

BÀI

03

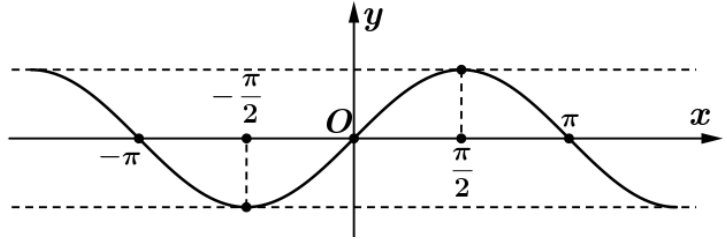
HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

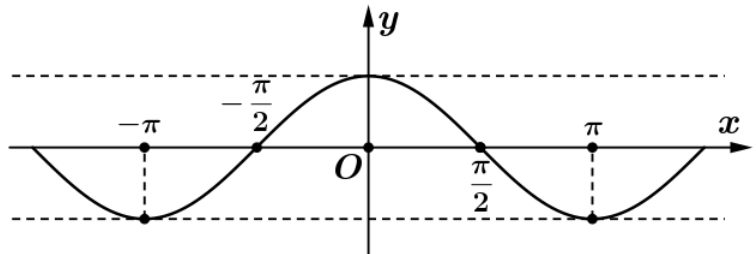
1 Hàm số $y = \sin x$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Tập giá trị $[-1;1]$ tức là $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc toạ độ O làm tâm đối xứng
- Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$, nghĩa là $\sin(x + k2\pi) = \sin x$, với $k \in \mathbb{Z}$
- Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



2 Hàm số $y = \cos x$

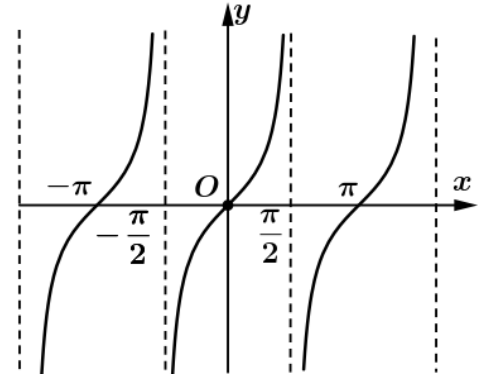
- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Tập giá trị $[-1;1]$ tức là $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng
- Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$, nghĩa là $\cos(x + k2\pi) = \cos x$, với $k \in \mathbb{Z}$
- Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



3 Hàm số $y = \tan x$

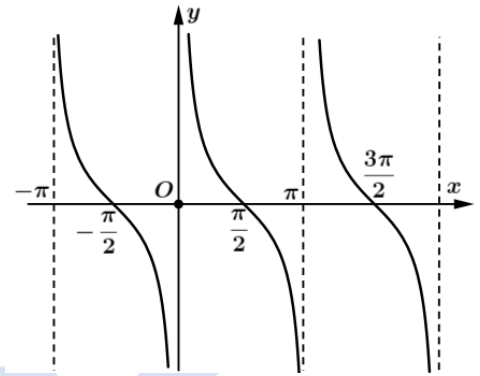
- Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$ và đây là hàm số lẻ

- Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$, nghĩa là $\tan(x + k\pi) = \tan x$, với $k \in \mathbb{Z}$
- Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



4 Hàm số $y = \cot x$

- Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$ và đây là hàm số lẻ
- Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$, nghĩa là $\cot(x + k\pi) = \cot x$, với $k \in \mathbb{Z}$
- Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số lượng giác

Phương pháp: Cần chú ý một số điều kiện sau:

- $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ xác định khi và chỉ khi $g(x) \neq 0$
- $y = \sqrt[n]{f(x)}$ xác định khi và chỉ khi $f(x) \geq 0$ với $n \in \mathbb{N}^*$
- $\tan[u(x)]$ xác định khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cot[u(x)]$ xác định khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm tập xác định của các hàm số sau đây:

a) $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

b) $y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2 - \cos x}}$

c) $y = \tan x$

d) $y = \cot x + \sin 5x + \cos x$

e) $y = \frac{\cot x}{\cos x - 1}$

f) $y = \cot x$

g) $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x - 1}$

h) $y = \tan x + \cot x$

i) $y = \frac{\cos x}{\sin x + 1}$

k) $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

l) $y = \sin\left(\frac{5x}{x^2 - 1}\right)$

m) $y = \sqrt{2 - \sin x}$

Lời giải

a) Biểu thức $\frac{1 - \cos x}{\sin x}$ có nghĩa khi $\sin x \neq 0$, tức là $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

b) Biểu thức $\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2 - \cos x}}$ có nghĩa khi $\begin{cases} \frac{1 + \cos x}{2 - \cos x} \geq 0 \\ 2 - \cos x \neq 0 \end{cases}$.

