



BÀI 05 ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM GIẢI BÀI TOÁN THỰC TIỄN

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Tốc độ thay đổi của một đại lượng

Ta có đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại điểm $x = a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

- Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t , thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t .
- Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t , thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t .
- Nếu $C = C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.
- Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x+1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87, bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

2 Một số bài toán tối ưu hoá đơn giản

Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của đạo hàm là cung cấp một phương pháp tổng quát, hiệu quả để giải những bài toán tối ưu hoá. Trong mục này, chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí.

Khi giải những bài toán như vậy, khó khăn lớn nhất thường là việc chuyển đổi bài toán thực tế cho bằng lời thành bài toán tối ưu hoá toán học bằng cách thiết lập một hàm số phù hợp mà ta cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của nó, trên miền biến thiên phù hợp của biến số.

Quy trình giải một bài toán tối ưu hoá:

- Bước 1:** Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.
- Bước 2:** Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x , và biểu diễn các đại lượng khác ở Bước 1 theo x . Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x . Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$.
- Bước 3:** Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.



Dạng 1: Bài toán tốc độ thay đổi của một đại lượng

Ta có đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại điểm $x = a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

- Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t , thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t .
- Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t , thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t .
- Nếu $C = C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.
- Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x+1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87, bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 2 m với vận tốc ban đầu 24,5 m/s là $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$ (theo *Vật lý Đại Cương*, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).

a) Tìm vận tốc của vật sau 2 giây.

b) Khi nào vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao lớn nhất đó là bao nhiêu?

c) Khi nào thì vật chạm đất và vận tốc của vật lúc chạm đất là bao nhiêu?

Lời giải

a) Theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm, vận tốc của vật là $v = h'(t) = 24,5 - 9,8t$ (m/s).

Do đó, vận tốc của vật sau 2 giây là $v(2) = 24,5 - 9,8 \cdot 2 = 4,9$ (m/s).

b) Vì $h(t)$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = -4,9 < 0$ nên $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại

$$t = -\frac{b}{2a} = \frac{24,5}{2 \cdot 4,9} = 2,5 \text{ (giây)}. \text{ Khi đó, độ cao lớn nhất của vật là } h(2,5) = 32,625 \text{ (m)}.$$

c) Vật chạm đất khi độ cao bằng 0, tức là $h = 2 + 24,5t - 4,9t^2 = 0$ hay $t \approx 5,08$ (giây).

Vận tốc của vật lúc chạm đất là $v((5,08)) = 24,5 - 9,8 \cdot 5,08 = -25,284$ (m/s).

Vận tốc âm chứng tỏ chiều chuyển động của vật là ngược chiều dương (hướng lên trên) của trục đã chọn (khi lập phương trình chuyển động của vật).



Bài tập 2: Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b . Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

Lời giải

Ta có: $P'(t) = \frac{0,75ae^{-0,75t}}{(b + e^{-0,75t})^2}, t \geq 0$.

Theo đề bài, ta có: $P(0) = 20$ và $P'(0) = 12$.

Do đó, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{a}{b+1} = 20 \\ \frac{0,75a}{(b+1)^2} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 20(b+1) \\ \frac{15}{b+1} = 12. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được $a = 25$ và $b = \frac{1}{4}$.

Khi đó, $P'(t) = \frac{18,75e^{-0,75t}}{\left(\frac{1}{4} + e^{-0,75t}\right)^2} > 0, \forall t \geq 0$, tức là số lượng quần thể nấm men luôn tăng.

Tuy nhiên, do $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{\frac{1}{4} + e^{-0,75t}} = 100$ nên số lượng quần thể nấm men tăng nhưng không vượt quá 100 tế bào.

Bài tập 3: Giả sử chi phí $C(x)$ (nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị của một loại hàng hoá nào đó được cho bởi hàm số $C(x) = 30000 + 300x - 2,5x^2 + 0,125x^3$.

- Tìm hàm chi phí biên.
- Tìm $C'(200)$ và giải thích ý nghĩa.
- So sánh $C'(200)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201.

Lời giải

a) Hàm chi phí biên là $C'(x) = 300 - 5x + 0,375x^2$.

b) Ta có: $C'(200) = 300 - 5 \cdot 200 + 0,375 \cdot 200^2 = 14300$.

