x} = -\infty \end{cases}$ suy ra $x = \frac{1}{2}$ là tiệm cận đứng

c) Điều kiện xác định $x \neq \pm 1$

$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-5x+4}{x^2-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2-5x+4}{x^2-1} = +\infty \end{cases}$ nên hàm số có tiệm cận ngang là $y = 1$ và một tiệm cận đứng $x = -1$

d) Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x^2-3x+2} = 0$ suy ra $y = 0$ là tiệm cận ngang

• $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty$ nên $x = 1$ là đường TCD

• $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty$ nên $x = 2$ là đường TCD

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-4}$ có đường tiệm cận ngang là:



- A. $y = 2$. B. $y = 0$. C. $y = 1$. D. $y = -2$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{x^2-4} = 0$ suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = 0$.

Câu 2: Đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x^2+1}$ có phương trình

- A. $y = 2$. B. $y = 3$. C. $y = 1$. D. $y = 0$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ nên $y = 0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 3: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?

- A. $y = x^3 - x - 1$. B. $y = \sqrt{2x^2 + 3}$. C. $y = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$. D. $y = \frac{3x^2 + 2x - 1}{4x^2 + 5}$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x + 1}{4x^2 + 5} = \frac{3}{4}$. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = \frac{3}{4}$.

Câu 4: Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$ là:

- A. $x = 2$. B. $x = -2$. C. $y = -2$. D. $y = 2$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 2} = +\infty \Rightarrow \text{TCD: } x = 2$.

Câu 5: Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3}{x+2}$ là

- A. $x = -2$. B. $x = 0$. C. $x = 3$. D. $y = 0$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

• $\lim_{x \rightarrow -2^+} y = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3}{x+2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} y = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3}{x+2} = -\infty$ suy ra $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 6: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+6}{x-2}$ là đường thẳng

- A. $x = 3$. B. $x = -2$. C. $x = -3$. D. $x = 2$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x+6}{x-2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x+6}{x-2} = -\infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng.

Câu 7: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{x-1}$ là đường thẳng :

- A. $x = 1$ B. $y = 2$ C. $x = 0$ D. $y = 0$

Lời giải



Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x-1} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x-1} = 0$. Vậy đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$	-		-	0	+
$f(x)$	1	2		-3	3

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 3. **B. 1.** C. 2. D. 0.

Lời giải

Quan sát bảng biến thiên ta có $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$ 0 $+$	
$f(x)$	2	$+\infty$	2	$+\infty$

- A. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
 B. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.
 D. Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.

Lời giải

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$ nên $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty \end{cases}$ nên $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-		- 0 +	
y	2	$+\infty$	-2	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 1. B. 3. C. 4. **D. 2.**

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0^{(+)}} y = +\infty$ nên hàm số có tiệm cận ngang là $y = 2$ và tiệm cận



đứng là $x = 0$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		4		$+\infty$	
	$-\infty$		-1		

Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang.
 B. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 4$.
 C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
 D. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 0$.

Lời giải

Từ BBT của hàm số $y = f(x)$ ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

Và $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -1$ nên đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$+$		$+$ 0 $-$	
y	2	4	3	$-\infty$ -1

Hỏi đồ thị hàm số có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Lời giải

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} y = -\infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -1 \Rightarrow y = -1$ là tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số có tất cả 3 đường tiệm cận.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, có bảng biến thiên như sau.



x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	-2	$+\infty$	$-\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $y = -1$ và tiệm cận ngang $x = -2$.
B. Đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận.
C. Đồ thị hàm số có ba tiệm cận.
D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = -2$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên suy ra $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -2 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$.

$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = +\infty \Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$.

Câu 14: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$ là

- A.** 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Tập xác định: $\mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = 2 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y = 2$.

$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left(\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} \right) = +\infty$ suy ra đồ thị có đường tiệm cận đứng là $x = -1$.

$\lim_{x \rightarrow (1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (1)^+} \left(\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} \right) = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow (1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (1)^-} \left(\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} \right) = \frac{1}{2}$

Suy ra $x = 1$ không phải là đường tiệm cận đứng của đồ thị.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận.