Vì $-1 \leq \cos x \leq 1$ nên $1 + \cos x \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $2 - \cos x \geq 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó, $2 - \cos x \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $\frac{1 + \cos x}{2 - \cos x} \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2 - \cos x}}$ là $D = \mathbb{R}$.

c) Điều kiện xác định: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Vậy tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) Hàm số xác định khi: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$. Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

e) Điều kiện xác định của hàm số là $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq 2l\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos x - 1}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

f) Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

g) Điều kiện xác định của hàm số là $\sin x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$.

h) Điều kiện: $\sin x \cdot \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

i) Điều kiện $\sin x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

k) Hàm số $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ xác định khi và chỉ khi

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

l) Hàm số $y = \sin\left(\frac{5x}{x^2 - 1}\right)$ xác định $\Leftrightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$. Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

m) Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 2 - \sin x > 0$. Do đó, hàm số luôn luôn xác định hay $D = \mathbb{R}$.

Bài tập 2: Tìm tập giá trị của các hàm số sau đây:

a) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$

b) $y = \sqrt{1 + \cos x} - 2$

Lời giải

a) Ta có: $-1 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -2 \leq 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 2 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -2 - 1 \leq 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leq 2 - 1 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3 \leq 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq y \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy tập giá trị của hàm số $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$ là $[-3; 1]$.

b) Vì $-1 \leq \cos x \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $0 \leq 1 + \cos x \leq 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó $0 \leq \sqrt{1 + \cos x} \leq \sqrt{2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ suy ra $-2 \leq \sqrt{1 + \cos x} - 2 \leq \sqrt{2} - 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hay $-2 \leq y \leq \sqrt{2} - 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{1 + \cos x} - 2$ là $[-2; \sqrt{2} - 2]$.

Bài tập 3: Tìm giá trị của tham số m để các hàm số sau đây xác định trên $\mathbb{R}$

a) $y = \sqrt{2m - 3\cos x}$

b) $y = \sqrt{5 - m\sin x - (m+1)\cos x}$

Lời giải

a) Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $2m - 3\cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{2m}{3}$

Bất đẳng thức trên đúng với mọi x khi $1 \leq \frac{2m}{3} \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$

b) Hàm số xác định trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow 5 - m\sin x - (m+1)\cos x \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow m\sin x + (m+1)\cos x \leq 5 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \max_{x \in \mathbb{R}} (m\sin x + (m+1)\cos x) \leq 5.$$

$$\Leftrightarrow m^2 + (m+1)^2 \leq 25 \Leftrightarrow m^2 + m - 12 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 3.$$

Bài tập 4: Giả sử khi một con sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t) = 90\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimet trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây.

a) Tìm chu kỳ của sóng.

b) Tìm chiều cao của sóng, tức là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng.

Lời giải

a) Chu kỳ của sóng là $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}} = 20$ (giây).

b) Chiều cao của sóng tức là chiều cao của nước đạt được trong một chu kỳ dao động.

Ta có: $h(20) = 90\cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot 20\right) = 90$ (cm).

Vậy chiều cao của sóng là 90 cm

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x - 1}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $\cos x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2k\pi$. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 2: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{2025}{\sin x}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải

Điều kiện xác định của hàm số là: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Câu 3: Khẳng định nào sau đây là sai?

A. Hàm số $y = \tan x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $y = \cos x$ có tập giá trị là $[-1; 1]$.

C. Hàm số $y = \sin x$ có tập giá trị là $[-1; 1]$.

D. Hàm số $y = \cot x$ có tập giá trị là $[0; \pi]$.

Lời giải

Hàm số $y = \cot x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$ nên D sai.

