



Dạng 2: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc 1 / bậc 1

Để khảo sát hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ thì ta thực hiện theo các bước sau:

• **Bước 1:** Tìm tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$

• **Bước 2:** Khảo sát sự biến thiên của hàm số

□ Tính đạo hàm $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

□ Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

□ Lập bảng biến thiên, xác định chiều biến thiên và các điểm cực trị của hàm số

• **Bước 3:** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị hàm số dựa vào bảng biến thiên

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{x+1}{x-2}$

b) $y = \frac{2x+1}{x+1}$

c) $y = \frac{x+3}{1-x}$

d) $y = \frac{5+x}{2-x}$

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Sự biến thiên: $y' = -\frac{3}{(x-2)^2} < 0$ với mọi $x \neq 2$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Tiệm cận:

□ $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1$. Do

đó, đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

Bảng biến thiên:

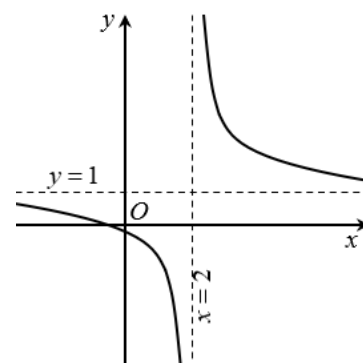
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$			
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Đồ thị

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0; -\frac{1}{2} \right)$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm $(-1; 0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2; 1)$ của hai đường tiệm cận tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi đường tiệm cận này làm trục đối xứng.



làm
hai



b) $y = \frac{2x+1}{x+1}$

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Sự biến thiên: Đạo hàm : $y' = \frac{2(x+1) - (2x-1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ với mọi $x \neq -1$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Tiệm cận:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2x+1}{x+1} = +\infty; \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{2x+1}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 2; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 2$$

Do đó $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên

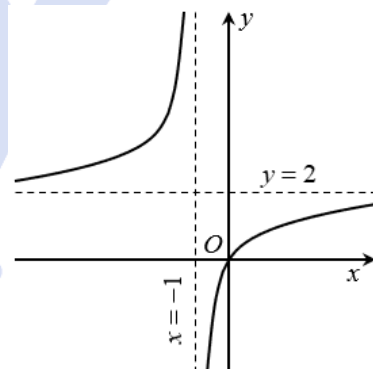
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	$-\infty$

Đồ thị

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0;1)$ và giao với

trục hoành tại điểm $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $(-1; 2)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận này là trục đối xứng.



c) $y = \frac{x+3}{1-x}$

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Sự biến thiên có đạo hàm $y' = \frac{(1-x) + (x+3)}{(1-x)^2} = \frac{4}{(1-x)^2} > 0$ với mọi $x \neq 1$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Tiệm cận

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{1-x} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{1-x} = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{\frac{1}{x} - 1} = -1; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{\frac{1}{x} - 1} = -1$$

Do đó $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

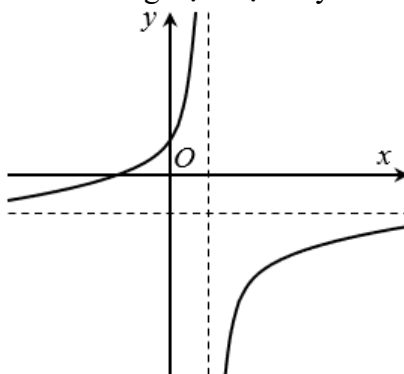
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+		+
y	-1	$+\infty$	-1

Đồ thị

Giao điểm của đồ thị với trục tung là $(0;3)$, giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(-3;0)$.

Đồ thị của hàm số nhận giao điểm $I(1;-1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.



d) $y = \frac{5+x}{2-x}$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Sự biến thiên: Đạo hàm $y' = \frac{7}{(-x+2)^2} > 0$ với mọi $x \neq 2$

Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{1-x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+3}{1-x} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -1$

Do đó $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

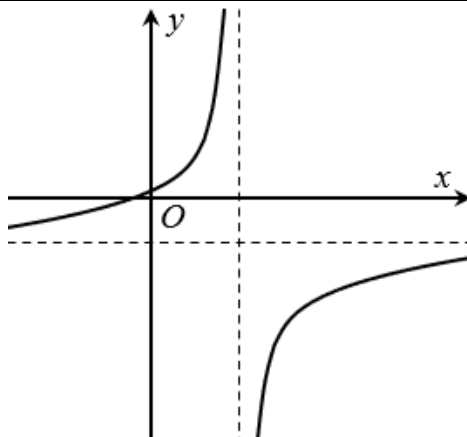
x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	+		+
y	-1	$+\infty$	-1

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Đồ thị

Giao điểm của đồ thị với trục tung là $(0;3)$, giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(-3;0)$.

Đồ thị của hàm số nhận giao điểm $I(1;-1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.



Bài tập 2: Một cốc chứa 30 ml dung dịch KOH (Potassium Hydroxide) với nồng độ 100 mg / ml. Một bình chứa dung dịch KOH khác với nồng độ 8 mg / ml được trộn vào cốc.

- Tính nồng độ KOH trong cốc sau khi trộn x (ml) từ bình chứa, kí hiệu là $C(x)$.
- Coi $C(x)$ là hàm số xác định với $x \geq 0$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số này.
- Giải thích tại sao nồng độ KOH trong cốc giảm theo x nhưng luôn lớn hơn 8 mg/ml

Lời giải

a) Tổng khối lượng KOH sau khi trộn là: $30.100 + 8x = 3000 + 8x$ (mg).

Tổng thể tích dung dịch sau khi trộn là: $30 + x$ (ml)

Nồng độ KOH trong cốc sau khi trộn là $C(x) = \frac{3000 + 8x}{30 + x}$ (mg / ml).

b) $C(x) = \frac{3000 + 8x}{30 + x}, x \geq 0$. Tập xác định của hàm số là $D = [0; +\infty)$.

Sự biến thiên: Đạo hàm $C'(x) = \frac{8(30 + x) - (3000 + 8x)}{(30 + x)^2} = \frac{-2760}{(30 + x)^2} < 0$ với mọi $x \neq -30$.

