



Dạng 3: Bài toán về đường tiệm cận của đồ thị hàm số có chứa tham số

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm tham số m để đồ thị hàm số

a) $y = \frac{4x+1}{mx-1}$ không có tiệm cận đứng

b) $y = \frac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}$ có hai tiệm cận đứng

c) $y = \frac{3x-1}{x-m}$ có đường tiệm cận đứng là $x=5$

d) $y = \frac{(m+1)x-5m}{2x-m}$ có TCN là $y=1$

e) $y = \frac{x+3}{x^2-2mx+9}$ có đúng hai đường tiệm cận gồm một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang

f) $y = \frac{x-1}{x^2-(2m+1)x+m^2-3}$ có đúng hai đường tiệm cận gồm một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang

Lời giải

a) Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng khi
$$\begin{cases} m \neq 0 \\ 4 \cdot (-1) - 1 \cdot m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m = 0 \end{cases} \end{cases}$$

b) Để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng thì phương trình $x^2 - 2x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác nghiệm của phương trình $x^2 + x - 2 = 0$.

Hay phương trình $f(x) = x^2 - 2x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 và -2.

Khi đó ta có
$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(1) \neq 0 \\ f(-2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m > 0 \\ m-1 \neq 0 \\ 8+m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq 1 \\ m \neq -8 \end{cases} \Leftrightarrow -8 \neq m < 1.$$

c) Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $-3m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{3}$

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=m$

Theo yêu cầu bài toán suy ra $m=5$ (thỏa mãn)

d) Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $-m(m+1)+10m \neq 0$

Tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c} = \frac{m+1}{2}$ theo đề bài $\frac{m+1}{2} = 1 \Leftrightarrow m=1$ (thỏa mãn)

e) Ta có:
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2m}{x} + \frac{9}{x^2}} = 0$$
 nên đồ thị hàm số đã cho luôn có một tiệm cận ngang là $y=0$

. Do đó đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận thì đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận đứng.

Phương trình $f(x) = x^2 - 2mx + 9 = 0$ có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có một



$$\text{nghiệm bằng } -3 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 9 = 0 \\ \Delta' = m^2 - 9 > 0 \\ f(-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \\ m^2 - 9 > 0 \\ m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \end{cases}$$

f) Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2 - (2m+1)x + m^2 - 3}$ có 1 tiệm cận ngang là $y = 0$.

Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2 - (2m+1)x + m^2 - 3}$ có đúng hai đường tiệm cận

U Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2 - (2m+1)x + m^2 - 3}$ có đúng 1 tiệm cận đứng

U Phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 - 3 = 0$ có nghiệm kép hoặc phương trình

$x^2 - (2m+1)x + m^2 - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta > 0 \\ 1 - (2m+1) + m^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+1)^2 - 4(m^2 - 3) = 0 \\ (2m+1)^2 - 4(m^2 - 3) > 0 \\ m^2 - 2m - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{13}{4} \\ m = 3 \\ m = -1 \end{cases}$$

Bài tập 2: Xác định tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

a) $y = \frac{x-2}{x^2 - mx + 1}$ có hai tiệm cận đứng

b) $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ có tiệm cận xiên

Lời giải

a) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $g(x) = x^2 - mx + 1$ có hai

$$\text{nghiệm phân biệt khác } 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0 \\ \Delta = m^2 - 4 > 0 \\ g(2) = 2^2 - 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases}$$

b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên đứng khi và chỉ khi phương trình $g(x) = 2x^2 - 3x + m = 0$

không có nghiệm $x = m$ tức là $g(m) \neq 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Giá trị m để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 2m - 1}{x + m}$ đi qua điểm $M(3;1)$ là

A. $m = -3$.

B. $m = -1$.

C. $m = 2$.

D. $m = 3$.

Lời giải

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đi qua điểm $M(3;1)$ nên đồ thị hàm có tiệm cận đứng là $x = 3$

Suy ra $x + m = 0$ có nghiệm là 3 do vậy $3 + m = 0 \Leftrightarrow m = -3$.



