



Dạng 3: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc 2 / bậc 1

Để khảo sát hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$, $a \neq 0, m \neq 0$ thì ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1:** Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{n}{m} \right\}$
- **Bước 2:** Khảo sát sự biến thiên của hàm số

□ Tính đạo hàm $y' = \frac{am.x^2 + 2an.x + b.n - m.c}{(mx + n)^2}$. Tìm các điểm tại đó $y' = 0$

□ Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

□ Lập bảng biến thiên, xác định chiều biến thiên và các điểm cực trị của hàm số

- **Bước 3:** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị hàm số dựa vào bảng biến thiên

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$

b) $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$

c) $y = \frac{2x^2 - x + 4}{x - 1}$

d) $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3}$

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Sự biến thiên: $y = x + 1 + \frac{1}{x - 2}$.

Ta có: $y' = 1 - \frac{1}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$. Vậy $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.

Trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$ $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên từng khoảng này.

Trên các khoảng $(1; 2)$ và $(2; 3)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng này.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ với $y_{CD} = 1$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ với $y_{CT} = 5$.

$$\square \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = +\infty.$$

$$\text{Tiệm cận: } \lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(x + 1 + \frac{1}{x - 2} \right) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(x + 1 + \frac{1}{x - 2} \right) = +\infty$$

$$\square \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - 2} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x - 2} = 0.$$

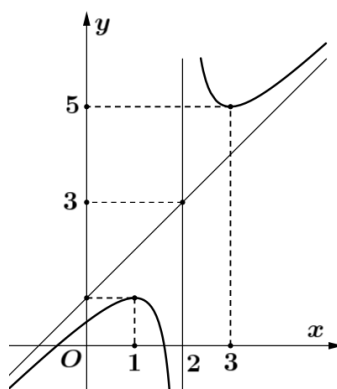
Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 1$.



Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow$ 1	$\searrow$ $-\infty$	$+\infty$ $\searrow$ 5	$\nearrow$ $+\infty$	

Đồ thị:



Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Ta có $y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ hoặc $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; 0\right)$ và $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; 0\right)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2; 3)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

b) Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Sự biến thiên: Viết $y = x - \frac{2}{x+1}$ ta có $y' = 1 + \frac{2}{(x+1)^2} > 0$ với mọi $x \neq -1$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$. Hàm số không có cực trị.

$$\square \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\text{Tiệm cận: } \lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(x - \frac{2}{x+1}\right) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(x - \frac{2}{x+1}\right) = -\infty$$

$$\square \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{x+1}\right) = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2}{x+1}\right) = 0.$$

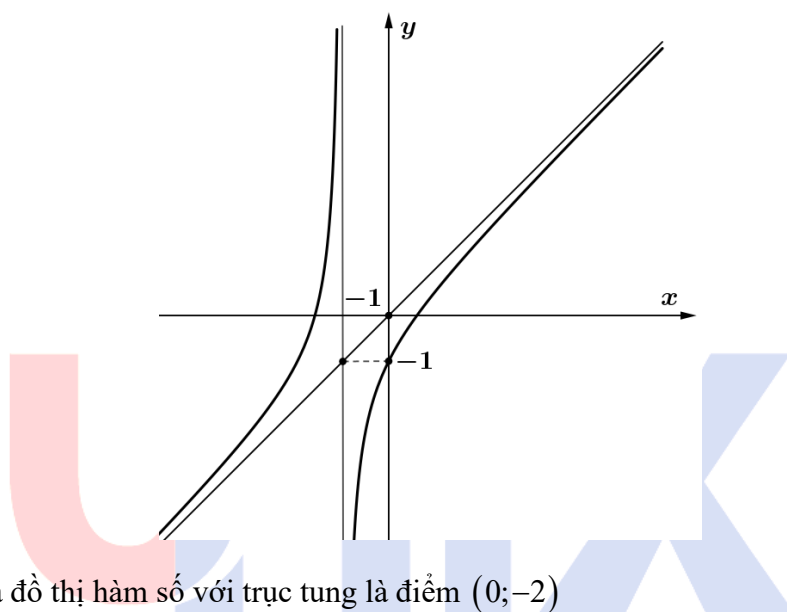


Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Đồ thị :



Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $(0; -2)$

Ta có $y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 1$.

Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $(-2; 0)$ và $(1; 0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-1; -1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

c) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Sự biến thiên: Ta có $y = \frac{2x^2 - x + 4}{x - 1} = 2x + 1 + \frac{5}{x - 1}$

Đạo hàm $y' = 2 - \frac{5}{(x - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{5}{(x - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 - \sqrt{10}}{2}$ hoặc $x = \frac{2 + \sqrt{10}}{2}$.

Trên các khoảng $\left(-\infty; \frac{2 - \sqrt{10}}{2}\right)$ và $\left(\frac{2 + \sqrt{10}}{2}; +\infty\right)$ có $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên từng khoảng này.



Trên các khoảng $\left(\frac{2-\sqrt{10}}{2}; 1\right)$ và $\left(1; \frac{2+\sqrt{10}}{2}\right)$ có $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

Hàm số đạt cực cực đại tại $x = \frac{2-\sqrt{10}}{2}$ và đạt cực tiểu tại $x = \frac{2+\sqrt{10}}{2}$.

$$\square \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = -\infty$$

$$\square \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x - 1} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x - 1} = 0.$$

Do đó $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y = 2x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{1}{2} \left(-\sqrt{10} + 2 \right)$	1	$\frac{1}{2} \left(\sqrt{10} + 2 \right)$	$+\infty$					
y'		+	0	-		-	0	+		
y						$+\infty$				$+\infty$
				</						

Đồ thị

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0; -4)$.