Hàm số luôn nghịch biến trên $[0; +\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3000 + 8x}{30 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3000}{x} + 8}{\frac{30}{x} + 1} = 8$

Do đó $y = 8$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (phần bên phải trục Oy).

Bảng biến thiên

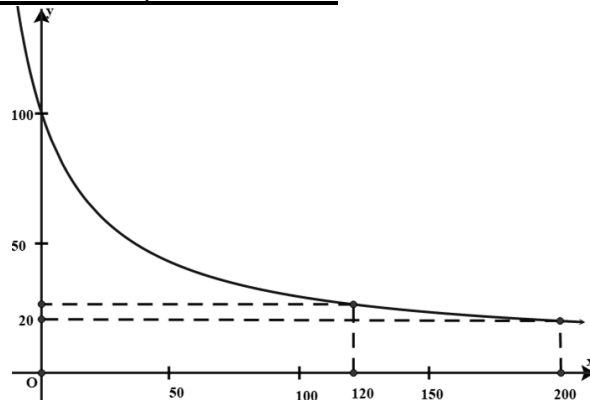
x	0	$+\infty$
y'		—
y	100	8



Đồ thị:

Hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0;100)$.

Hàm số đi qua điểm $\left(120; \frac{132}{5}\right); (200;20)$.

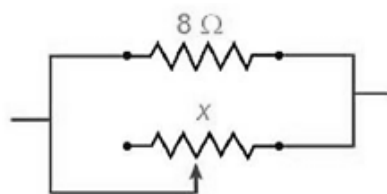


c) Vì $C'(x) = \frac{-2760}{(30+x)^2} < 0, \forall x \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = 8$ nên nồng độ KOH trong cốc giảm theo x nhưng

luôn lớn hơn 8mg/ml .

Bài tập 3: Trong Vật lí, ta biết rằng khi mắc song song hai điện trở R_1 và R_2 thì điện trở tương đương R của

mạch điện được tính theo công thức $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (theo Vật Lí Đại Cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).



Giả sử một điện trở 8Ω được mắc song song với một biến trở như hình bên. Nếu điện trở đó được kí hiệu là $x(\Omega)$ thì điện trở tương đương R là hàm số của x . Vẽ đồ thị của hàm số $y = R(x), x > 0$ và dựa vào đồ thị đã vẽ, hãy cho biết:

a) Điện trở tương đương của mạch thay đổi thế nào khi x tăng.

b) Tại sao điện trở tương đương của mạch không bao giờ vượt quá 8Ω .

Lời giải

Ta có $y = R(x) = \frac{8x}{8+x}, x > 0$ có tập xác định $D = (0; +\infty)$.

Sự biến thiên: Đạo hàm: $y' = \frac{8(8+x) - 8x}{(8+x)^2} = \frac{64}{(8+x)^2} > 0, \forall x > 0$

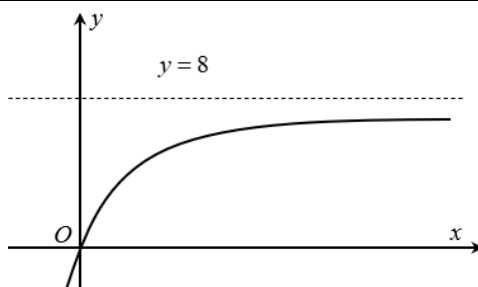
Hàm số luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$ và số không có cực trị. Tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{\frac{8}{x} + 1} = 8$

Vậy $y = 8$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (phần bên phải trục Oy).

Bảng biến thiên

x	0	$+\infty$
y'		+
y	0	8

Đồ thị: Đồ thị hàm số giao với Ox, Oy tại $(0;0)$; Đồ thị hàm số đi qua $\left(1; \frac{8}{9}\right); \left(2; \frac{8}{5}\right)$



- a) Vì $y' = \frac{64}{(8+x)^2} > 0, \forall x > 0$ nên khi x tăng thì điện trở tương đương của mạch cũng tăng.
- b) Vì $y' = \frac{64}{(8+x)^2} > 0, \forall x > 0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 8$ nên điện trở tương đương của mạch không bao giờ vượt quá 8Ω .

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình dưới đây?

x	0	2	$+\infty$
y'	—	—	—
y	2	$+\infty$	2

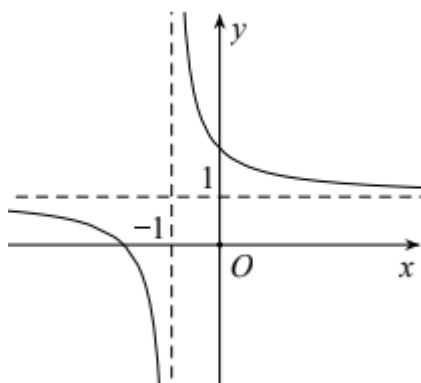
- A. $y = \frac{2x-7}{x-2}$. B. $y = \frac{2x+1}{x+2}$. C. $y = \frac{2x+1}{x-2}$. D. $y = \frac{1-2x}{x-2}$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$ nên ta loại đáp án B.
 Dựa vào bảng biến thiên, đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$ nên ta loại đáp án D.

Xét đáp án A có $y' = \frac{3}{(x-2)^2} > 0$ nên loại đáp án A.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- A. $0 < b < a$. B. $0 < a < b$. C. $b < 0 < a$. D. $a < b < 0$.

Lời giải

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang và tiệm cận đứng lần lượt là $y = 1; x = -1$

$$\Rightarrow \frac{a}{c} = 1; \frac{-d}{c} = -1 \Rightarrow a = c; d = c \Rightarrow a = c = d.$$

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn $-1 \Rightarrow \frac{-b}{a} < -1 \Rightarrow \frac{b}{a} > 1$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ lớn hơn $1 \Rightarrow \frac{b}{d} > 1$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định nên $ad - bc < 0$ mà $a = c = d; \frac{b}{a} > 1 \Rightarrow b > a > 0$

Câu 3: Hàm số nào sau đây mà đồ thị có dạng như hình vẽ bên dưới?