Thử lại, với $m = -3 \Rightarrow y = \frac{2x-7}{x-3}$ có $\lim_{x \rightarrow 3^+} y = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-7}{x-3} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 3^-} y = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-7}{x-3} = +\infty$.

Vậy $m = -3$.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x+4}{x-m}$ có tiệm cận đứng?

A. $m > -2$.

B. $m = -2$.

C. $m < -2$.

D. $m \neq -2$.

Lời giải

Để $x = m$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{2x+4}{x-m}$ thì $\begin{cases} v(m) = 0 \\ u(m) \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-m=0 \\ 2m+4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ m \neq -2 \end{cases} \Rightarrow m \neq -2$$

Câu 3: Số các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2025; 2025]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{2x+4}{x-m}$ có tiệm cận đứng nằm bên trái trục tung là

A. 2020.

B. 2025.

C. 4041.

D. 4042.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+4}{x-m}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = m$ nằm bên trái trục tung $\Leftrightarrow m < 0$.

$$\begin{cases} m \in [-2025; 2025] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2025; -2020; \dots; -1\}.$$

Vậy có 2025 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-10; 10]$ sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+4x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng?

A. 19.

B. 15.

C. 16.

D. 17.

Lời giải

Ta có đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+4x-m-3}$ có hai đường tiệm cận đứng khi phương trình $x^2+4x-m-3=0$

$$\text{có hai nghiệm phân biệt khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^2 - (-m-3) > 0 \\ 1^2 + 4 \cdot 1 - m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -7 \\ m \neq 2 \end{cases}$$

Từ đó ta suy ra $m = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Vậy có 16 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 5: Cho đồ thị hàm số $y = \frac{(2m-n)x^2+mx+1}{x^2+mx+n-6}$ nhận trục hoành và trục tung làm hai tiệm cận. Giá trị $m+n$ là

A. 8.

B. 9.

C. 6.

D. -6.

Lời giải

Điều kiện: $x^2+mx+n-6 \neq 0$.

Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 2m-n$.

Vì đồ thị hàm số nhận trục hoành làm tiệm cận ngang nên $2m-n=0$.

Đặt $f(x) = (2m-n)x^2+mx+1$ và $g(x) = x^2+mx+n-6$.



Vì $f(0) \neq 0$ với mọi m, n nên đồ thị nhận trục tung $x = 0$ là tiệm cận đứng khi $g(0) = 0 \Leftrightarrow n = 6$.

Suy ra $m = \frac{n}{2} = 3$. Vậy $m + n = 9$.

- Câu 6:** Số giá trị nguyên của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2 - 2x + m}$ có đúng ba đường tiệm cận.
- A. 5. B. Vô số. C. 3. D. 4.

Lời giải

$\square \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2 - 2x + m} = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$.

Vậy để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2 - 2x + m}$ có đúng ba đường tiệm cận thì đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng $\Leftrightarrow x^2 - 2x + m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 lớn hơn hoặc bằng -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) \geq 0 \\ (x_1 + 1) + (x_2 + 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ m + 2 + 1 > 0 \\ 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 1. \text{ Vì } m \in \square \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0\}.$$

- Câu 7:** Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x^2 - 2mx - m - 2}$. Biết với $m = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}$, $\frac{a}{b}$ tối giản) thì đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận. Tính $a + b$.

- A. $a + b = 7$. B. $a + b = 5$. C. $a + b = 8$. D. $a + b = 6$.

Lời giải

Để đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận thì hoặc phương trình $x^2 - 2mx - m - 2 = 0$ có nghiệm kép $x = 2$ hoặc phương trình $x^2 - 2mx - m - 2 = 0$ phải có hai nghiệm (một nghiệm $x_1 = 2$ và một nghiệm $x_2 \neq 2$).

Do $\Delta' = m^2 + m + 2 > 0, \forall m$ nên ta chỉ xét trường hợp thứ hai phương trình $x^2 - 2mx - m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Thay $x = 2$ vào phương trình ta được $m = \frac{2}{5}$ (thỏa mãn).

Vậy $a = 2, b = 5, a + b = 7$.