Câu 4: Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \sin x}}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{-\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Lời giải

Ta có điều kiện xác định của hàm số là $\frac{1 - \cos x}{1 + \sin x} \geq 0.$

Do $1 - \cos x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $1 + \sin x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $\frac{1 - \cos x}{1 + \sin x} \geq 0$ khi và chỉ khi $1 + \sin x \neq 0$

$$\Leftrightarrow \sin x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 5: Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}.$

B. Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định là $\mathbb{R}.$

C. Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là $\mathbb{R}.$

D. Các hàm số lượng giác có tập xác định là $\mathbb{R}.$

Lời giải

Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$

Câu 6: Tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là

A. $D = \mathbb{R}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pi + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

Lời giải

Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

Do đó, tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

Câu 7: Khẳng định nào sau đây là đúng

A. $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$

B. $\cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$

C. $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi.$

D. $\cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi.$

Lời giải

Ta có: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$

Câu 8: Tập xác định của hàm số $y = \tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$

C. $D = \mathbb{R}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Lời giải

Hàm số xác định khi: $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

Câu 9: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x}$ là

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi; \frac{\pi}{2} + h2\pi, k, h \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k2\pi; \frac{\pi}{2} + h\pi, k, h \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

Hàm số $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x}$ xác định khi và chỉ khi: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số trên là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 10: Tập xác định của hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

Hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ xác định khi

$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 11: Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{2\sin^2 x + 1}{1 + \cos x}$ là:

A. $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x \neq \pi - k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Hàm số xác định khi $1 + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi - k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 12: Hàm số $y = \sqrt{\sin x - 1} + 1 - 3\cos^2 x$ xác định khi và chỉ khi:

A. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **C.** $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Hàm số xác định khi $\sin x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 13: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

Hàm số xác định khi và chỉ khi $1 - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{3}{\sin 2x} + \frac{5}{\cos 2x}$. Điều kiện xác định hàm số là

A. $x \neq k\pi$.

B. $x \neq \frac{k\pi}{2}$.

C. $x \neq \frac{k\pi}{4}$.

D. $x \neq k2\pi$.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 4x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 15: Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{3\sin x}{\cos 2x - 1}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\cos 2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq 1 \Leftrightarrow 2x \neq k2\pi \Leftrightarrow x \neq k\pi$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 16: Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{2\sin x + 1}{2\cos x - 1} + \frac{2\cos x + 1}{2\sin x - 1}$

Lời giải

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} 2\cos x - 1 \neq 0 \\ 2\sin x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq \frac{1}{2} \\ \sin x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{3} + l2\pi \\ x \neq \frac{\pi}{6} + m2\pi \\ x \neq \frac{5\pi}{6} + n2\pi \end{cases} (k, l, m, n \in \mathbb{Z}).$

Vậy tập xác định của hàm số là

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, -\frac{\pi}{3} + l2\pi; \frac{\pi}{6} + m2\pi; \frac{5\pi}{6} + n2\pi \mid k, l, m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Câu 17: Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$ là

- A. $x \neq k\pi$. **B.** $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$. C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x \neq k2\pi$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $\sin x - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \tan x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Câu 18: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x - 1}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. D. $D = \mathbb{R}$.

Lời giải

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\cos x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 19: Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos x}$ là:

- A. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. B. $x \neq k2\pi$. C. $x \neq k\pi$. **D.** $x \neq k\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$

Câu 20: Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{3 + \sin x} - \frac{1}{\tan^2 x - 1}$ là:

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} 3 + \sin x \geq 0 \text{ (luôn đúng)} \\ \tan^2 x - 1 \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x \neq 1 \\ \tan x \neq -1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

Câu 21: Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$.

- A. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. B. $x \neq k2\pi$. C. $x \neq k\pi$. **D. $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.**

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Điều kiện: } \sin^2 x - \cos^2 x \neq 0 &\Leftrightarrow -\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy tập xác định của hàm số là: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Câu 22: Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{\sin 2x - 2}{\cos 2x + 4}}$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. B. $D = [-1; 1]$. C. $D = \mathbb{R}$. **D. $D = \emptyset$.**

Lời giải

$$\text{Vì } \begin{cases} \sin 2x - 2 < 0 \\ \cos 2x + 4 > 0 \end{cases} \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{\sin 2x - 2}{\cos 2x + 4} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên tập xác định của hàm số là } \emptyset.$$