Đồ thị hàm số không cắt trục hoành.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(1; 3)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

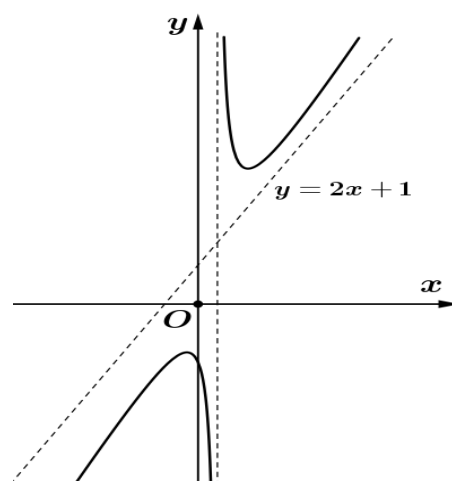
Tập xác định của hàm số là $\square \setminus \{-3\}$.

Sự biến thiên: Ta có $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} = x - 1 + \frac{4}{x + 3}$

Đạo hàm

$$y' = 1 - \frac{4}{(x + 3)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{(x + 3)^2} = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -5 \end{cases}$$

Trên các khoảng $(-\infty; -5)$ và $(-1; +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên các khoảng này.





Trên các khoảng $(-5; -3)$ và $(-3; -1)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên các khoảng này.

Hàm số đạt cực đại tại $x = -5$ với $y_{CD} = -8$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ với $y_{CT} = 0$

$$\square \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 + \frac{3}{x}\right)} = +\infty;$$

$$\square \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 + \frac{3}{x}\right)} = -\infty$$

$$\text{Tiệm cận: } \lim_{x \rightarrow (-3)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} = +\infty; \lim_{x \rightarrow (-3)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} = -\infty$$

$$\square \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x + 3} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x + 3} = 0$$

Do đó $x = -3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y = x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên

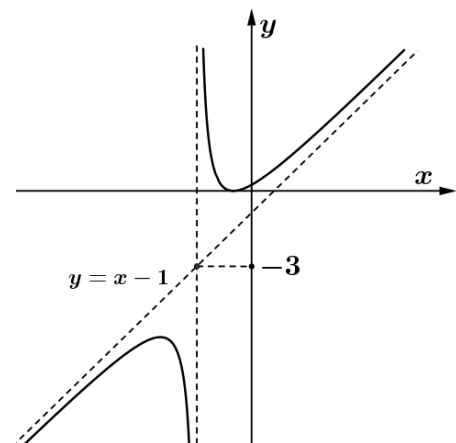
x	$-\infty$	-5	-3	-1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-8	$+\infty$	0	$+\infty$	

Đồ thị:

Giao điểm của đồ thị với trục tung là $\left(0; \frac{1}{3}\right)$

Giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(-1; 0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $(-3; -4)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.



Bài tập 2: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2mx + 2}{x + 1} = x + 2m - 1 + \frac{3 - 2m}{x + 1} (C_m)$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) với $m = 1$.

b) Tìm các giá trị của m để hàm số có cực đại, cực tiểu và khoảng cách từ hai điểm đó tới đường thẳng $d: x + y + 2 = 0$ bằng nhau.



a) Học sinh tự làm

b) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và có đạo hàm: $y' = \frac{x^2 + 2x + 2m - 2}{(x+1)^2}$

Hàm số có cực đại, cực tiểu thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1 .

$$\Leftrightarrow g(x; m) = x^2 + 2x + 2m - 2 = 0 \quad (1) \quad (\text{có hai nghiệm } x_1, x_2 \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 3 - 2m > 0 \\ g(-1; m) = 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{3}{2} \quad (*)$$

Gọi $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số với $x_1, x_2 \neq -1$ là hai nghiệm của phương trình (1).

Theo định lý Vi-ét: $x_1 + x_2 = -2; x_1 \cdot x_2 = 2m - 2$.

Mặt khác đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có phương trình là $y = 2x + m$ cho nên $y_1 = 2x_1 + m; y_2 = 2x_2 + m \Rightarrow A(x_1; 2x_1 + m); B(x_2; 2x_2 + m)$

Theo giả thiết: $\frac{|x_1 + y_1 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_2 + y_2 + 2|}{\sqrt{2}} \Rightarrow |x_1 + y_1 + 2| = |x_2 + y_2 + 2|$

$$\Leftrightarrow |3x_1 + 2m + 2| = |3x_2 + 2m + 2|$$

$$\Leftrightarrow (3x_1 + 2m + 2)^2 - (3x_2 + 2m + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)[3(x_1 + x_2 + 4m + 4)] = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x_1 + x_2 + 4m + 4) = 0, (x_1 \neq x_2) \Leftrightarrow 3(-2 + 4m + 4) = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2} \text{ thỏa mãn } (*)$$

Vậy giá trị m cần tìm là: $m = -\frac{1}{2}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$	-10	-4	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				$+\infty$
			24	0	
				$-\infty$	$-\infty$

A. $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{-x - 4}$.

B. $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{-x - 4}$.

C. $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 4}$.

D. $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x + 4}$.

Lời giải



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 4$ và các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

Điểm cực đại $A(2;0)$ và điểm cực tiểu $B(-10;24)$. Do đó hàm số cần tìm là $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{-x - 4}$