A. $y = \frac{x}{1-x}$.

B. $y = \frac{x+1}{1-x}$.

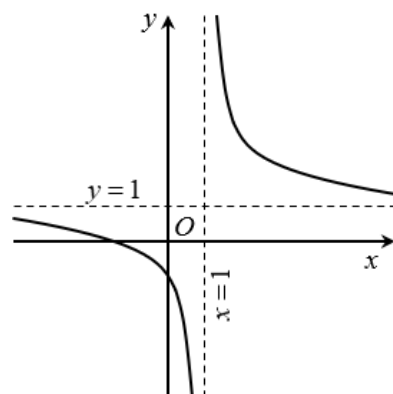
C. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

D. $y = \frac{x}{x-1}$.

Lời giải

Đồ thị trong hình bên có đường tiệm cận ngang $y = 1$ và tiệm cận đứng $x = 1$, và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $M(0;0)$. Mặt khác ta thấy hàm số nghịch biến trên từng khoảng

xác định. Do đó chỉ có hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ thỏa mãn những yếu tố trên.



Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $b < 0 < a$.

B. $0 < b < a$.

C. $b < a < 0$.

D. $0 < a < b$.

Lời giải

Ta có: $y' = \frac{-a+b}{(x-1)^2}$.

Từ đồ thị suy ra hàm số nghịch biến nên: $-a+b < 0 \Leftrightarrow a > b$.

Mặt khác đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -1$ nên $a < 0$. Vậy $b < a < 0$.

Câu 5: Bảng biến thiên sau đây của hàm số nào?

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	2

A. $y = \frac{2x+3}{x+1}$.

B. $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

C. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

D. $y = \frac{x+1}{2x-1}$.

Lời giải



Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$ nên loại $y = \frac{2x-1}{x-1}$, $y = \frac{x+1}{2x-1}$.

Xét phương án $y = \frac{2x+3}{x+1}$: $y = \frac{2x+3}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0, \forall x \neq -1$ suy ra hàm số nghịch biến trên

từng khoảng xác định (loại).

Xét phương án $y = \frac{2x-1}{x+1}$: $y = \frac{2x-1}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$ suy ra hàm số đồng biến trên từng

khoảng xác định (chọn).

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ bên

Tích $a.b$ bằng

A. 2.

B. -3.

C. -2.

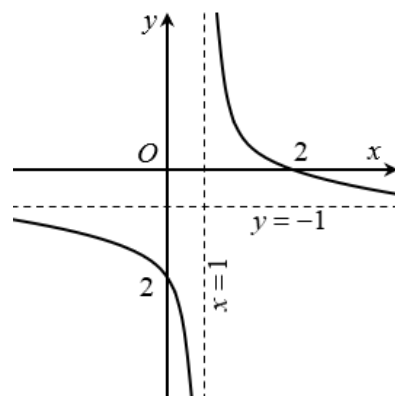
D. 3.

Lời giải

Từ đồ thị ta có tiệm cận ngang $y = -1$ nên $a = -1$.

Và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 nên

$M(2;0) \in y = \frac{-x-b}{x-1} \Leftrightarrow b = -2$. Vậy $a.b = 2$.



Câu 7: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

B. $y = \frac{2x-4}{x-1}$.

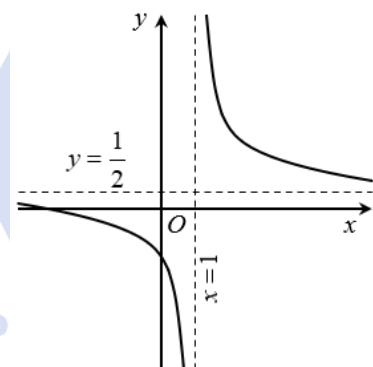
C. $y = \frac{x+1}{2x-2}$.

D. $y = \frac{2x}{3x-3}$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{2}$.

Do đó đáp án **C** thỏa mãn vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2x-2} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{2x-2} = \frac{1}{2}$.



Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ

bên.

Giá trị của $a+2b+3c$ bằng

A. 2.

B. 0.

C. 6.

D. -8.

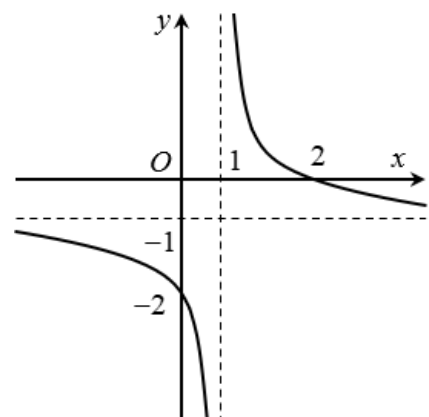
Lời giải

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số: $x = -c$ suy ra $-c = 1 \Leftrightarrow c = -1$.

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số: $y = a$ suy ra $a = -1$.

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $\left(0; \frac{b}{c}\right)$ nên $\frac{b}{c} = -2$

mà $c = -1$ suy ra $b = 2$.





Vậy, $a + 2b + 3c = 0$.

Câu 9: Đường cong ở hình dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \frac{x+a}{bx+c}$, ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị biểu thức $T = a - 3b - 2c$ bằng

- A. 3. B. 2.
C. 0. D. -3.

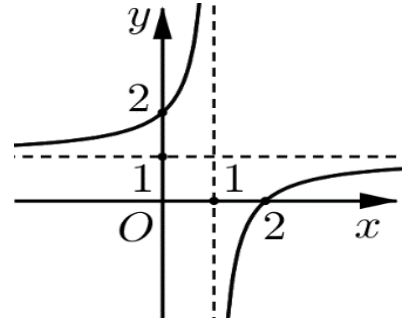
Lời giải

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1 \Rightarrow \frac{1}{b} = 1 \Leftrightarrow b = 1$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1 \Rightarrow -\frac{c}{b} = 1 \Leftrightarrow b = -c \Rightarrow c = -1$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 2) \Rightarrow 2 = \frac{0+a}{1.0+(-1)} \Leftrightarrow a = -2$.

Vậy $T = a - 3b - 2c = (-2) - 3.1 - 2.(-1) = -3$.



Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

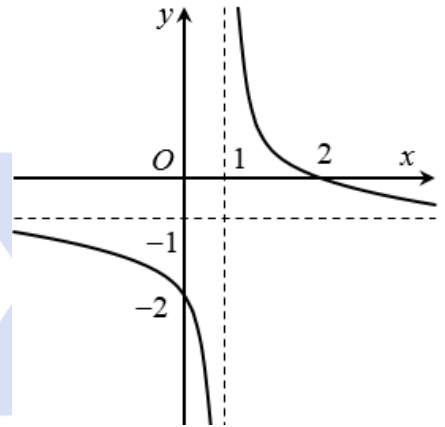
- A. $b < a < 0$. B. $0 < b < a$.
C. $b < 0 < a$. D. $0 < a < b$.

Lời giải

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -1 \Rightarrow$

$$\frac{a}{c} = -1 \Rightarrow a = -1.$$

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(2; 0) \Rightarrow 2a - b = 0 \Rightarrow b = -2$. Vậy $b < a < 0$.



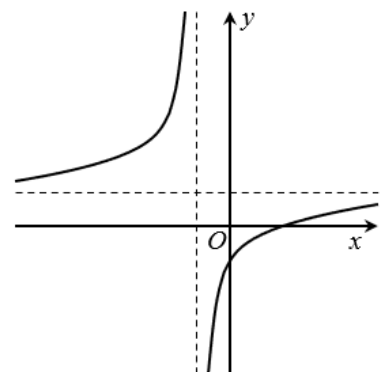
Câu 11: Hình vẽ dưới là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $bd > 0, ad > 0$. B. $bd < 0, ab > 0$.
C. $ad > 0, ab < 0$. D. $ab < 0, ad < 0$.

Lời giải

Từ đồ thị suy ra đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm có hoành độ dương.

Mặt khác, từ $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ suy ra đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$.





Từ đó suy ra : $-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow ab < 0$. Từ hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ suy ra đồ thị có các đường tiệm cận ngang và

đứng lần lượt $y = \frac{a}{c}; x = -\frac{d}{c}$. Từ đồ thị hàm số suy ra $\begin{cases} \frac{a}{c} > 0 \\ -\frac{d}{c} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ac > 0 \\ dc > 0 \end{cases} \Rightarrow adc^2 > 0 \Rightarrow ad > 0$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+1}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $0 < a < b$.

B. $b < 0 < a$.

C. $0 < b < a$.

D. $a < b < 0$.

Lời giải

Ta có: $y' = \frac{a-b}{(x+1)^2}$, $\forall x \neq -1$. Dựa vào đồ thị ta thấy:

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = a \Rightarrow y = a$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Dựa vào đồ thị ta có: $a > 0$.

Đồ thị hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty) \Rightarrow y' < 0, \forall x \neq -1 \Leftrightarrow a - b < 0 \Leftrightarrow a < b \Rightarrow 0 < a < b$.

Câu 13: Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên dưới

A. $y = x^3 - 3x + 2$.

B. $y = \frac{x+2}{x-1}$.

C. $y = \frac{x-2}{x-1}$.

D. $y = -x^4 + 5x^2 - 1$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty$ nên loại phương án **A, D**

Mặt khác quan sát đồ thị thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến nên

$y = \frac{x-2}{x-1}$.

Câu 14: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

A. $y = \frac{x-2}{x-1}$.

B. $y = \frac{x-2}{x+1}$.

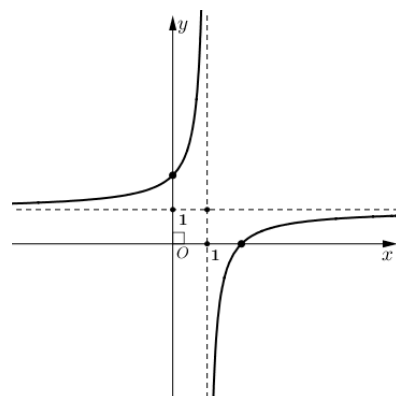
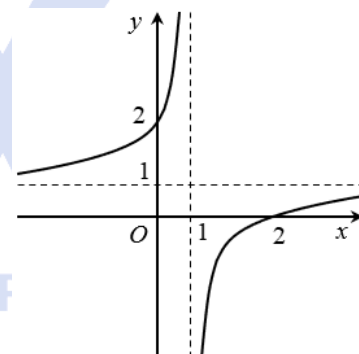
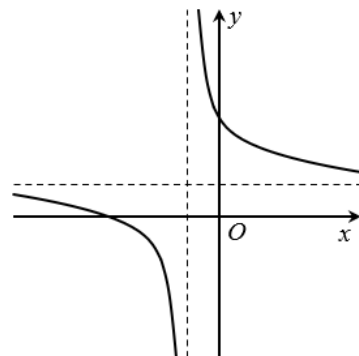
C. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

D. $y = -x^3 + 3x + 2$.

Lời giải

Đường cong có dạng của đồ thị hàm số hữu tỉ bậc 1 trên bậc 1, đồ thị có các đường tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận ngang $y = 1$ nên

chỉ có hàm số $y = \frac{x-2}{x-1}$ thỏa yêu cầu bài toán.





Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{bx-c}{x-a}$ ($a \neq 0$ và $a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a > 0, b < 0, c - ab < 0$.

B. $a > 0, b > 0, c - ab < 0$.

C. $a < 0, b > 0, c - ab < 0$.

D. $a < 0, b < 0, c - ab > 0$.

Lời giải

Vì hàm số $y = \frac{bx-c}{x-a}$ nghịch biến trên tập xác định nên

$$-ab + c < 0 \Leftrightarrow c - ab < 0.$$

Mặt khác tiệm cận đứng $x = a$ nằm bên phải trục tung nên $a > 0$.

Câu 16: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y = x^4 + x^2 + 1$

B. $y = \frac{x+1}{x-1}$

C. $y = x^3 - 3x - 1$

D. $y = \frac{2x+1}{x-1}$

Lời giải

Ta thấy đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng $x = 1$ và một đường tiệm cận ngang $y = 1$

Vậy đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{ax+4-b}{cx+b}$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a > 0, b > 4, c < 0$.