Câu 23: Tìm m để hàm số $y = \sqrt{3\sin x + 4\cos x + 2m - 1}$ xác định với mọi x

- A. $m > 0$. B. $m > 1$. C. $m \geq \frac{-1}{2}$. **D. $m \geq 3$.**

Lời giải

Ta có y xác định khi $3\sin x + 4\cos x + 2m - 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 3\sin x + 4\cos x \geq 1 - 2m \Leftrightarrow \frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x \geq \frac{1 - 2m}{5} (*)$$

$$\text{Đặt } \frac{3}{5} = \cos \alpha \Rightarrow \frac{4}{5} = \sin \alpha. \text{ Khi đó } (*) \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) \geq \frac{1 - 2m}{5}. \text{ Mà } -1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1.$$

$$\text{Để hàm số } y \text{ xác định với mọi } x \text{ thì } -1 \geq \frac{1 - 2m}{5} \Leftrightarrow -5 \geq 1 - 2m \Leftrightarrow m \geq 3.$$

Câu 24: Tập xác định của hàm số $y = \frac{2\cos x + 3}{\sin^2 x - 1}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Lời giải

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin^2 x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1 \\ \sin x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$

Câu 25: Hàm số $y = \frac{\cot 2x}{1 - 2\cos 2x}$ xác định trong khoảng nào sau đây?

A. $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right).$

B. $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right).$

C. $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right).$

D. $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right).$

Lời giải

Hàm số $y = \frac{\cot 2x}{1 - 2\cos 2x}$ xác định khi $\begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ 1 - 2\cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{k\pi}{2} \\ \cos 2x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{k\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{6} + l\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{6} + m\pi \end{cases}$

$(k; l; m \in \mathbb{Z})$

Do các phương án A, B, C chứa các giá trị làm cho hàm số không xác định. Chỉ có phương án D không chứa các giá trị làm cho hàm số không xác định.

Vậy hàm số $y = \frac{\cot 2x}{1 - 2\cos 2x}$ xác định trên khoảng là $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$

Câu 26: Tập xác định của hàm số $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Lời giải

Điều kiện xác định: $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 27: Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là

A. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}.$

B. $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi / k \in \mathbb{Z}\}.$

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Lời giải

Điều kiện xác định: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Câu 28: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\cos x}{\sin x + 1}$ là:

A. $D = \mathbb{R}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}.$

Lời giải

Điều kiện: $\sin x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq -1 \Leftrightarrow \sin x \neq \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi.$ Vậy tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}.$

Câu 29: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan x + 2025}{\sin^2 x + 1}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $\mathbb{R}.$

C. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Lời giải

Ta có $\sin^2 x + 1 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}.$ Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}.$

Câu 30: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 + \tan x}$

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}; -\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}; -\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Lời giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \\ 1 + \tan x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} \neq k\pi \\ \tan x \neq -1 \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

Vậy tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}; -\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \tan 2x - 1$. Khi đó:

- a) Giá trị của hàm số tại $x = \frac{\pi}{8}$ bằng 0
- b) Giá trị của hàm số tại $x = \frac{\pi}{3}$ bằng $-\sqrt{3} - 1$
- c) Có ba giá trị x thuộc $[0; \pi]$ khi hàm số đạt giá trị bằng -2 .
- d) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid (k \in \mathbb{Z}) \right\}$

Lời giải

- a) Đúng: Ta có: $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \tan\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) - 1 = 1 - 1 = 0$
- b) Đúng: Ta có: $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) - 1 = -\sqrt{3} - 1$
- c) Sai: Ta có: $f(x) = -2 \Leftrightarrow \tan 2x - 1 = -2 \Leftrightarrow \tan 2x = -1$
 $\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

Vì $x \in [0; \pi]$ nên $x \in \left\{ \frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8} \right\}$ khi đó $k=1; k=2$

- d) Sai: Tập xác định hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 2: Tìm được tập giá trị các hàm số sau trên tập xác định của chúng. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số $y = 3\sin x$ có tập giá trị là $T = [-3; 3]$.
- b) Hàm số $y = 2\cos x - 1$ có tập giá trị là $T = [-3; 1]$.
- c) Hàm số $y = 2030 - 4\cos x$ có tập giá trị là $T = [2026; 2034]$.
- d) Hàm số $y = \sin^2 x + 4\sin x - 1$ có tập giá trị là $T = [-3; 3]$.