- Câu 8:** Có bao nhiêu giá trị của tham số để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng 2 tiệm cận?
- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{mx^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{m - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = m \Rightarrow y = m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng 2 tiệm cận $\Leftrightarrow y = \frac{mx^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng 1 tiệm cận đứng. Ta

$$\text{có: } x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m.1^2 - 1 = 0 \\ m.2^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Vậy có 2 giá trị tham số thỏa mãn yêu cầu đề bài.



- Câu 9:** Cho hàm số $y = \frac{x-2}{mx^2 - 2(m-1)x + m-2}$ có đồ thị (C_m) . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để (C_m) có đúng 2 đường tiệm cận?
- A.** 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Trường hợp 1: $m = 0$, ta được hàm số $y = \frac{x-2}{2x-2}$, suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$; tiệm cận ngang $y = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $m \neq 0$, ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Xét phương trình: $mx^2 - 2(m-1)x + m-2 = 0 (m \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{m-2}{m} \end{cases}$.

Để đồ thị hàm số (C_m) có đúng 2 đường tiệm cận thì đồ thị hàm số (C_m) chỉ có 1 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow mx^2 - 2(m-1)x + m-2 = 0$ hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 2 hoặc có

nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-2}{m} = 2 \\ \frac{m-2}{m} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

- Câu 10:** Cho đường cong $(C): y = \frac{x+a}{x-1}$. Biết điểm M thuộc (C) . Tính tổng các giá trị của tham số a để tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác có diện tích bằng $3\sqrt{2} + 2$.
- A.** $3\sqrt{2} - 2$. **B.** 6. **C.** -2. **D.** $\frac{3\sqrt{2}-4}{2}$.

Lời giải

Tiệm cận đứng $x = 1$; tiệm cận ngang $y = 1$. Ta có: $f'(x) = \frac{-1-a}{(x-1)^2}$

Phương trình tiếp tuyến tại M của (C) là $(d): y = \frac{-1-a}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{x_0+a}{x_0-1}$

Giao điểm của (d) với tiệm cận đứng: $A\left(1; \frac{x_0+2a+1}{x_0-1}\right)$

Giao điểm của (d) với tiệm cận ngang: $B(2x_0-1; 1)$

Giao hai đường tiệm cận của (C) : $I(1; 1)$. Khi đó: $IA = \left|\frac{2a+2}{x_0-1}\right|$; $IB = 2|x_0-1|$.

Ta có: $S_{IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB = |2a+2| = 3\sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ a = \frac{-3\sqrt{2}-4}{2} \end{cases}$

Vậy tổng cần tìm là -2.



Câu 11: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^3+3x^2+m+1}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A. $\begin{cases} m \leq -4 \\ m > 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m < -5 \\ m > -1 \end{cases}$

C. $-5 \leq m < -1$.

D. $\begin{cases} m \leq -5 \\ m > -1 \end{cases}$

Lời giải

Đặt $f(x) = x^3 + 3x^2 + m + 1$; $f'(x) = 3x^2 + 6x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$

Trường hợp 1: $g(1) = 0 \Rightarrow 1 + 3 + m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -5$.

Khi đó $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x+2)^2$

$\Rightarrow y = \frac{x-1}{(x-1)(x+2)^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{1}{9}$;

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^+} y = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+2)^2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} y = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x-1}{(x-1)(x+2)^2} = +\infty$

Nên đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận đứng $x = -2$.

Trường hợp 2: $g(1) \neq 0 \Rightarrow 1 + 3 + m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -5$.

Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận đứng khi phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow g(0).g(-2) > 0 \Leftrightarrow (m+1)(m+5) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -5 \\ m > -1 \end{cases}$

Kết hợp hai trường hợp ta có những giá trị m cần tìm là: $\begin{cases} m \leq -5 \\ m > -1 \end{cases}$

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + (m-1)x + m^2 - 2m + 1}{1-x}$ (1), m là tham số thực. Tìm giá trị của m để đường tiệm

cận xiên của đồ thị hàm số (1) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{2}$.