B. $a > 0, 0 < b < 4, c < 0$.

C. $a > 0, b < 0, c < 0$.

D. $a < 0, 0 < b < 4, c < 0$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta thấy tiệm cận ngang, tiệm cận đứng, giao của đồ thị với trục tung và trục hoành

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{a}{c} < 0 \\ -\frac{b}{c} > 0 \\ \frac{4-b}{b} > 0 \\ \frac{b-4}{a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < b < 4 \\ a > 0 \\ c < 0 \end{cases}.$$



Câu 18: Đường cong bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y = \frac{2x-3}{x-1}$.

B. $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

C. $y = \frac{x-3}{x-2}$.

D. $y = \frac{2x+3}{x-1}$.

Lời giải

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận ngang $y=2$.

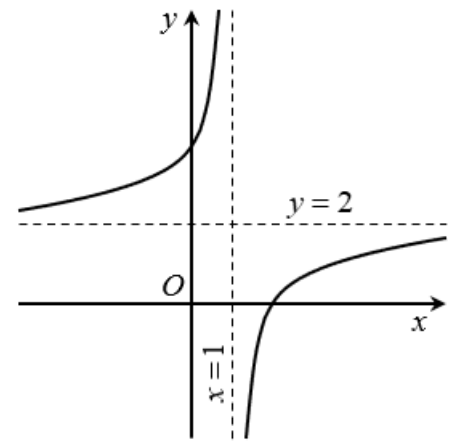
Từ hình vẽ ta được hàm số đồng biến trên các khoảng xác định.

Hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ có đạo hàm $y' = \frac{1}{(x-1)^2} > 0, \forall x \neq 1$.

Hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đạo hàm $y' = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$.

Hàm số $y = \frac{2x+3}{x-1}$ có đạo hàm $y' = \frac{-5}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$.

Do đó hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ thỏa mãn bài toán.



Câu 19: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	$\frac{1}{2}$

Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\begin{cases} b > \frac{2}{3} \\ b < 0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} b > 0 \\ b < -\frac{2}{3} \end{cases}$.

C. $-\frac{2}{3} < b < 0$.

D. $0 \leq b < \frac{2}{3}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-c}{b} \right\}$

Từ bảng biến thiên ta có

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$ nên đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ nên đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có: $\begin{cases} \frac{-c}{b} = 3 \\ \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -3b \\ a = \frac{1}{2}b \end{cases}$ (1). Mặt khác: $y' = \frac{ac-b}{(bx+c)^2} < 0 \Leftrightarrow ac-b < 0$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{1}{2}b \cdot (-3b) - b < 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}b^2 - b < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ b < -\frac{2}{3} \end{cases}$.



Câu 20: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	2	$+\infty$	2

Trong các số a, b, c có bao nhiêu số dương ?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = 2$

$$\text{suy ra } \begin{cases} \frac{-c}{b} = -1 \\ \frac{a}{b} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = b \\ a = 2b \end{cases}$$

Hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó suy ra:

$$ac - b < 0 \Rightarrow 2b^2 - b < 0 \Rightarrow 0 < b < \frac{1}{2}.$$

Suy ra cả ba số a, b, c đều dương.

Câu 21: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình bên dưới. Biết rằng a là một số thực dương, hỏi trong các số b, c, d có tất cả bao nhiêu số dương?

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c} > 0$ nên $c > 0$.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = -\frac{d}{c} < 0$ nên $d > 0$.

.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = -\frac{b}{a} > 0$ nên $b < 0$.

Vậy trong các số b, c, d có 2 số dương

Câu 22: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($a < 0$) có đồ thị như sau:

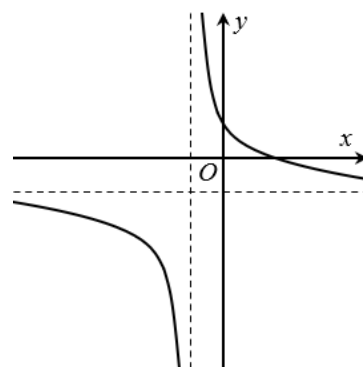
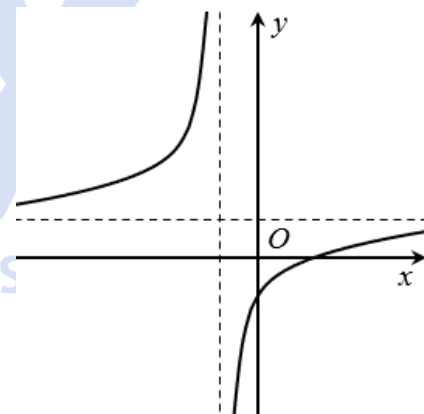
Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $ab < 0, bc < 0, cd > 0$.

B. $ab > 0, bc < 0, cd > 0$.

C. $ab > 0, bc > 0, cd > 0$.

D. $ab < 0, bc > 0, cd > 0$.



Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c} < 0$, tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c} < 0$

Mà theo giả thiết $a < 0$ nên $c > 0$ suy ra $d > 0$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $\left(0; \frac{b}{d}\right)$ và $\frac{b}{d} > 0$ nên $b > 0$

Do đó: $ab < 0, bc > 0, cd > 0$

Câu 23: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-4}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Trong các số a, b, c có bao nhiêu số dương?

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b$ (1).

Tiệm cận đứng: $x = -\frac{c}{b} = 1 \Rightarrow c = -b$ (2).

Ta có: $y' = \frac{ac+4b}{(bx+c)^2} > 0 \Rightarrow ac+4b > 0$ (3).

Từ (1),(2),(3) suy ra: $-b^2+4b > 0 \Leftrightarrow 0 < b < 4$. Suy ra $a > 0, c < 0$.

Câu 24: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. $\begin{cases} ad < 0 \\ bc < 0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} ad < 0 \\ bc > 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} ad > 0 \\ bc < 0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} ad > 0 \\ bc > 0 \end{cases}$.