Lời giải

- a) Đúng: Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3\sin x \leq 3 \Rightarrow -3 \leq y \leq 3$.

Vậy tập giá trị của hàm số là $T = [-3; 3]$.

Tư vấn hướng nghiệp cho học sinh bằng phân tích nhân tướng học – xem chỉ tay – tử vi

b) Đúng: Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \cos x \leq 2$
 $\Rightarrow -2 - 1 \leq 2 \cos x - 1 \leq 2 - 1 \Rightarrow -3 \leq y \leq 1$. Vậy tập giá trị của hàm số là $T = [-3; 1]$.

c) Đúng: Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 4 \geq -4 \cos x \geq -4$
 $\Rightarrow 4 + 2030 \geq -4 \cos x + 2030 \geq -4 + 2030 \Rightarrow 2034 \geq y \geq 2026$.

Vậy tập giá trị của hàm số là $T = [2026; 2034]$.

d) Sai: Ta có: $y = \sin^2 x + 4 \sin x - 1 = \sin^2 x + 4 \sin x + 4 - 5 = (\sin x + 2)^2 - 5$.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \sin x + 2 \leq 3$

$\Rightarrow 1^2 \leq (\sin x + 2)^2 \leq 3^2 \Rightarrow 1^2 - 5 \leq (\sin x + 2)^2 - 5 \leq 3^2 - 5 \Rightarrow -4 \leq y \leq 4$.

Vậy tập giá trị của hàm số là $T = [-4; 4]$.

Câu 3: Tìm được tập xác định của các hàm số dưới đây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y = \tan x + \cot 2x$ xác định khi $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases}$

b) Hàm số $y = \sqrt{\pi - \cos x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$

c) Hàm số $y = \sqrt{4 - \sin^2 x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$

d) Hàm số $y = \sqrt{\sin x - 1} + \sqrt{\cos x - 1}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$

Lời giải

a) Đúng: $y = \tan x + \cot 2x$

Hàm số xác định khi $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq k\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) Đúng: $y = \sqrt{\pi - \cos x}$

Hàm số xác định khi $\pi - \cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \leq \pi \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

c) Đúng: $y = \sqrt{4 - \sin^2 x}$

Hàm số xác định khi $4 - \sin^2 x \geq 0 \Leftrightarrow \sin^2 x \leq 4 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ (vì ta có $0 \leq \sin^2 x \leq 1 < 4, \forall x \in \mathbb{R}$).

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

d) Sai: $y = \sqrt{\sin x - 1} + \sqrt{\cos x - 1}$

Hàm số xác định khi $\begin{cases} \sin x - 1 \geq 0 \\ \cos x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 1 \\ \cos x \geq 1 \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{cases}$

Từ (1) và (2), ta có $\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases}$ vô lý (vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ nên $\sin x, \cos x$ không thể đồng thời bằng 1).

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \emptyset$.

Câu 4: Tìm được tập xác định của các hàm số dưới đây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ xác định khi: $x \neq \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

b) Hàm số $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ xác định khi: $\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$

c) Hàm số $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

d) Hàm số $y = \frac{\tan 3x}{\cos x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\right\}$

Lời giải

a) Đúng: Hàm số xác định $\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow 2x \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) Đúng: Hàm số xác định $\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} \neq k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

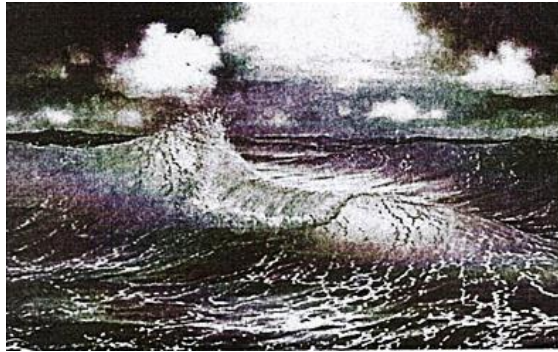
Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{3} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) Sai: Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

d) Sai: Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 5: Chiều cao so với mực nước biển trung bình tại thời điểm t (giây) của mỗi cơn sóng được cho bởi hàm số $h(t) = 75\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)$, trong đó $h(t)$ được tính bằng centimét.