Câu 15: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ là

- A.** 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 2}{x + 1} = -\frac{1}{2}$



$$\square \lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 2}{x + 1} = -\frac{1}{2}$$

$$\square \lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 2}{x + 1} = -\infty$$

$$\square \lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 2}{x + 1} = +\infty$$

Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận tiệm cận đứng $x = -1$ nên đồ thị hàm số có 2 tiệm cận

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1}$ có đồ thị (C). Số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của (C) là

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Ta có: $\frac{2x^2 + x - 1}{x - 1} = 2x + 3 + \frac{2}{x - 1}$.

$$\square \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + 3 + \frac{2}{x - 1} \right) = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + 3 + \frac{2}{x - 1} \right) = +\infty, \text{ suy ra đồ thị hàm số không có đường}$$

tiệm cận ngang.

$$\square \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1} = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1} = +\infty, \text{ suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là } x = 1.$$

Câu 17: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{(x - 2)\sqrt{x - 1}}{x^2 - 1}$ bằng

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Tập xác định: $D = (1; +\infty)$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 2)\sqrt{x - 1}}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 2)}{(x + 1)\sqrt{x - 1}} = -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - 2)\sqrt{x - 1}}{x^2 - 1} = 0$$

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{(x - 2)\sqrt{x - 1}}{x^2 - 1}$ có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ và một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.

Câu 18: Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{x - 2}{x + 1} = -\frac{1}{2}.$$



$$\lim_{x \rightarrow -1^{\pm}} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1^{\pm}} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^{\pm}} \frac{x-2}{x+1} = \mp \infty.$$

Hàm số có tiệm cận đứng là $x = -1$.

Câu 19: Đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 - 1}{3 - 2x - 5x^2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

$$\text{Ta có } -5x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3}{5} \end{cases}.$$

Với $x = -1$ thì $x^2 - 1 = 0$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x = \frac{3}{5}$.

Câu 20: Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - |x| - 2}{x^2 - 2x - 8}$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = \frac{x^2 - |x| - 2}{x^2 - 2x - 8} \Leftrightarrow y = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x - 8} & \text{khi } x \geq 0 \\ \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x - 8} & \text{khi } x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \begin{cases} \frac{(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-4)} & \text{khi } x \geq 0 \\ \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-4)} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 4\}$.

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} y = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - |x| - 2}{x^2 - 2x - 8} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-4)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} y = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - |x| - 2}{x^2 - 2x - 8} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-4)} = -\infty \Rightarrow x = 4 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} y = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - |x| - 2}{x^2 - 2x - 8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-4)} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -2 \text{ không là tiệm cận đứng của đồ thị}$$

hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Câu 21: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-4}$ là:

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2; -2\}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y = 0$.

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$



Nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là $x = -2$.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là 2.

Câu 22: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-2x-3}$. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho

là

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$.

$$y = \frac{x+1}{x^2-2x-3} = \frac{x+1}{(x+1)(x-3)} = \frac{1}{x-3}.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-3} = 0$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-3} = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vì $\lim_{x \rightarrow 3^+} y = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 3^-} y = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$ nên đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là 2.

Câu 23: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x^2-2x-1}{x^2-1}$ là:

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-2x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 3$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-2x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 3$, suy ra đồ

thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = 3$.

$$\frac{3x^2-2x-1}{x^2-1} = \frac{(3x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{3x+1}{x+1}.$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{3x+1}{x+1} = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{3x+1}{x+1} = +\infty, \text{ suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng } x = -1$$

Vậy tổng số đường tiệm cận ngang và đứng của đồ thị hàm số là 2.

Câu 24: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Tập xác định $D = [-9; +\infty) \setminus \{0; -1\}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x+1)(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = 0 \text{ không là tiệm cận đứng}$$

của đồ thị hàm số.



$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.}$$

Câu 25: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{4 - x^2}$

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

$$\text{Ta có } \frac{x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \frac{(x-2)(x-1)}{(2-x)(2+x)} = \frac{-(x-1)}{2+x} = \frac{1-x}{x+2}$$

$$\square \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{(x-2)(x-1)}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{1-x}{2+x} = +\infty \text{ suy ra đường thẳng } x = -2 \text{ là}$$

tiệm cận đứng.

$$\square \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-(x-1)}{2+x} = -1 \text{ suy ra đường thẳng } y = -1 \text{ là tiệm cận ngang.}$$

Vậy tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là 2.