A. $m = \pm 2$.

B. $m = \pm 3$.

C. $m = \pm 4$.

D. $m = \pm 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ta có $y = \frac{x^2 + (m-1)x + m^2 - 2m + 1}{1-x} = -x - m + \frac{m^2 - m + 1}{1-x}$

Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $\Delta: y = -x - m$.

Tiệm cận xiên cắt hai trục tọa độ tại hai điểm $A(0; -m)$ và $B(-m; 0)$.

Diện tích tam giác OAB là $S = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}|y_A|.|y_B| = \frac{1}{2}m^2$.

Theo giả thiết $S = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m = \pm 1$.

Câu 13: Tìm tổng tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x-m}$ có hai đường tiệm cận tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 5.

A. 2.

B. 4.

C. 0.

D. 5.



Lời giải

Xét hàm nhất biến $y = \frac{x-1}{x-m}$ có tiệm cận đứng $x = m$ và tiệm cận ngang $y = 1$.

Để hai đường tiệm cận tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 5

$$\text{khi và chỉ khi: } |m| \cdot 1 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -5 \end{cases}$$

Vậy có hai giá trị m thỏa mãn và tổng chúng bằng 0.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{nx^2 + 1}{mx + 1}$ ($mn \neq 0$) có đồ thị (C)

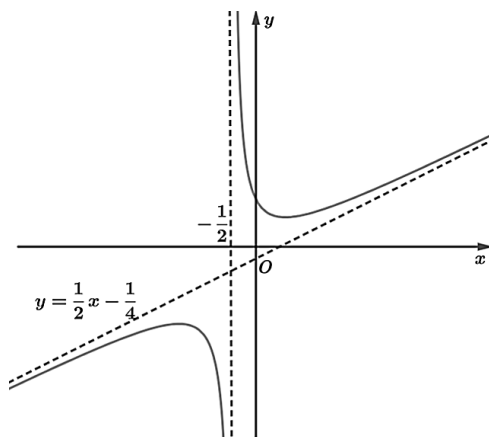
như hình vẽ:

a) $\frac{n}{m} = -\frac{1}{4}$.

b) $m = -\frac{1}{2}$.

c) $m + n = 3$.

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right] = 0$.



Lời giải

a) Sai: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^2 + 1}{mx^2 + x} = \frac{n}{m} = \frac{1}{2}$.

b) Sai: Đường tiệm cận đứng của đồ thị là $x = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m = 2$

c) Đúng: Từ hai ý a) và b) ta có: $\begin{cases} m = 2n \\ m = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 1 \end{cases} \Rightarrow m + n = 3; n = 2 \Rightarrow m + n = 3$

d) Sai: Đường tiệm cận xiên $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right] = -\frac{1}{4}$.

Câu 2: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{(m+1)x^2 + (2m+1)x + m+2}{x+1}$.

a) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = 1$

b) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua điểm $M(1;2)$ khi $m = \frac{1}{2}$

c) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số vuông góc với đường thẳng $d: 3x + 4y - 5 = 0$ khi $m = 1$

d) Giao điểm của hai đường tiệm cận của (C) luôn thuộc Parabol (P): $y = -x^2$

Lời giải

a) Sai: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = -1$

b) Đúng: $y = \frac{(m+1)x^2 + (2m+1)x + m+2}{x+1} = (m+1)x + m + \frac{2}{x+1}$

Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $\Delta: y = (m+1)x + m$

Vì tiệm cận xiên đi qua điểm $M(1;2)$ nên $2 = (m+1) \cdot 1 + m \Leftrightarrow 2m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.



c) Sai: Ta có $\Delta: y = (m+1)x + m \Leftrightarrow (m+1)x - y + m = 0$.