Chi phí biên tại $x = 200$ là 14300 nghìn đồng, nghĩa là chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo (đơn vị hàng hoá thứ 201) là khoảng 14300 nghìn đồng.

c) Chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201 là

$$C(201) - C(200) = 1004372,625 - 990000 = 14372,625 \text{ (nghìn đồng)}$$

Giá trị này xấp xỉ với chi phí biên $C'(200)$ đã tính ở câu trên.



Bài tập 4: Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là $C(x) = \frac{300x}{100-x}$, $0 \leq x < 100$ (triệu đồng). Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = C(x)$. Từ đó, hãy cho biết:

- Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?
- Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

Lời giải

Xét hàm số $y = C(x) = \frac{300x}{100-x}$, $0 \leq x < 100$.

Ta có: $y' = \frac{30000}{(100-x)^2} > 0$, với mọi $x \in [0; 100)$. Do đó hàm số luôn đồng biến trên nửa khoảng

$[0; 100)$ và $\lim_{x \rightarrow 100^-} C(x) = \lim_{x \rightarrow 100^-} \frac{300x}{100-x} = +\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 100$.

Bảng biến thiên:

x	0	100
$C'(x)$		+
$C(x)$	0	$+\infty$

- Chi phí cần bỏ ra $C(x)$ sẽ luôn tăng khi x tăng.
- Vì $\lim_{x \rightarrow 100^-} C(x) = +\infty$ (hàm số $C(x)$ không xác định khi $x = 100$) nên nhà máy không thể loại bỏ 100% chất gây ô nhiễm không khí (dù bỏ ra chi phí là bao nhiêu đi chăng nữa).

Bài tập 5: Xét phản ứng hoá học tạo ra chất C từ hai chất A và B : $A + B \longrightarrow C$. Giả sử nồng độ của hai chất A và B bằng nhau $[A] = [B] = a$ (mol/l). Khi đó nồng độ của chất C theo thời gian t ($t > 0$)

được cho bởi công thức: $[C] = \frac{a^2 K t}{a K t + 1}$ (mol/l) trong đó K là hằng số dương.

- Tìm tốc độ phản ứng tại thời điểm $t > 0$.
- Chứng minh nếu $x = [C]$ thì $x'(t) = K(a - x)^2$
- Nêu hiện tượng xảy ra với nồng độ các chất khi $t \rightarrow +\infty$
- Nêu hiện tượng xảy ra với tốc độ phản ứng khi $t \rightarrow +\infty$

Lời giải

- Tìm tốc độ phản ứng tại thời điểm $t > 0$.

Tốc độ phản ứng là đạo hàm của $[C]$ theo biến t

$$\text{Do đó } [C]' = \left(\frac{a^2 K t}{a K t + 1} \right)' = \frac{a^2 K (a K t + 1) - a^2 K t \cdot a K}{(a K t + 1)^2} = \frac{a^2 K}{(a K t + 1)^2}$$



b) Theo câu trên nếu $x = [C]$ thì $x'(t) = \frac{a^2 K}{(aKt + 1)^2}$

Ta lại có $K(a - x)^2 = K \left(a - \frac{a^2 Kt}{aKt + 1} \right)^2 = \frac{a^2 K}{(aKt + 1)^2}$ nên $x'(t) = K(a - x)^2$

c) Ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} [C] = \lim_{x \rightarrow \infty} [C] = \frac{a^2 Kt}{aKt + 1} = a$ (mol/l) nên nồng độ của chất C dần đến a (mol/l)

d) Ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} x'(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^2 K}{(aKt + 1)^2} = 0$ (mol/l) nên tốc độ phản ứng dần đến 0.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = t^2 - \frac{1}{6}t^3$ (m). Tìm thời điểm t (giây) mà tạo đó vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

- A.** $t = 2$. **B.** $t = 0,5$. **C.** $t = 2,5$. **D.** $t = 1$.

Lời giải

Ta có $v(t) = s'(t) = 2t - \frac{1}{2}t^2$. Suy ra $v'(t) = 2 - t$ và $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Bảng biến thiên

t	2		
$v'(t)$	+	0	-
$v(t)$	2 ↗ ↘		

Vậy chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm $t = 2$ (giây).