Lời giải

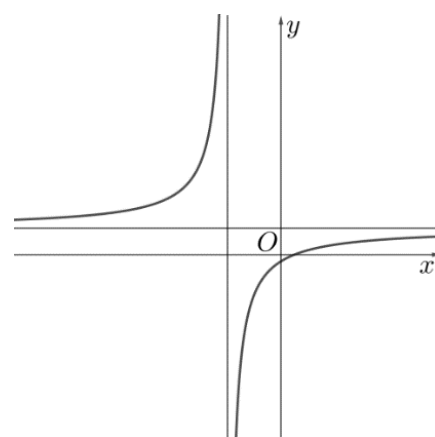
Tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c} > 0 \Rightarrow ac > 0$ (1)

Tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c} < 0 \Rightarrow \frac{d}{c} > 0 \Rightarrow cd > 0$ (2)

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow \frac{b}{d} < 0 \Rightarrow bd < 0$ (3)

Đồ thị cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương $\Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0 \Rightarrow ab < 0$ (4)

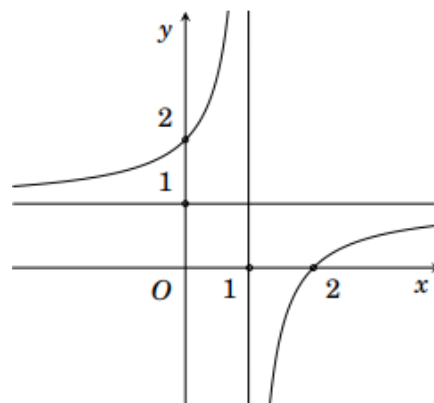
Lấy (3).(4) $\Rightarrow adb^2 > 0 \Rightarrow ad > 0$ (5)



Lấy $(1). (4) \Rightarrow bca^2 < 0 \Rightarrow bc < 0$ (6)

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{x+a}{bx+c}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$
- b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=0$
- c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$
- d) $T = a - 3b - 2c = -3$

Lời giải

- a) Đúng: Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$
- b) Đúng: Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$
- c) Sai: Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$
- d) Đúng: Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$ nên $\frac{1}{b} = 1 \Rightarrow b=1$

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$ nên $-\frac{c}{b} = 1$ mà $b=1 \Rightarrow c=-1$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; 2)$ nên $\frac{a}{c} = 2$ mà $c=-1 \Rightarrow a=-2$

Vậy $T = a - 3b - 2c = -2 - 3.1 - 2.(-1) = -3$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-1}{bx+c}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; \frac{1}{2})$
- b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = \frac{1}{2}$
- c) Đồ thị giao với trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 3

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ $\frac{1}{2}$

- d) $\begin{cases} b > \frac{2}{3} \\ b < 0 \end{cases}$

Lời giải

- a) Đúng: Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$ nên nghịch biến trên khoảng $(-\infty; \frac{1}{2})$
- b) Sai: Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=3$
- c) Đúng: Đồ thị giao với trục hoành tại điểm thuộc nhánh trái của đồ thị, suy ra hoành độ giao điểm này nhỏ hơn 3

- d) Đúng: Từ bảng biến thiên suy ra $\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \\ -\frac{c}{b} = 3 \end{cases}$ (1)



Ta có: $y' = \frac{ac+b}{(bx+c)^2} < 0, \forall x \neq -\frac{c}{b} \Leftrightarrow ac+b < 0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{b}{2} \cdot (-3b) + b < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b > \frac{2}{3} \\ b < 0 \end{cases}$

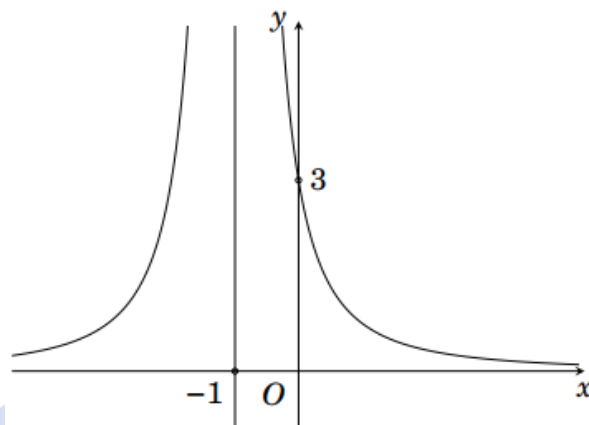
Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nhận $x = -1$ làm tiệm cận đứng như hình vẽ bên. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3; -2]$ bằng 8

a) $f'(0) = 3$

b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$

c) Giá trị của $f(-3)$ bằng 8

d) Giá trị của $f(2)$ bằng 4



Lời giải

a) Đúng: Theo hình vẽ, đồ thị $f'(x)$ qua điểm $(0; 3)$ nên $f'(0) = 3$

b) Sai: Do $f'(x) > 0, \forall x \neq -1$ nên hàm số đã cho $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

c) Sai: Do $f'(x) > 0, \forall x \neq -1 \Rightarrow \max_{[-3; -2]} f(x) = f(-2) = 8$ suy ra $f(-3) \neq 8$

d) Đúng: Ta có $f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 3)$ nên $f'(0) = 3 \Leftrightarrow \frac{ad-bc}{d^2} = 3$

Mặt khác, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có tiệm cận đứng $x = -1$ nên $-c + d = 0$

Vì $f'(x) > 0, \forall x \neq -1 \Rightarrow \max_{[-3; -2]} f(x) = f(-2) = 8 \Leftrightarrow \frac{-2a+b}{-2c+d} = 8$

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} ad-bc = 3d^2 \\ -c+d = 0 \\ b-2a = 8(d-2c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = d \\ a-b = 3d \\ b-2a = -8d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5d \\ b = 2d \\ c = d \end{cases}$

Từ đó suy ra $f(x) = \frac{5dx+2d}{dx+d} = \frac{5x+2}{x+1} \Rightarrow f(2) = 4$

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{mx-1}{2x+m}$ có đồ thị là (C_m) với m là tham số

a) Khi $m = 2$ thì đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 1$

b) Khi $m = 2$ thì giao điểm của các đường tiệm cận có tọa độ $I(1; -1)$

c) Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1; \sqrt{2})$ thì $m = 2$



d) Với mọi giá trị của tham số m thì hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó

Lời giải

a) Đúng: Khi $m = 2$ thì đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 1$

b) Sai: Khi $m = 2$ thì giao điểm của các đường tiệm cận có tọa độ $I(-1;1)$

c) Đúng: Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng khi và chỉ khi $m\left(-\frac{m}{2}\right) - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m^2 + 2 \neq 0$ đúng với mọi giá trị m .