Câu 2: Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$				$+\infty$
			-1		
				-9	
					$-\infty$

A. $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$. B. $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x - 3}$. C. $y = \frac{-x^2 + x + 2}{x - 3}$. D. $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{-x + 3}$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 3$ và các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

Điểm cực đại $A(5;-9)$ và điểm cực tiểu $B(1;-1)$. Do đó hàm số cần tìm là $y = \frac{-x^2 + x + 2}{x - 3}$

Câu 3: Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$	-9	-4	1	$+\infty$
y'		+	0	-	
y					
			-20		
				0	
					$+\infty$

A. $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 4}$. B. $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x + 4}$. C. $y = \frac{x^2 - x + 2}{-x - 4}$. D. $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{-x - 4}$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -4$ và các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

Điểm cực đại $A(-9;-20)$ và điểm cực tiểu $B(1;0)$. Do đó hàm số cần tìm là $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 4}$

Câu 4: Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'		+	
y			
		$+\infty$	
	$-\infty$		$+\infty$

A. $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$. B. $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x - 2}$. C. $y = \frac{x^2 - x}{x - 2}$. D. $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$.

Lời giải

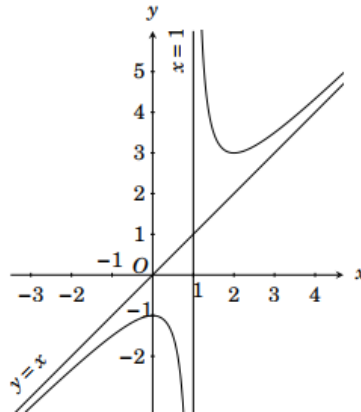
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:



Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$ và có đạo hàm $y' > 0$ với mọi $x \neq 2$

Do đó hàm số cần tìm là $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x - 2}$.

Câu 5: Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$.

B. $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x - 2}$.

C. $y = \frac{x^2 - x}{x - 2}$.

D. $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy:

Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ và tiệm cận xiên $y = x$

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$. Do đó hàm số cần tìm là $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x - 2}$

Câu 6: Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = \frac{x^2 - x}{x + 1}$.

B. $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$.

C. $y = \frac{x^2 + x + 2}{x + 1}$.

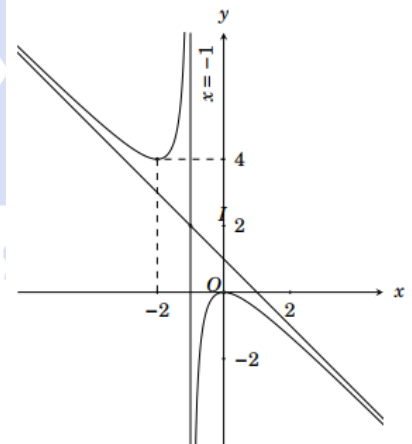
D. $y = \frac{-x^2}{x + 1}$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy:

Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$ và tiệm cận xiên $y = -x + 1$

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$. Do đó hàm số cần tìm là $y = \frac{-x^2}{x + 1}$



Câu 7: Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = \frac{x^2 - x + 4}{x + 1}$.

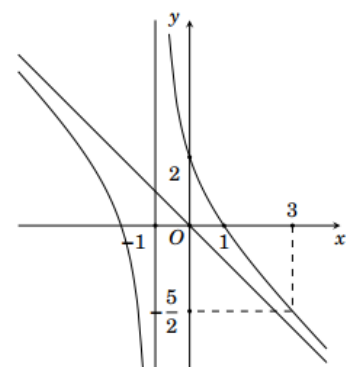
B. $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}$.

C. $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x + 1}$.

D. $y = \frac{x^2 + x - 1}{x + 1}$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy:





Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$ và tiệm cận xiên $y = -x$

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$. Do đó hàm số cần tìm là $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x + 1}$

Câu 8: Đồ thị dưới đây là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$

B. $y = \frac{x^2 + x - 3}{x - 1}$

C. $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{-x + 1}$

D. $y = \frac{x^2 + 3}{-x + 1}$

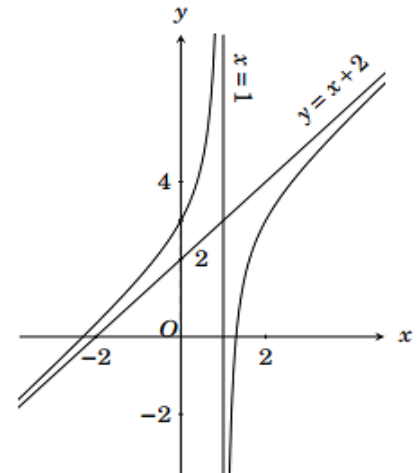
Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy:

Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$ và tiệm cận xiên $y = x + 2$

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

Do đó hàm số cần tìm là $y = \frac{x^2 + x - 3}{x - 1}$



PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$ có đồ thị (C). Khi đó:

a) Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$

b) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 2$

c) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$

d) Đồ thị hàm số (C) nhận điểm $I(-2; 0)$ làm tâm đối xứng

Lời giải

a) Sai: Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

b) Đúng: Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 2$

Giới hạn, tiệm cận: Ta có $y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2} = x + 2 + \frac{1}{x + 2}$

$$\square \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 2 + \frac{1}{x + 2} \right) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 2 + \frac{1}{x + 2} \right) = -\infty$$

$$\square \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x + 2} \right) = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x + 2} \right) = 0$$

c) Đúng: Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$

$$\square \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \left(\frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2} \right) = -\infty; \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \left(\frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2} \right) = +\infty$$



d) Đúng: Đồ thị hàm số (C) nhận điểm $I(-2;0)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 2x + 2}{-x + 1}$ có đồ thị (C) .