Câu 2: Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin $12V$ được cho bởi công thức $P = 12I - 0,5I^2$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Tìm công suất tối đa của mạch điện.

- A.** 72. **B.** 12. **C.** $-\frac{1}{192}$. **D.** $\frac{23}{2}$.

Lời giải

Xét hàm số $P = 12I - 0,5I^2$ với $I \geq 0$ có đạo hàm $P' = 12 - I$; $P' = 0 \Leftrightarrow I = 12$.

Bảng biến thiên:

I	0	12	$+\infty$
$P'(I)$		+	0
$P(I)$	72 ↗ ↘		

Công suất tối đa của mạch điện là 72(W) đạt được khi cường độ dòng điện là 12(A).



- Câu 3:** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?
- A. 289 (m/s). B. 105 (m/s). C. 111 (m/s). D. 487 (m/s).

Lời giải

Ta có $v(t) = s' = -6t^2 + 48t + 9$. Xét hàm số $v(t) = -6t^2 + 48t + 9$, $t \in [0; 10]$.

$$\text{Ta có } v'(t) = -12t + 48 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \text{ (Nhận). Ta có } \begin{cases} v(0) = 9 \\ v(4) = 105 \\ v(10) = -111 \end{cases} \Rightarrow \max_{t \in [0; 10]} v(t) = v(4) = 105.$$

- Câu 4:** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức $G(x) = 0,25x^2(30 - x)$ trong đó $x(\text{mg})$ và $x > 0$ là lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng bao nhiêu:
- A. 15mg B. 30mg C. 40mg D. 20mg

Lời giải

$$\text{Ta có: } G(x) = 0,25x^2(30 - x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{40}x^3$$

$$G'(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{40}x^2; G'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - \frac{3}{40}x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 20 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	20	$+\infty$
$G'(x)$		+	-
$G(x)$		↗ 100 ↘	

Dựa vào bảng biến thiên thì bệnh nhân cần tiêm một lượng thuốc 20mg

- Câu 5:** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $G(t) = 45t^2 - t^3$, (kết quả khảo sát được trong 10 tháng vừa qua). Nếu xem $G'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người / ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ:
- A. 25 B. 30 C. 20 D. 15

Lời giải

$$\text{Ta có: } G'(t) = 90t - 3t^2; G''(t) = 90 - 6t = 0 \Leftrightarrow 90 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 15$$

Bảng biến thiên:

t	0	15	$+\infty$
$G''(t)$		+	-
$G(t)$		↗ 675 ↘	

Vậy tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ 15.



Câu 6: Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(h)$ trong ngày cho bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$. Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

- A. $t = 10(h)$ B. $t = 14(h)$ C. $t = 15(h)$ D. $t = 22(h)$

Lời giải

Ta có: $h' = -3\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$.

$$h' = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow t = -2 + 6k, (k \in \mathbb{Z}_{(+)})$$

Ở đây ta chỉ cần xét một số giá trị

k	1	2	3	4
t	4	10	16	22

Ta suy ra được h đạt giá trị lớn nhất khi $t = 10 (h)$

Lưu ý: Ngoài cách trên ta có thể làm như sau

Vì $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Rightarrow 9 \leq 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12 \leq 15$.

Vậy để h lớn nhất thì $\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow t = -2 + 12k, (k \in \mathbb{Z}_{(+)})$

Vậy h đạt giá trị lớn nhất khi $t = 10 (h)$

Câu 7: Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm tính theo công thức $V(t) = \frac{1}{100}\left(30t^3 - \frac{t^4}{4}\right)$

$(0 \leq t \leq 90)$. Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $v(t) = V'(t)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng.