Tiệm cận xiên vuông góc với đường thẳng $d: 3x + 4y - 5 = 0$

nên $(m+1).3 + 4.(-1) = 0 \Leftrightarrow m+1 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$.

d) Đúng: Giao điểm của hai đường tiệm cận là $I(-1; -1) \in (P)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$, với m là tham số

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi $m > 0$

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng khi $m \neq 0$

d) Tập hợp tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{7}{2} \right\}$

Lời giải

a) Điều kiện $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$. Vậy tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi hệ số x^2 trên tử phải bằng 0 suy ra $m = 0$

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng khi $x = -2$ không là nghiệm của tam thức

$$g(x) = mx^2 + 6x - 2 \Leftrightarrow g(-2) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{7}{2}$$

d) Đồ thị hàm số có chắc chắn một tiệm cận xiên (hoặc ngang). Suy ra để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận thì nó phải có một tiệm cận đứng. Điều này tương đương với $m \neq \frac{7}{2}$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m}$ có đồ thị là (C) với m là tham số

a) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận khi $m \neq \frac{1}{3}$

b) Khi $m = 1$ thì đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số có phương trình $y = x - 2$

c) Biết đồ thị (C) có hai đường tiệm cận và khi $m = \pm 2$ thì góc tạo bởi hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số bằng 45° .

d) Gọi S là tập các giá trị của tham số m để đồ thị (C) có đường tiệm cận xiên cắt các trục toạ độ tại hai điểm A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4. Khi đó tổng bình phương các phần tử của tập S bằng 4.

Lời giải

Ta có: $y = mx - 2 + \frac{6m - 2}{x + 3m}$

a) Đúng: Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận khi và chỉ khi $6m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{3}$

b) Đúng: Khi $m = 1$ thì đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số có phương trình $y = x - 2$

Phương trình hai đường tiệm cận là:

$$\Delta_1: x = -3m \Leftrightarrow x + 3m = 0 \quad \Delta_2: y = mx - 2 \Leftrightarrow mx - y - 2 = 0$$

c) Sai: Vectơ pháp tuyến của Δ_1 và Δ_2 lần lượt là $\vec{n}_1 = (1; 0); \vec{n}_2 = (m; -1)$

$$\text{Góc tạo bởi hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số bằng } 45^\circ \Leftrightarrow \cos 45^\circ = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$



$$\Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2m^2 = m^2 + 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

d) Đúng: Hàm số có tiệm cận xiên khi $m \neq 0$ và $m \neq \frac{1}{3}$. Khi đó $A(0; -2); B\left(\frac{2}{m}; 0\right)$

Ta có diện tích tam giác $OAB = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot |-2| \cdot \left|\frac{2}{m}\right| = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$ nên tổng bình phương các phân tử của tập S bằng 4.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+4x+m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì đồ thị phải có đúng 1 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ Phương trình $f(x) = x^2 + 4x + m = 0$ có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x = -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ \Delta' > 0 \\ f(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m = 0 \\ 4 - m > 0 \\ 1 - 4 + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = 3 \end{cases}.$$

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2-1}{x^2-3x+2}$ có đúng 2 đường tiệm cận?

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{m - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = m \Rightarrow$ tiệm cận ngang $y = m$.

Để hàm số có đúng 2 đường tiệm cận thì hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng.

Suy ra $mx^2 - 1 = 0$ có một nghiệm bằng 1 hoặc bằng 2.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} m - 1 = 0 \\ 4m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Với $m = 1 \Rightarrow y = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty \Rightarrow$ tiệm cận đứng $x = 2$.

Với $m = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{\frac{1}{4}x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{x+2}{4(x-1)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty \Rightarrow$ tiệm cận đứng $x = 1$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa bài.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{(2m+1)x^2+3}{\sqrt{x^4+1}}$, m là tham số. Tìm giá trị của m để đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; -3)$.

Lời giải



Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2m + 1 \Rightarrow d: y = 2m + 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Do $A(1; -3) \in d \Leftrightarrow 2m + 1 = -3 \Leftrightarrow m = -2$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{2mx + m}{x - 1}$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8.

Lời giải

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $-2m - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó, đồ thị hàm số có:

Tiệm cận đứng: $x = 1$, song song với Oy và cắt Ox tại điểm $A(1; 0)$.

Tiệm cận ngang: $y = 2m$, song song với Ox và cắt Oy tại điểm $B(0; 2m)$.