Câu 26: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x^2-x}$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ nên $y = 0$ là tiệm cận ngang

$$\square \lim_{x \rightarrow 1} y = \infty \text{ nên } x = 1 \text{ là tiệm cận đứng.}$$

$$\square \lim_{x \rightarrow 0} y = \infty \text{ nên } x = 0 \text{ là tiệm cận đứng.}$$

Vậy có ba đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 27: Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-4}$ có phương trình là

A. $y = -2$.

B. $y = 2$.

C. $y = 0$.

D. $y = -1$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^2-4} = 0$$

Vậy đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 28: Tìm số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$.

A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16} = \frac{(x+1)(x-4)}{(x+4)(x-4)}.$$

$$\square \lim_{x \rightarrow (-4)^+} y = +\infty \Rightarrow x = -4 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị.}$$



$\lim_{x \rightarrow 4} y = \frac{5}{8} \Rightarrow x = 4$ không là tiệm cận đứng của đồ thị.

Vậy đồ thị có 1 tiệm cận đứng.

Câu 29: Tìm số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$

A. 0 .

B. 3 .

C. 2 .

D. 1 .

Lời giải

$\lim_{x \rightarrow (-4)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-4)^+} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow (-4)^+} \frac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow (-4)^+} \frac{x+1}{x+4} = -\infty$

(vì $\lim_{x \rightarrow (-4)^+} (x+1) = -3$ và $\lim_{x \rightarrow (-4)^+} (x+4) = 0$)

$\lim_{x \rightarrow (-4)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-4)^-} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow (-4)^-} \frac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow (-4)^-} \frac{x+1}{x+4} = +\infty$

(vì $\lim_{x \rightarrow (-4)^-} (x+1) = -3$ và $\lim_{x \rightarrow (-4)^-} (x+4) = 0$)

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -4$

$\lim_{x \rightarrow 4^+} y = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x+1}{x+4} = \frac{5}{8}$

$\lim_{x \rightarrow 4^-} y = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x+1}{x+4} = \frac{5}{8}$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng $x = -4$.

Câu 30: Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4x^2 - 1} + 3x^2 + 2}{2x^2 - 2x}$ là:

A. 3 .

B. 1 .

C. 2 .

D. 4 .

Lời giải

Tập xác định: $D = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$

Tiệm cận đứng: $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{4x^2 - 1} + 3x^2 + 2}{2x(x-1)} = +\infty$

(Do $\lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{4x^2 - 1} + 3x^2 + 2) = 5 + \sqrt{3} > 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x(x-1)) = 0$; $2x(x-1) > 0, \forall x > 1$)

$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{4x^2 - 1} + 3x^2 + 2}{2x(x-1)} = -\infty$

(Do $\lim_{x \rightarrow 1^-} (\sqrt{4x^2 - 1} + 3x^2 + 2) = 5 + \sqrt{3} > 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} (2x(x-1)) = 0$; $2x(x-1) < 0, \forall x: 0 < x < 1$)

Suy ra đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:



x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$-$		$-$	0	$+$
y	2		$+\infty$		$+\infty$
		$-\infty$		2	

- a) $f(-5) < f(4)$
 b) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2
 c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$
 d) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang

Lời giải

- a) Đúng: Từ bảng biến thiên ta thấy $f(-5) < 2$ và $f(4) > 2$ nên $f(-5) < f(4)$
 b) Sai: Do $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty$ nên hàm số có không có giá trị nhỏ nhất.
 c) Đúng: Do $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$
 d) Sai: Do $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{5-4x}{2x+3}$ có đồ thị là (C)

- a) Hàm số đã cho không có cực trị
 b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -3$
 c) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$
 d) Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số tạo với hai trục toạ độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 3.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

□ $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^-} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\frac{3}{2}$

□ $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -2$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$

Diện tích hình chữ nhật cần tìm là $S = \left|-\frac{3}{2}\right| \cdot |2| = 3$ (đvdt)

- a) Đúng: Hàm số đã cho không có cực trị
 b) Sai: Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\frac{3}{2}$
 c) Đúng: Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$
 d) Đúng: Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số tạo với hai trục toạ độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 3.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x^2-3x+2}{4-x^2}$ có đồ thị là (C)