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty, 0) \cup (2; +\infty)$

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$ bằng $-\frac{19}{3}$

d) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận xiên là đường thẳng $2x + y = 0$

Lời giải

Ta có $y' = \frac{-2x^2 + 4x}{(-x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0		1	2		$+\infty$
y'		-	0	+	+ 0 -		
y	$+\infty$			$+\infty$			
		$\searrow$		$\nearrow$	$\nearrow$		
		2			-6		
					$\searrow$		
					$-\infty$		

a) Sai: Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty, 0)$ và $(2; +\infty)$

b) Sai: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$

c) Sai: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$ bằng -7 đạt tại $x = \frac{3}{2}$

d) Đúng: Ta có $2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2 - 2x + 2}{-x + 1} - (-2x) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{-x + 1} \right) = 0$ nên đồ thị có tiệm cận xiên là đường thẳng $2x + y = 0$ hay $y = -2x$.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + x + 1}{x + 1}$ có đồ thị (C) .

a) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng khoảng $(-2, -1)$ và $(-1, 0)$

b) Hàm số có hai điểm cực trị.

c) Đồ thị (C) không cắt trục Ox .

d) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(1;2)$

Lời giải



Ta có $y = \frac{-x^2 + x + 1}{x + 1} = -x + 2 - \frac{1}{x + 1}$ có đạo hàm $y' = \frac{-x - 2x}{(x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Khi đó ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$-$
y	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$
				1	$\searrow$
				$-\infty$	$-\infty$

a) Đúng: Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-2, -1)$ và $(-1, 0)$

b) Đúng: Hàm số có hai điểm cực trị.

c) Sai: Mặt khác $y = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x + 1 = 0$ (*)

Vậy phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt. Hay (C) luôn cắt Ox tại hai điểm phân biệt.

d) Đúng: Tiệm cận xiên của đồ thị là $y = -x + 2$ nên đi qua điểm $A(1; 2)$

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x - 3}$ có đồ thị là (C).

a) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là $y = -x - 6$.

b) Đồ thị (C) nhận giao điểm $I(3; -9)$ làm tâm đối xứng.

c) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy .

d) Đồ thị không cắt trục Ox .

Lời giải

a) Đúng: Ta có $y = -x - 6 - \frac{14}{x - 3}$

Khi đó tiệm cận xiên là $y = -x - 6$ và có tiệm cận đứng là $x = 3$.

b) Đúng: Suy ra giao điểm 2 tiệm cận là $I(3, -9)$ là tâm đối xứng.

c) Đúng: Ta có: $y' = \frac{-x + 6x + 5}{(x - 3)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 5 = 0$ (*)

Phương trình (*) luôn có 2 nghiệm $x_1 < 0 < x_2$ nên (C) luôn có 2 điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy .

d) Sai: Ta có $y = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 3x + 4 = 0$. Phương trình luôn có 2 nghiệm (vì $(-1) \cdot 4 < 0$)

Suy ra (C) cắt Ox tại hai điểm phân biệt.



Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$ có đồ thị là (C) .

- Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang
- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm M . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $3x - 4y + 2 = 0$
- Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy .
- Đồ thị không cắt trục Ox .

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ và có đạo hàm $y' = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$					
y'		+	0	-		-	0	+		
y				1			$+\infty$			$+\infty$
									5	

- Sai: Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang
- Đúng: Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $M\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ và $y'(0) = \frac{3}{4}$ nên phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$
- Sai: Hàm số đạt cực trị tại $x = 1$ và $x = 3$ nên 2 điểm cực trị nằm cùng phía đối với Oy .

d) Sai: Ta có $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$ do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục

hoành là $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; 0\right)$ và $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; 0\right)$

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m}$ (1) với m là số thực

- Khi $m = 1$ đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị
- Khi $m = 1$ đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = x - 2$
- Khi $m = 1$ giao điểm của đường tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $I(3; -5)$



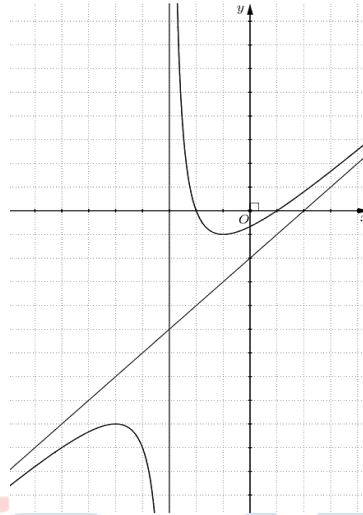
d) Có 2 giá trị m để góc giữa hai tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng 45°

Lời giải

a) Đúng: Khi $m = 1$ đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị

b) Đúng: Khi $m = 1$ đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = x - 2$

c) Sai : Khi $m = 1 \Leftrightarrow y = x - 2 + \frac{4}{x+3}$



d) Đúng: Ta có: $y = \frac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m} = mx - 2 + \frac{6m - 2}{x + 3m}$

Nếu $m = \frac{1}{3}$ đồ thị hàm số không tồn tại hai tiệm cận

Nếu $m \neq \frac{1}{3}$, đồ thị hàm số có hai tiệm cận

$$d_1 : x = -3m \Leftrightarrow x + 3m = 0 \text{ và } d_2 : y = mx - 2 \Leftrightarrow mx - y - 2 = 0$$