Khi đó đường thẳng $-\frac{m}{2} = -1 \Leftrightarrow m = 2$ là giá trị cần tìm.

d) Đúng: Ta có $y' = \frac{m^2 + 2}{(2x + m)^2} > 0, \forall x \neq -\frac{m}{2}$. Vậy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{(2m-1)x - m}{x + m} (m \neq 0)$ có đồ thị (C_m) . Biết rằng tồn tại duy nhất một đường thẳng

(d) có phương trình $y = ax + b$ sao cho (C_m) luôn tiếp xúc với (d) . Tính giá trị của $a + b$

Lời giải

Cách 1: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) như sau:

$$\frac{(2m-1)x - m}{x + m} = ax + b \Leftrightarrow ax^2 + (am + b - 2m + 1)x + bm + m = 0$$

Do (d) luôn tiếp xúc với (C) nên phải luôn có nghiệm kép với $\forall m \neq 0$

Suy ra $a \neq 0$ và $\Delta' = (am + b - 2m + 1)^2 - 4am(b + 1) = 0, \forall m \neq 0$

$$\Leftrightarrow (a - 2)^2 m^2 + [2(a - 2)(b + 1) - 4a(b + 1)]x + (b + 1)^2 = 0, \forall m \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a - 2)^2 = 0 \\ 2(a - 2)(b + 1) - 4a(b + 1) = 0 \\ (b + 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}. \text{ Vậy } a + b = 1$$

Cách 2: Ta có $y = \frac{(2x-1)m - x}{m + x} \Rightarrow y'(m) = \frac{2x^2}{(m + x)^2} \Rightarrow y'(m) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Dự đoán $A(0; -1)$ là tiếp điểm, nên ta có phân tích như sau

$$y = \frac{(2m-1)x - m}{x + m} = \frac{-2x^2 + 2x^2 + (2m-1)x - m}{x + m} = \frac{-2x^2 + (2x-1)(x+m)}{x + m} = \frac{-2x^2}{x + m} + 2x - 1.$$

Do đó phương trình $\frac{(2x-1)m - x}{m + x} = 2x - 1$ luôn có nghiệm kép $x = 0$ nên $y = 2x - 1$ là đường thẳng luôn tiếp xúc với (C) , suy ra $a = 2, b = -1 \Rightarrow a + b = 1$.

Câu 2: Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x - 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$

(C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương là $(a; b)$. Tính giá trị biểu thức $a + b$

Lời giải



Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x-3}{x+1} = x-2m \Rightarrow x-3 = (x+1)(x-2m)$

$$\Leftrightarrow x-3 = x^2 - 2mx + x - 2m \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 3 - 2m = 0 \quad (1)$$

Đường thẳng $d: y = x - 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x+1} \quad (C)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ

dương $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - (3-2m) > 0 \\ S = 2m > 0 \\ P = 3-2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 > 0 \\ m > 0 \\ m < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \\ m > 0 \\ m < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{3}{2}.$$

Vậy với $1 < m < \frac{3}{2}$ thì đường thẳng $d: y = x - 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x+1} \quad (C)$ tại hai điểm phân

biệt có hoành độ dương nên $a+b = \frac{5}{2}$.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ có đồ thị là đường cong (H) và đường thẳng Δ có phương trình $y = x+1$. Số giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để đường thẳng Δ cắt đường cong (H) tại hai điểm phân biệt nằm về hai nhánh của đồ thị.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x+m}{x-1} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ f(x) = x^2 - x - m - 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$

Đường thẳng Δ cắt đường cong (H) tại hai điểm phân biệt khi

$$\begin{cases} f(1) \neq 0 \\ \Delta_{(*)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4m+5 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{5}{4}; \forall m \in \mathbb{R}.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $(*)$, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = -m - 1 \end{cases}$.

Yêu cầu bài toán $(x_1-1)(x_2-1) < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0 \Leftrightarrow -m-1 < 0 \Leftrightarrow m > -1$

Suy ra $m \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Vậy có 10 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m sao cho đường thẳng $y = x+m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B và $AB \leq 4$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x-1}{x+1} = x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ (x+1)(x+m) = 2x-1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 + (m-1)x + m+1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$



Đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow$ Phương trình (*)

có 2 nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (-1)^2 + (m-1) \cdot (-1) + m + 1 \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - 4(m+1) > 0 \\ 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 6m - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 + 2\sqrt{3} \\ m < 3 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Giao điểm của 2 đồ thị hàm số lần lượt là $A(x_1; x_1 + m)$ và $B(x_2; x_2 + m)$, trong đó x_1, x_2 là 2 nghiệm phân biệt của phương trình (*).

Theo Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m \\ x_1 x_2 = m + 1 \end{cases}$

$$AB = \sqrt{2(x_1 - x_2)^2} \leq 4 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \leq 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 \leq 8 \Leftrightarrow (1 - m)^2 - 4(m + 1) \leq 8$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 6m - 11 \leq 0 \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{5} \leq m \leq 3 + 2\sqrt{5}$$

$$\text{Kết hợp với } \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 + 2\sqrt{3} \\ m < 3 - 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + 2\sqrt{3} < m \leq 3 + 2\sqrt{5} \\ 3 - 2\sqrt{5} \leq m < 3 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Có 1 giá trị nguyên dương của m là 7.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ (C) và đường thẳng (d): $y = x + m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên m thuộc khoảng $(-10; 10)$ để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm về hai phía của trục hoành?

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là: $\frac{x+2}{x+1} = x + m(1)$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ f(x) = x^2 + mx + m - 2 = 0(2) \end{cases}$$

(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4m + 8 > 0 \\ f(-1) = 1 - m + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phương trình (2). Theo Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = m - 2 \end{cases}$.

Đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm về hai phía của trục hoành $\Leftrightarrow y_1 y_2 < 0$

$$\Leftrightarrow (x_1 + m)(x_2 + m) < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + m(x_1 + x_2) + m^2 < 0 \Leftrightarrow m - 2 - m^2 + m^2 < 0 \Leftrightarrow m < 2.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-10; 10) \Rightarrow m \in \{-9; -8; \dots; -1; 0; 1\}$. Vậy có 11 giá trị m .

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$ có đồ thị là (C) (m là tham số thực). Tổng bình phương các giá trị của m để đường thẳng $d: y = m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm A, B sao cho $OA \perp OB$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d là



$$\frac{x^2 + mx - 1}{x - 1} = m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 + mx - 1 = mx - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ g(x) = x^2 + m - 1 = 0 \end{cases}$$

Đường thẳng $d: y = m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm phân

$$\text{biệt khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - m > 0 \\ g(1) = m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; 1) \setminus \{0\}.$$

Gọi $A(x_1; m), B(x_2; m)$. Khi đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

$$\text{Theo định lí Vi-ét ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } OA \perp OB \Leftrightarrow x_1 x_2 + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy tổng bình phương các giá trị của m để đường thẳng $d: y = m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm

$$A, B \text{ sao cho } OA \perp OB \text{ bằng } \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 = 3.$$

Câu 7: Biết rằng có hai giá trị m_1, m_2 của tham số m để đường thẳng $d: y = m - x$ và đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ có đúng một điểm chung. Tính $m_1 + m_2$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ và đường thẳng $d: y = m - x$ là

$$\frac{x}{x-1} = m - x \Leftrightarrow x^2 - mx + m = 0 \quad (1) \quad (x \neq 1)$$

Đồ thị hàm số và đường thẳng d có 1 điểm chung khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 1 nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4 \end{cases} \text{ Vậy } m_1 = 0, m_2 = 4 \Rightarrow m_1 + m_2 = 4 \in \left(\frac{9}{2}; 7\right)$$

Câu 8: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x - 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương là $(a; b)$. Tính $T = a + b$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x - 2m = \frac{x-3}{x+1} \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 2m + 3 = 0$

$$\text{Yêu cầu đề bài} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + 2m - 3 > 0 \\ S = 2m > 0 \\ P = -2m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3, m > 1 \\ m > 0 \\ m < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1 \text{ nên } T = a + b = 1$$



Câu 9: Tìm giá trị nguyên dương của m để đồ thị hàm số $y = \frac{2mx + 3m + 1}{2x - m^2}$ cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng -4 .

Lời giải

Vì đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng -4 nên ta có:

$$\frac{3m+1}{-m^2} = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 3m+1 = 4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m = 1 \\ m = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{4} \end{cases} \text{ vì } m \text{ nguyên dương nên } m = 1$$

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x+m}{x+1}$ cắt đường thẳng $y = 1 - x$ tại hai điểm phân biệt.

Lời giải

Điều kiện $x \neq -1$.

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{2x+m}{x+1} = 1 - x \Leftrightarrow x^2 + 2x + m - 1 = 0 (*)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - (m-1) > 0 \\ 1 - 2 + m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m < 2 \text{ vì } m \text{ nguyên dương nên có hai giá trị của } m \text{ thỏa mãn}$$

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Tìm giá trị nguyên dương của tham số m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 4$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{2x-1}{x-1} = x + m \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 + (m-3)x + 1 - m = 0 \quad (2) \end{cases} (C) \text{ cắt } d \text{ tại hai điểm phân biệt} \Leftrightarrow \text{Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.}$

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ 1^2 + (m-3) \cdot 1 + 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)^2 - 4(1-m) > 0 \\ -1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 5 > 0 \\ -1 \neq 0 \end{cases} \text{ (đúng với mọi } x \in \mathbb{R})$$

Khi đó x_A, x_B là nghiệm phân biệt khác 1 của (2) .

Theo Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_A + x_B = 3 - m \\ x_A \cdot x_B = 1 - m \end{cases}$ và

$$AB = 4 \Leftrightarrow AB^2 = 16 \Leftrightarrow (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 16 \Leftrightarrow 2(x_B - x_A)^2 = 16 \Leftrightarrow (x_B - x_A)^2 = 8.$$

$$\text{Suy ra: } (x_B + x_A)^2 - 4x_A x_B = 8 \Rightarrow (3 - m)^2 - 4(1 - m) = 8 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}.$$



Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $P(2;5)$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tam giác PAB đều.

Lời giải

Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm của phương trình

$$\frac{2x-1}{x+1} = -x + m.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 2x-1 = (-x+m)(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - (m-3)x - m-1 = 0 \quad (1)$$

Ta có $\Delta_{(1)} = (m-3)^2 + 4(m+1) = m^2 - 2m + 13 = (m-1)^2 + 12 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt, hay d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của (1), tọa độ giao điểm của d và (C) là

$$A(x_1; -x_1 + m), B(x_2; -x_2 + m)$$

$$\text{Trung điểm của } AB \text{ là } I\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{-(x_1+x_2)+2m}{2}\right) \equiv I\left(\frac{m-3}{2}; \frac{m+3}{2}\right)$$

Ta có $\overrightarrow{PI} = \left(\frac{m-7}{2}; \frac{m-7}{2}\right)$, vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}_d = (1; -1)$, dễ thấy $\vec{u}_d \cdot \overrightarrow{PI} = 0$ nên $P \equiv I$ hoặc

$PI \perp d$, như vậy hoặc $P \equiv I$ (khi đó P, A, B thẳng hàng) hoặc tồn tại tam giác PAB luôn cân tại P , Suy ra tam giác PAB tồn tại và đều khi và chỉ khi

$$PI = AB \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 8\left(\frac{m-7}{2}\right)^2 = 3[2(x_1-x_2)^2] \Leftrightarrow (m-7)^2 = 3[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]$$

$$\Leftrightarrow (m-7)^2 = 3[(m-3)^2 + 4(m+1)] \Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-5 \end{cases}$$

Vậy $m \in \{-5; 1\}$.

-----HẾT-----