- a) Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R}$
 b) Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang, trong đó có một đường là đường thẳng có phương trình $y = -1$.
 c) Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$



d) Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là 3

Lời giải

a) Sai: Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

b) Sai: Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = -1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = -1$ nên hàm số chỉ có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -1$.

c) Đúng: $\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-x}{x+2} = -\frac{1}{4}$

$\square \lim_{x \rightarrow -2^+} y = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x-1)(x-2)}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{2-x} = -\infty$ nên $x = -2$ là tiệm

cận đứng của đồ thị hàm số.

d) Sai: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là 2

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y'	—		— 0 +	
y	3 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ —2	↗ 5	

a) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$

b) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một đường tiệm cận đứng là $x = 1$

c) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một đường tiệm cận ngang là $y = 3$

d) Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)+2}$ có hai đường tiệm cận đứng

Lời giải

a) Sai: Hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1); (1; 2)$ và đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

b) Đúng: Do $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là $x = 1$

c) Đúng: Do $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 3$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y = 3$

d) Đúng: Dựa vào đồ thị, ta có $f(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = x_0 \in (-\infty; 1) \end{cases}$.

Hàm số $y = g(x) = \frac{1}{f(x)+2}$ có tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{x_0; 1; 2\}$.

Hàm số $y = g(x)$ liên tục trên mỗi khoảng xác định của nó.

Các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{f(x)+2} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{f(x)+2} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{f(x)+2} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{f(x)+2} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{f(x)+2} = +\infty$.



Vậy hàm số $y = g(x) = \frac{1}{f(x)+2}$ có hai đường tiệm cận đứng là $x = x_0$ và $x = 2$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là $x = 2$ và tiệm cận ngang là $y = 3$. Tính giá trị biểu thức $a - 2b$

Lời giải

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ là: $x = \frac{2}{b}$.

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ là: $y = \frac{a}{b}$.

$$\text{Theo giả thiết ta có: } \begin{cases} \frac{2}{b} = 2 \\ \frac{a}{b} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a - 2b = 3 - 2 \cdot 1 = 1$$

Câu 2: Gọi $I(a; b)$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$. Tính $T = a + b$

Lời giải

Hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-2)^-} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = -\infty \end{cases}$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$.

Vậy giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là điểm $I(-2; 1)$ nên $T = -2 + 1 = -1$

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x^3 - 9x}{x^3 - x^2 - 5x - 3}$ có đồ thị là (C) . Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị (C) là bao nhiêu?

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$ và có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang

• $\lim_{x \rightarrow -1} y = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)^2} = -\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng

□ $\lim_{x \rightarrow 3} y = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x+3)}{(x+1)^2} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$ nên đường thẳng $x = 3$ không là tiệm cận

đứng.

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị (C) là 2.

Câu 4: Diện tích hình chữ nhật tạo bởi hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+3}$ và các trục tọa độ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $x = -3$;

Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = 2$.

Hai đường tiệm cận tạo với các trục tọa độ một hình chữ nhật có chiều dài bằng 3, chiều rộng bằng 2.

Diện tích hình chữ nhật: $S = 2.3 = 6$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-5}{x+b}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Tính giá trị biểu thức $a^2 + b^2$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, suy ra đường tiệm cận đứng là: $x = 2$ và đường tiệm cận ngang là: $y = 1$.

Từ hàm số $f(x) = \frac{ax-5}{x+b}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là: $x = -b$ và đường tiệm cận ngang là: $y = a$.

Do đó ta có: $\begin{cases} -b = 2 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 5$.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Tính các khoảng cách từ điểm M bất kì thuộc (C) đến hai đường tiệm cận bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng là $\Delta_1: x = -1 \Leftrightarrow x + 1 = 0$

Đường tiệm cận ngang là $\Delta_2: y = 2 \Leftrightarrow y - 2 = 0$.

Giả sử $M\left(x_0; \frac{2x_0-1}{x_0+1}\right) \in (C), x_0 \neq -1$.

Ta có: $d(M; \Delta_1) = |x_0 + 1|$ và $d(M; \Delta_2) = \left| \frac{2x_0-1}{x_0+1} - 2 \right| = \frac{3}{|x_0+1|}$.