- a) Chiều cao của sóng tại các thời điểm 5 giây bằng 69,3 cm.
- b) Chiều cao của sóng tại các thời điểm 20 giây bằng 75 cm
- c) Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t = 0$ giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 6 giây
- d) Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t = 0$ giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 18 giây (Tất cả kết quả được làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải

a) Đúng: Khi $t = 5$ ta có: $h(5) = 75\sin\left(\frac{\pi \cdot 5}{8}\right) \approx 69,3 \text{ cm}$.

b) Đúng: Khi $t = 20$ ta có: $h(20) = 75\sin\left(\frac{\pi \cdot 20}{8}\right) = 75 \text{ cm}$.

c) Sai:

d) Sai: Ta có: $\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 1 \Rightarrow 75\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 75$ hay $h(t) \leq 75$.

Giá trị lớn nhất của $h(t)$ là 75 khi đó $\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi t}{8} = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow t = 4 + 16k (k \in \mathbb{Z})$. Vì $t \in [0; 30] \Rightarrow t \in \{4; 20\}$ (ứng với k bằng 0 và 1).

Vậy tại các thời điểm 4 giây hoặc 20 giây (trong 30 giây đầu tiên) thì cơn sóng đạt chiều cao cực đại là 75 cm.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Hàm số $y = 5 + 4\sin 2x \cos 2x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

Lời giải

Ta có $y = 5 + 4\sin 2x \cos 2x = 5 + 2\sin 4x$.

Mà $-1 \leq \sin 4x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2\sin 4x \leq 2 \Rightarrow 3 \leq 5 + 2\sin 4x \leq 7$

$\longrightarrow 3 \leq y \leq 7 \xrightarrow{y \in \mathbb{Z}} y \in \{3; 4; 5; 6; 7\}$ nên y có 5 giá trị nguyên.

Câu 2: Hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

Lời giải

Áp dụng công thức $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$, ta có

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin \frac{\pi}{6} = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{Ta có } -1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \longrightarrow -1 \leq y \leq 1 \xrightarrow{y \in \mathbb{Z}} y \in \{-1; 0; 1\}.$$

Câu 3: Hàm số $y = \cos^2 x - \cos x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

Lời giải

$$\text{Ta có } y = \cos^2 x - \cos x = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{Mà } -1 \leq \cos x \leq 1 &\longrightarrow -\frac{3}{2} \leq \cos x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \longrightarrow 0 \leq \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4} \\ &\longrightarrow -\frac{1}{4} \leq \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \leq 2 \longrightarrow -\frac{1}{4} \leq y \leq 2 \xrightarrow{y \in \mathbb{Z}} y \in \{0; 1; 2\} \text{ nên có 3 giá trị thỏa mãn.} \end{aligned}$$

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \sqrt{\frac{m-1}{m}} - 2 \cos 4x$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

$$\text{Để hàm số } y = \sqrt{\frac{m-1}{m}} - 2 \cos 4x \text{ xác định trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{m-1}{m} - 2 \cos 4x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m-1}{2m} \geq \cos 4x \geq 1 \Leftrightarrow \frac{m-1}{2m} \geq 1 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0.$$

Câu 5: Biết rằng tập giá trị của hàm số $y = 5 + 4 \sin 2x \cos 2x$ là $T = [a; b]$. Tính giá trị biểu thức $P = a + 2b$?

Lời giải

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y = 5 + 4 \sin 2x \cos 2x = 5 + 2 \sin 4x$.

$$\text{Do } -1 \leq \sin 4x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin 4x \leq 2 \Leftrightarrow 3 \leq 5 + 2 \sin 4x \leq 7 \Leftrightarrow 3 \leq y \leq 7.$$

$$\text{Vậy giá trị của hàm số là } T = [3; 7] \text{ nên } \begin{cases} a = 3 \\ b = 7 \end{cases} \Rightarrow P = a + 2b = 3 + 2 \cdot 7 = 17$$

Câu 6: Biết rằng tập giá trị của hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x$ là $T = [a; b]$. Tính giá trị biểu thức $P = 4a + b$

Lời giải

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x.$$

$$\text{Do } 0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \geq -\frac{3}{4} \sin^2 2x \geq -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 \geq 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 \geq y \geq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy giá trị của hàm số là } T = \left[\frac{1}{4}; 1\right] \text{ nên } \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow P = 4a + b = 4 \cdot \frac{1}{4} + 1 = 2$$

Câu 7: Biết rằng tập giá trị của hàm số $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x + 3$ là $T = [a; b]$. Tính giá trị biểu thức $P = 5a + 2b$?