$\Rightarrow \vec{n}_1(1;0); \vec{n}_2(m;-1)$ lần lượt là véc tơ pháp của d_1 và d_2 .

$$\text{Góc giữa } d_1 \text{ và } d_2 \text{ bằng } 45^\circ \Leftrightarrow \cos 45^\circ = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Câu 7: Cho hàm số $y = x - \frac{1}{x+1}$

a) Đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$

b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại M . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y = 2x - 1$

c) Tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với nhau

d) Để đường thẳng $y = k$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $OA \perp OB$ khi đó k là nghiệm của phương trình $k^2 - k - 1 = 0$



a) Sai: $y = x - \frac{1}{x+1}$. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Đạo hàm $y' = 1 + \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$: hàm số luôn luôn đồng biến, không có cực đại, cực tiểu.

$\square \lim_{x \rightarrow -1^+} y = \pm\infty : x = -1$ là tiệm cận đứng

$\square \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = x : y = x$ là tiệm cận xiên

b) Đúng: $M(0; -1), y'(0) = 2$

Phương trình tiếp tuyến (T) tại $M : y = 2(x - 0) - 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1$

c) Sai: Tiếp tuyến (T_1) của (C) tại $P(x_1, y_1)$ có hệ số góc $k_1 = y'_{x_1} = 1 + \frac{1}{(x_1 + 1)^2} > 0$

Tiếp tuyến (T_2) của (C) tại $Q(x_2, y_2)$ có hệ số góc $k_2 = y'_{x_2} = 1 + \frac{1}{(x_2 + 1)^2} > 0$

Do $y'_{x_1} > 0, y'_{x_2} > 0$ nên không thể có 2 tiếp tuyến của (C) vuông góc nhau

d) Đúng: $y = x - \frac{1}{x+1} = \frac{x^2 + x - 1}{x+1}$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $y = k$:

$$\frac{x^2 + x - 1}{x+1} = k \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 - (k-1)x - (k+1) = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Do vị trí của (C) trên hệ tọa độ Oxy có thể kết luận $(*)$ luôn có 2 nghiệm phân biệt $x_A, x_B \neq -1$

và $\begin{cases} x_A + x_B = k - 1 \\ x_A \cdot x_B = -(k + 1) \end{cases}; A(x_A; k), B(x_B; k)$

$$\overrightarrow{OA} = (x_A, k), \overrightarrow{OB} = (x_B, k)$$

$$OA \perp OB \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_A x_B + k^2 = 0 \Leftrightarrow -k - 1 + k^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 2(m+1)x - 5}{x-1}$ có đồ thị (C) với m là tham số

a) Khi $m = 0$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y = -x + 1$

b) Khi $m = 0$ thì đồ thị hàm số không cắt Ox .

b) Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì $m > 4$



d) Tồn tại 1 điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho $x_M > 1$ và độ dài IM ngắn nhất (I là tâm đối xứng của (C)) khi đó tung độ $y_M < -4$

Lời giải

a) Đúng: Khi $m = 0$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y = -x + 1$

b) Đúng: Khi $m = 0: y = \frac{-x^2 + 2x - 5}{x - 1} = -x + 1 - \frac{4}{x - 1}$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\text{Đạo hàm } y' = \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 4 \\ x = 3 \Rightarrow y = -4 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} y = \pm\infty: x = 1$ là đường tiệm cận đứng; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -x + 1: y = -x + 1$ là tiệm cận xiên

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$+$
y	$+\infty$	4	$+\infty$	-4	$-\infty$

$$x = 0 \Rightarrow y = 5; y = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x - 5 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

Đồ thị hàm số không cắt Ox .

$$\text{c) Sai: } y = \frac{-x^2 + 2(m+1)x - m - 5}{x - 1}; y' = \frac{-x^2 + 2x - 2m - 2 + m + 5}{(x - 1)^2} = \frac{-x^2 + 2x - m + 3}{(x - 1)^2}$$

Hàm số y có cực đại cực tiểu khi phương trình $-x^2 + 2x - m + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 1 - m + 3 = 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4$$

Nghiệm $x = 1$ không phải là nghiệm của phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow -1 + 2 - m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 4$

Điều kiện sau cùng: $m < 4$

d) Đúng: $x_M > 1 \Rightarrow M$ thuộc nhánh bên phải của (C) nên $I(1;0)$

$$\text{Toạ độ điểm } M\left(m; -m + 1 - \frac{4}{m - 1}\right); IM^2 = (m - 1)^2 + \left[(-m + 1)^2 + \frac{16}{(m - 1)^2} + 8\right]$$

$$= 2(m - 1)^2 + \frac{16}{(m - 1)^2} + 8 \geq 2\sqrt{2}(m - 1) \cdot \frac{4}{(m - 1)} + 8 \Rightarrow IM^2 \geq 8(\sqrt{2} + 1) \Rightarrow IM \geq \sqrt{8(\sqrt{2} + 1)}$$



$$IM \text{ ngắn nhất khi } 2(m-1)^2 = \frac{16}{(m-1)^2} \Leftrightarrow (m-1)^4 = 8 \Leftrightarrow m = 1 + \sqrt[4]{8} \Rightarrow y_M = -\sqrt[4]{8} - \frac{4}{\sqrt[4]{8}} < -4$$