Diện tích hình chữ nhật tạo bởi hai đường tiệm cận cùng với hai trục tọa độ là

$$S = OA \cdot OB = 1 \cdot |2m| = 8 \Rightarrow m = \pm 4.$$

Câu 5: Biết đồ thị hàm số $y = \frac{(2m - n)x^2 + mx + 1}{x^2 + mx + n - 6}$ (m, n là tham số) nhận trục hoành và trục tung làm hai đường tiệm cận. Tính $m + n$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} 2m - n = 0 \\ n - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 6 \end{cases}$. Vậy $m + n = 9$.

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x + 1}{x^2 + 2mx + 3m + 4}$ có đúng một đường tiệm cận đứng là

Lời giải

Để đồ thị hàm số $y = \frac{x + 1}{x^2 + 2mx + 3m + 4}$ có đúng một đường tiệm cận đứng thì phương trình

$x^2 + 2mx + 3m + 4 = 0$ có duy nhất một nghiệm hoặc phương trình $x^2 + 2mx + 3m + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm $x = -1$ và một nghiệm x khác -1 .

Trường hợp 1: Phương trình $x^2 + 2mx + 3m + 4 = 0$ có duy nhất một nghiệm

$$\text{Suy ra } \Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 4 \end{cases}.$$

Trường hợp 2: Phương trình có một nghiệm bằng -1 , một nghiệm khác -1 .

$$\text{Khi đó ta có: } (-1)^2 + 2 \cdot (-1)m + 3m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -5.$$

Thử lại thấy với $m = -5$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn điều kiện.

Vậy $m \in \{-5; -1; 4\}$ nên có ba giá trị.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{x - 2}{x^2 - 2mx - m - 2}$. Biết với $m = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, \frac{a}{b}$ tối giản) thì đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận. Tính $a + b$

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - 2}{x^2 - 2mx - m - 2} = 0 \Rightarrow y = 0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.



Đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận khi và chỉ khi đồ thị hàm số có đúng 1 đường tiệm cận đứng
 $\Leftrightarrow x^2 - 2mx - m - 2 = 0(1)$ có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta > 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 + 4m + 8 = 0 \\ 4m^2 + 4m + 8 > 0 \\ 2^2 - 2m \cdot 2 - m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} vn \\ m = \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{2}{5}.$$

Vậy $a = 2, b = 5 \Rightarrow a + b = 7$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - bx^2 - a^2x + a^2b}$ có đồ thị (C) , với a và b là hai tham số nguyên. Hỏi có tất cả bao nhiêu bộ số $(a; b)$ để có đúng hai đường tiệm cận (nếu chỉ xét tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

Lời giải

Ta có: $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - bx^2 - a^2x + a^2b} = \frac{(x-1)(x-4)}{(x-a)(x+a)(x-b)}$, ĐKXD: $\begin{cases} x \neq \pm a \\ x \neq b \end{cases}$.

Đồ thị (C) của hàm số $f(x)$ luôn có một đường tiệm cận ngang nên để đồ thị (C) của hàm số $f(x)$ luôn có hai tiệm cận thì đồ thị (C) phải có đúng một tiệm cận đứng.

Trường hợp 1: Phương trình $(x-a)(x+a)(x-b) = 0$ có nghiệm $x = 1$ và $x = 4$, ta có các bộ $(a; b)$ thỏa mãn là $(1; 4)$, $(-1; 4)$, $(4; 1)$ và $(-4; 1)$.

Trường hợp 2: Phương trình có nghiệm đơn $x = -a = 1$ và nghiệm kép $x = a = b$ ta có bộ $(a; b)$ thỏa mãn là $(-1; -1)$.

Trường hợp 3: Phương trình có nghiệm đơn $x = -a = 4$ và nghiệm kép $x = a = b$ ta có bộ $(a; b)$ thỏa mãn là $(-4; -4)$.

Trường hợp 4: Phương trình có nghiệm bội ba hay $a = b = 0$ ta có bộ $(a; b)$ thỏa mãn là $(0; 0)$

Vậy có tất cả 7 cặp $(a; b)$ thỏa mãn.

-----HẾT-----