Lời giải

$$\text{Ta có } y = \sin x + \sqrt{3} \cos x + 3 = 2 \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) + 3 = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 3.$$

$$\text{Do } -1 \leq \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 3 \leq 5 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 5$$

$$\text{Vậy giá trị của hàm số là } T = [1; 5] \text{ nên } \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow P = 5a + 2b = 5 \cdot 1 + 2 \cdot 5 = 15.$$

Câu 8: Biết rằng tập giá trị của hàm số $y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2$ là $T = [a; b]$. Tính giá trị biểu thức $P = 10a - 2b$?

Lời giải

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2 = (1 - \sin^2 x) + 2 \sin x + 2 = -\sin^2 x + 2 \sin x + 3 = -(\sin x - 1)^2 + 4$$

$$\text{Do } -1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \sin x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 4 \geq (\sin x - 1)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \geq -(\sin x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -(\sin x - 1)^2 + 4 \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 4.$$

$$\text{Vậy giá trị của hàm số là } T = [0; 4] \text{ nên } \begin{cases} a = 0 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow P = 10a - 2b = 10 \cdot 0 - 2 \cdot 4 = -8.$$

Câu 9: Biết rằng tập giá trị của hàm số $y = \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 2 \cos x + 4}$ là $T = [a; b]$. Tính giá trị biểu thức $P = 11(a + b)$?

Lời giải

Tập xác định hàm số $D = \mathbb{R}$.

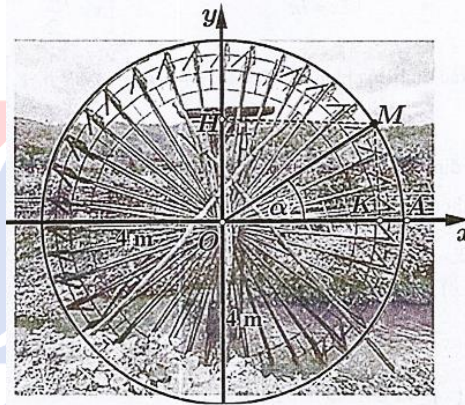
$$\begin{aligned} \text{Ta có: } y &= \frac{2\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x + 4} \Leftrightarrow y(\sin x + 2\cos x + 4) = 2\sin x + \cos x \\ &\Leftrightarrow (y-2)\sin x + (2y-1)\cos x = -4y. \end{aligned}$$

$$\text{Điều kiện để tồn tại cặp } (x; y) \text{ là } (y-2)^2 + (2y-1)^2 \geq (-4y)^2$$

$$\Leftrightarrow -11y^2 - 8y + 5 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-4-\sqrt{71}}{11} \leq y \leq \frac{-4+\sqrt{71}}{11}.$$

$$\text{Vậy miền giá trị hàm số là } T = \left[\frac{-4-\sqrt{71}}{11}; \frac{-4+\sqrt{71}}{11} \right] \text{ nên } P = 11(a+b) = -8$$

Câu 10: Một cái guồng nước có vành kim loại ngoài cùng là một đường tròn tâm O , bán kính là $4m$. Xét chất điểm M thuộc đường tròn đó và góc $\alpha = (\overline{OA}, \overline{OM})$. Giả sử mực nước lúc đang xét là tiếp xúc với đường tròn $(O; 4)$ và guồng nước quay theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ). Biết rằng guồng nước quay hết một vòng sau 40 giây ($t=0$ giây khi điểm M trùng A). Hỏi thời điểm nào (trong 1 vòng quay đầu tiên) thì điểm M ở vị trí cao nhất so với mặt nước?



Lời giải

$$\text{Ta có: } h(x) = 4 + 4\sin \alpha.$$

$$\text{Khi } M \text{ ở vị trí cao nhất so với mặt nước tức là } h(x) = 8 \text{ thì } \sin \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ (vì chỉ xét 1}$$

$$\text{vòng quay đầu tiên). Thời gian thực hiện của guồng nước là: } t = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot 40}{2\pi} = 10 \text{ (giây).}$$

-----HẾT-----