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{-mx^2 + (4m-2)x + 1 - 4m}{x-1}$ có đồ thị là (C) với m là tham số

- Khi $m = 1$ đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị
- Khi $m = 1$ đồ thị hàm số không cắt trục Ox
- Khi $m < -1$ thì hàm số đạt cực đại và cực tiểu trong miền $x > 0$
- Có 2 phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $x - y = 0$

Lời giải

a) Đúng: Khi $m = 1$ đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị

b) Đúng: Khi $m = 1$: $y = \frac{-x^2 + 2x - 3}{x-1} = -x + 1 - \frac{2}{x-1}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

$$y' = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow y = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

$\square \lim_{x \rightarrow 1^\pm} y = \pm\infty$: $x = 1$ là tiệm cận đứng; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -x + 1$: $y = -x + 1$ là tiệm cận xiên

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$	$2\sqrt{2}$	$+\infty$	$-2\sqrt{2}$	$-\infty$

$x = 0 \Rightarrow y = 3$; $y = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x - 3 = 0$ (vô nghiệm) nên đồ thị hàm số không cắt trục Ox

c) Đúng: $y = \frac{-mx^2 + (4m-2)x + 1 - 4m}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{-mx^2 + 2mx - 4m + 2 - 1 + 4m}{(x-1)^2}$

Suy ra $y' = \frac{-mx^2 + 2mx + 1}{(x-1)^2}$. Dấu y' là dấu của tam thức $g(x) = -mx^2 + 2mx + 1$

$g(x)$ có $\Delta' = m^2 + m$; $g(1) = -m + 2m + 1 = m + 1$

$$\text{Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 0 \end{cases}$$



Lúc này hàm số đạt cực đại và cực tiểu tại $x = x_1, x = x_2$ và
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{m} \end{cases}$$

Giả sử $x_1 < x_2$

Theo yêu cầu bài toán:
$$\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 > 0 \text{ (luôn đúng)} \\ -\frac{1}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$$

Giao với điều kiện $\Delta' > 0$ được $m < -1$

d) Đúng: $y'_x = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x-1)^2}$. Đường thẳng $x - y = 0$ có hệ số góc $k = 1$

Để tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = x$ cần và đủ là $y'_x = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x-1)^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ -x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 2x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ x = 2 \Rightarrow y = -3 \end{cases}$$

Có hai tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán:

$$(T_1): y = 1(x - 0) + 3 \Leftrightarrow y = x + 3; (T_2): y = 1(x - 2) - 3 \Leftrightarrow y = x - 5$$

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$ có đồ thị là đường cong (C)

a) Biết hàm số có 2 điểm cực trị khi đó tổng của giá trị cực đại và giá trị cực tiểu bằng -4

b) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;1)$

c) Phương trình tiếp tuyến với (C) vuông góc với đường thẳng $x - 3y - 6 = 0$ đi qua điểm

$$B\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

c) Để phương trình $x^2 + 3x + 3 = m|x + 2|$ có 4 nghiệm phân biệt thì $m > 2$

Lời giải

a) Sai: Biết hàm số có 2 điểm cực trị khi đó tổng của giá trị cực đại và giá trị cực tiểu bằng -4

b) Đúng: $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2} = x + 1 + \frac{1}{x + 2}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ có đạo hàm $y' = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -3 \Rightarrow y = -3 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow -2^\pm} y = \pm\infty$: $x = -2$ là tiệm cận đứng; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = x + 1 \Rightarrow y = x + 1$ là tiệm cận xiên

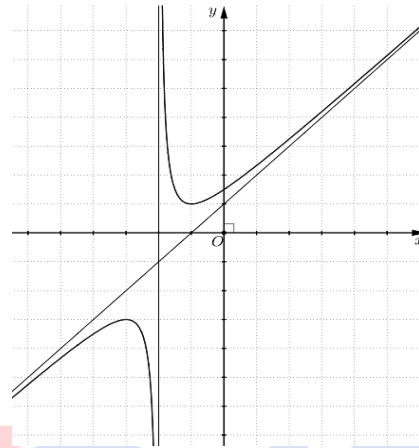


Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-3	$+\infty$	1	$+\infty$	

Với $x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$ đồ thị không cắt trục Ox

Đồ thị:



c) Đúng: Đường thẳng $x - 3y - 6 = 0$ có hệ số góc $k_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow$ tiếp tuyến của

(C) vuông góc với đường thẳng này có hệ số góc $k_2 = -3$

Xét phương trình $y'_x = -3 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2} = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x^2 + 4x + 3 = -3x^2 - 12x - 12 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ 4x^2 + 16x + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2} \Rightarrow y = -\frac{7}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Tại $A\left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ có tiếp tuyến $(T_1): y = -3\left(x + \frac{5}{2}\right) - \frac{7}{2} \Leftrightarrow y = -3x - 11$

Tại $B\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ có tiếp tuyến $(T_2): y = -3\left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = -3x - 3$

d) Sai: $x^2 + 3x + 3 = m|x + 2| \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ \frac{x^2 + 3x + 3}{|x + 2|} = m \end{cases} \Rightarrow$ Số giao điểm của đồ thị (C_1)

$$y = \frac{x^2 + 3x + 3}{|x + 2|} = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2} & (1) \ x > -2 \\ -\left(\frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}\right) & (2): \ x < -2 \end{cases}$$



(1) : bên phải tiệm cận đứng: giữ nguyên (C)

(2) : bên trái tiệm cận đứng: lấy đối xứng của (C) qua trục Ox (C_1) là đường có nét liền, đậm

Số giao điểm của (C_1) và đường thẳng $y = m$ là số nghiệm của phương trình.