Suy ra $d(M; \Delta_1).d(M; \Delta_2) = |x_0 + 1| \cdot \frac{3}{|x_0+1|} = 3$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi $M(a;b)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ dương sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (C) nhỏ nhất. Khi đó tổng $a + 2b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đường tiệm cận ngang $y = 2$ và đường tiệm cận đứng $x = 1$. Khi đó:



Khoảng cách từ $M(a; b)$ đến tiệm cận ngang là: $|b - 2| = \left| \frac{2a-1}{a-1} - 2 \right| = \frac{1}{|a-1|}$ (do $M \in (C)$)

Khoảng cách từ $M(a; b)$ đến tiệm cận đứng là: $|a - 1|$.

Ta có $|a - 1| + \frac{1}{|a - 1|} \geq 2\sqrt{|a - 1| \cdot \frac{1}{|a - 1|}} = 2$.

Vậy tổng khoảng cách nhỏ nhất là 2 khi $|a - 1| = \frac{1}{|a - 1|}$.

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 (\text{loại}) \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 3 \Rightarrow a + 2b = 8.$$

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{2x-3}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận ngang bằng 10 lần khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận đứng.

Lời giải

Ta có các đường thẳng $x = \frac{3}{2}$ và $y = 1$ lần lượt là đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận

ngang của đồ thị hàm số mà $M \in (C) \Rightarrow M\left(x; \frac{2x+2}{2x-3}\right)$ với $x \neq \frac{3}{2}$.

Khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận đứng bằng $\left|x - \frac{3}{2}\right| = \frac{|2x-3|}{2}$.

Khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận ngang bằng $\left|\frac{2x+2}{2x-3} - 1\right| = \frac{5}{|2x-3|}$.

Khi đó: $\frac{5}{|2x-3|} = 10 \cdot \frac{|2x-3|}{2} \Leftrightarrow (2x-3)^2 = 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2; 6) \\ M(1; -4) \end{cases}$.

Câu 9: Cho đồ thị hai hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ và $g(x) = \frac{ax+1}{x-2}$, $a \neq -\frac{1}{2}$. Tìm giá trị thực dương của a để các tiệm cận của hai đồ thị hàm số tạo thành một hình chữ nhật có diện tích là 4.

Lời giải

Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ có hai đường tiệm cận là $x = 1$ và $y = 1$.

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{ax+1}{x-2}$ có hai đường tiệm cận là $x = 2$ và $y = a$.

Hình chữ nhật được tạo thành từ bốn đường tiệm cận của hai đồ thị trên có hai kích thước lần lượt là 1 và $|a - 1|$.

Theo giả thiết, ta có $|a - 1| \cdot 1 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ a = -3 \end{cases}$. Vì $a > 0$ nên chọn $a = 5$.

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + x - 1}{4x^2 + bx + 9}$ có đồ thị (C) và a, b là các hằng số dương thỏa mãn $a \cdot b = 4$.

Biết rằng (C) có đường tiệm cận ngang $y = c$ và có đúng 1 đường tiệm cận đứng. Tính tổng $T = 3a + b - 24c$.



Lời giải

Theo giả thiết $a > 0, b > 0$.

$$\text{Với } ab = 4 \text{ ta có } y = \frac{ax^2 + x - 1}{4x^2 + bx + 9} = \frac{\frac{4}{b}x^2 + x - 1}{4x^2 + bx + 9} = \frac{4x^2 + bx - b}{b(4x^2 + bx + 9)} = \frac{1}{b} - \frac{b+9}{b(4x^2 + bx + 9)}.$$

Đồ thị (C) có đúng 1 đường tiệm cận đứng nên $4x^2 + bx + 9 = 0$ có nghiệm kép

Suy ra $\Delta = b^2 - 4.4.9 = 0 \Leftrightarrow b = 12$ (do $b > 0$).

$$\text{Ta có } ab = 4 \text{ suy ra } a = \frac{1}{3}; c = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 + x - 1}{4x^2 + bx + 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{4 + \frac{b}{x} + \frac{9}{x^2}} = \frac{a}{4} \text{ suy ra } c = \frac{1}{12}.$$

Vậy $T = 3a + b - 24c = 11$.

-----HẾT-----