Vị trí của đường thẳng $y = m$ để có 4 giao điểm với (C_1) là $m > 3$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trên đồ thị $(C): y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$ có bao nhiêu cặp điểm đối xứng nhau qua điểm $I\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Lời giải

Gọi $M(x; y); M'(x'; y')$ thuộc (C) và đối xứng nhau qua điểm $I\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Khi đó ta có hệ: $\begin{cases} x + x' = 1 \\ y + y' = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 - x \\ y' = 2 - y \end{cases} \Rightarrow M'(1 - x; 2 - y)$.

Vì $M(x; y); M'(x'; y')$ thuộc (C) nên ta có $\begin{cases} y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2} \\ 2 - y = \frac{x'^2 - 3x' + 6}{x' - 2} \end{cases}$

$$\Rightarrow 2 = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2} + \frac{x^2 + x + 4}{-x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0 \\ x \neq -1, x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = -4 \\ x = 3 \Rightarrow y = 6 \end{cases}$$

Vậy trên (C) có đúng một cặp điểm: $M(-2, -4); M'(3; 6)$

Câu 2: Tìm được trên đồ thị $(C): y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$ hai điểm $M(a; b)$ và $N(c; d)$ có khoảng cách đến đường thẳng $3x + y + 6 = 0$ nhỏ nhất. Khi đó tính giá trị biểu thức $T = a + b + c + d$

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow M\left(x_0; \frac{x_0^2 + 4x_0 + 5}{x_0 + 2}\right)$.

Gọi (d) là khoảng cách từ M đến đường thẳng $3x + y + 6 = 0$

$$d = \frac{1}{\sqrt{10}} \left| \frac{4x_0^2 + 16x_0 + 17}{x_0 + 2} \right| = \frac{1}{\sqrt{10}} \left| 4(x_0 + 2) + \frac{1}{x_0 + 2} \right| \geq \frac{4}{\sqrt{10}}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow 4|x_0 + 2| = \frac{1}{|x_0 + 2|} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{-3}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{5}{2} \\ x_0 = \frac{-5}{2} \Rightarrow y_0 = -\frac{5}{2} \end{cases}$$



Vậy có hai điểm thỏa yêu cầu bài toán là $M_1\left(\frac{-3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ và $M_2\left(\frac{-5}{2}; \frac{-5}{2}\right)$

Câu 3: Biết rằng đường thẳng $y = 2x + 2m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$ tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị của tham số m . Tìm hoành độ trung điểm của AB

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$$\frac{x^2 + 3}{x + 1} = 2x + 2m \Leftrightarrow x^2 + 2(1 + m)x + 2m - 3 = 0 \quad (1), (x \neq -1).$$

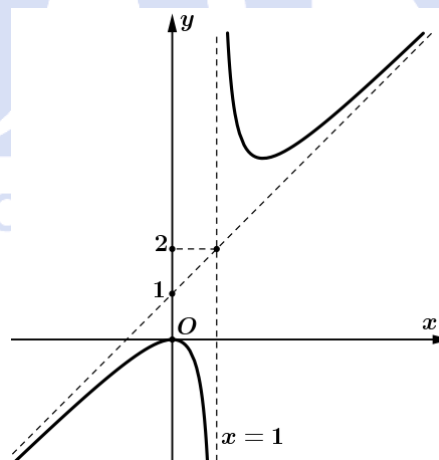
Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân

$$\text{biệt khác } 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (1 + m)^2 - (2m - 3) > 0 \\ (-1)^2 + 2(1 + m) \cdot (-1) + 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4 > 0, \forall m \\ -4 \neq 0 \end{cases}.$$

Khi đó, gọi $A(x_1; 2x_1 + 2m); B(x_2; 2x_2 + 2m)$

Hoành độ trung điểm của AB là $x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{2 + 2m}{2} = -m - 1$.

Câu 4: Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số $y = ax + b + \frac{1}{x + c}$



Khi đó tổng $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $y = ax + b$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số. Từ đồ thị ta suy ra được $y = x + 1$ là tiệm cận xiên nên $a = 1, b = 1$

$x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nên $c = -1$. Vậy $a + b + c = 3$

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + m^2 - 2m - 4}{x - 2}$ (1). Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị cách đều đường thẳng $\Delta: 2x + y + 1 = 0$.

Lời giải



Đạo hàm: $y' = \frac{x^2 - 4x + 4 - m^2}{(x-2)^2}$.

Dấu của y' là dấu của $g(x) = x^2 - 4x + 4 - m^2$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - 4 + m^2 = m^2 > 0 \\ 4 - 8 + 4 - m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Nghiệm của phương trình $g(x) = 0$ là $x_1 = 2 - m$ hoặc $x_2 = 2 + m$.

Suy ra hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(2 - m; 4 - m)$, $B(2 + m; 4 + 3m)$

$$d(A, \Delta) = \frac{|9 - 3m|}{\sqrt{5}}; d(B, \Delta) = \frac{|9 + 5m|}{\sqrt{5}}.$$

$$d(A, \Delta) = d(B, \Delta) \Leftrightarrow |9 - 3m| = |9 + 5m| \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 3m = 9 + 5m \\ 9 - 3m = -9 - 5m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -9 \end{cases}$$

So với điều kiện $m \neq 0$ nhận $m = -9$.

Câu 6: Tìm m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x}$ tại hai điểm A, B sao cho trung điểm đoạn AB thuộc Oy .

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $3x^2 + (1 - m)x - 1 = 0$ ($x \neq 0$)

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 với mọi m

Hoành độ trung điểm I của AB : $x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m-1}{6}$ mà $I \in Oy \Leftrightarrow x_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{m-1}{6} = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 1}{x}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = \sqrt{6}$.

Lời giải

Tọa độ A, B thỏa: $\frac{x^2 - 1}{x} = -x + m \Leftrightarrow 2x^2 - mx - 1 = 0$, ($x \neq 0$) (1)

Ta thấy (1) có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 khác 0 với mọi m .

Gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2) \Rightarrow AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 2(x_1 - x_2)^2$

Áp dụng định lý Viet cho phương trình (1) ta có được:

$$AB^2 = 2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] = \frac{m^2}{2} + 4, AB = 6 \Leftrightarrow \frac{m^2}{2} + 4 = 6 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$



Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{(x^2 - 2x + m)^2 - 3x - m}{x - 3}$ (C) và đường thẳng (d): $y = 2x$ (m là tham số thực).
 Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-15; 15]$ để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

$$\frac{(x^2 - 2x + m)^2 - 3x - m}{x - 3} = 2x \Leftrightarrow (x^2 - 2x + m)^2 - 3x - m = 2x^2 - 6x \quad (x \neq 3)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + m)^2 = 2x^2 - 3x + m \quad (x \neq 3) \quad (*)$$

Đặt: $x^2 - 2x + m = t$ ta được hệ: $\begin{cases} x^2 - 2x + m = t \\ t^2 = 2x^2 - 3x + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - t + m = 0 \\ 2x^2 - t^2 - 3x + m = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow x^2 - t^2 - x + t = 0 \Rightarrow (x - t)(x + t - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = x \\ t = 1 - x \end{cases}$$

Suy ra: $\begin{cases} x^2 - 2x + m = x \\ x^2 - 2x + m = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + m = 0 \quad (1) \\ x^2 - x + m - 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ phải có 4 nghiệm phân biệt khác 3 $\Leftrightarrow (1), (2)$ đều phải có hai nghiệm pb khác 3 và các nghiệm của chúng không trùng nhau. Phương trình (1), (2) đều có hai nghiệm phân

biệt khác 3 khi $\begin{cases} 9 - 4m > 0 \\ 3^3 - 3 \cdot 3 + m \neq 0 \\ 1 - 4(m - 1) > 0 \\ 3^2 - 3 + m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{4} \\ m \neq 0 \\ m < \frac{5}{4} \\ m \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1,25 \\ m \neq 0 \\ m \neq -5 \end{cases} \quad (**)$

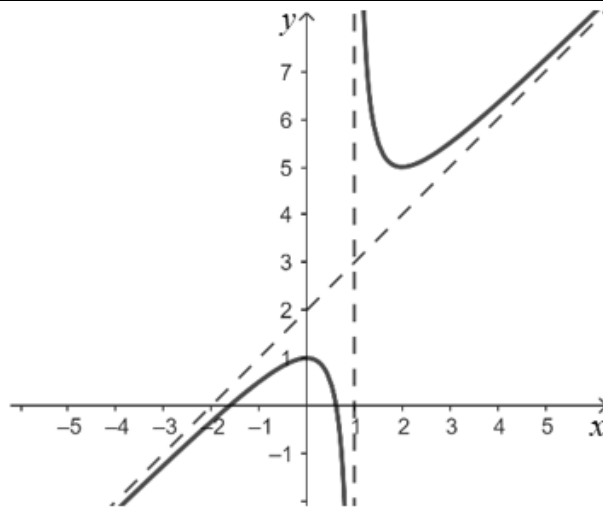
Phương trình (1), (2) không có nghiệm trùng nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + m = 0 \\ x^2 - x + m - 1 = 0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ x^2 - 3x + m = 0 \end{cases}$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x^2 - 3x + m = 0 \end{cases}$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{5}{4} \quad (***)$$

Vậy số giá trị nguyên của $m \in [-15; 15]$ đồng thời thỏa mãn (**) và (***) là 15.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a > 0, m \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi trong các số b, c, m, n có tất cả bao nhiêu số dương?



Lời giải

Ta có: $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a > 0, m \neq 0$); $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-n}{m} \right\}$

Tiệm cận xiên $y = x + 2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx} \right) = \frac{a}{m} = 1 \Leftrightarrow a = m > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{ax^2 + bx + c}{mx + n} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(b+n)x + c}{mx + n} \right] = \frac{b+n}{m} = 2$$

$$\Leftrightarrow b + n = 2m \Leftrightarrow b - m = 2m \Leftrightarrow b = 3m = 3a > 0$$

$$\text{Tiệm cận đứng } x = \frac{-n}{m} = 1 \Leftrightarrow n = -m = -a < 0$$

$$\text{Đồ thị hàm số cắt trục tung tại } y_0 = \frac{c}{n} > 0 \Rightarrow c < 0$$

Câu 10: Số điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x + 10}{x + 2}$ là bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = \frac{2x^2 + 3x + 10}{x + 2} = 2x - 1 + \frac{12}{x + 2}$$

$$\text{Điểm } M(x; y) \in (C) \text{ có tọa độ nguyên thì } \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ 12 : (x + 2) \end{cases}$$

12 có 12 ước số nên có 12 điểm có tọa độ nguyên.

-----HẾT-----