- A. Tốc độ bơm giảm từ phút 60 đến phút thứ 90.
 B. Tốc độ bơm luôn giảm.
 C. Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75.
 D. Cả ba đáp án đều sai

Lời giải

Xét hàm $V' = \frac{9}{10}t^2 - \frac{1}{100}t^3 \quad (0 \leq t \leq 90)$; $V'' = \frac{9}{5}t - \frac{3}{100}t^2 \Rightarrow V'' = 0$ khi $t = 0, t = 60$

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số V' đồng biến trên $(0; 60)$ và nghịch biến trên $(60; 90)$

Câu 8: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã nhận thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $P(n) = 480 - 20n(g)$. Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

- A. 14 B. 13 C. 12 D. 11

Lời giải

Gọi $F(n)$ là hàm cân nặng của n con cá sau vụ thu hoạch trên một đơn vị diện tích



Ta có: $F(n) = (480 - 20n).n = 480n - 20n^2$

Để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất thì cân nặng của n con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ là lớn nhất.

Bài toán trở thành tìm $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

$$F'(n) = 480 - 40n; F'(n) = 0 \Leftrightarrow 480 - 40n = 0 \Leftrightarrow n = 12$$

Học sinh tự lập bảng biến thiên.

Vậy phải thả 12 con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất.

Câu 9: Để giảm nhiệt độ trong phòng từ 28^0C , một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị 0C) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1;10]$. Tìm nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động.

- A. $27,832^0C$. B. $18,4^0C$. C. $26,2^0C$. D. $25,312^0C$.

Lời giải

Xét hàm số $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1;10]$.

$T' = -0,024t^2 - 0,16 < 0, \forall t \in [1;10]$ suy ra hàm số T nghịch biến trên đoạn $[1;10]$.

Nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được là $T_{\min} = T(10) = 18,4^0C$.

Câu 10: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

- A. 2.250.000 B. 2.350.000 C. 2.450.000 D. 2.550.000

Lời giải

Gọi x là giá thuê thực tế của mỗi căn hộ, (x : đồng; $x \geq 2000.000$ đồng)

Ta có thể lập luận như sau:

Tăng giá 100.000 đồng thì có 2 căn hộ bị bỏ trống.

Tăng giá $x - 2.000.000$ đồng thì có bao nhiêu căn hộ bị bỏ trống.

Theo quy tắc tam xuất ta có số căn hộ bị bỏ trống là: $\frac{2(x - 2.000.000)}{100.000} = \frac{x - 2.000.000}{50.000}$

Do đó khi cho thuê với giá x đồng thì số căn hộ cho thuê là:

$$50 - \frac{x - 2.000.000}{50.000} = -\frac{x}{50.000} + 90$$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ, ($F(x)$: đồng).

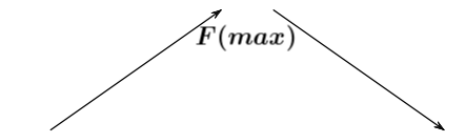
Ta có: $F(x) = \left(-\frac{x}{50.000} + 90\right)x = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$ (bảng số căn hộ cho thuê nhân với giá cho thuê mỗi căn hộ).

Câu toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của $F(x) = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x, x \geq 2.000.000$

$$F'(x) = -\frac{1}{25.000}x + 90; F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{25.000}x + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 2.250.000$$



Bảng biến thiên:

x	2 000 000	2 250 000	$+\infty$
$F'(x)$	+	0	-
$F(x)$			

Suy ra $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2.250.000$

Vậy công ty phải cho thuê với giá 2.250.000 đồng mỗi căn hộ thì được lãi lớn nhất.

Nhận xét:

Sau khi tìm được hàm $F(x) = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$. Ta không cần phải đi khảo sát và vẽ bảng biến thiên như trên. Đề đã cho bốn đáp án x , ta dùng phím CALC của MTCT để thay lần lượt các giá trị vào, cái nào làm cho $F(x)$ lớn nhất chính là giá trị cần tìm.

Câu 11: Một cửa hàng bán bưởi Đoàn Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.

A. 44.000đ

B. 43.000đ

C. 42.000đ

D. 41.000đ

Lời giải

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoàn Hùng, (x : đồng; $30.000 \leq x \leq 50.000$ đồng).

Ta có thể lập luận như sau:

Giá 50.000 đồng thì bán được 40 quả bưởi

Giảm giá 5.000 đồng thì bán được thêm 50 quả.

Giảm giá 50.000 – x thì bán được thêm bao nhiêu quả?

Theo quy tắc tam xuất số quả bán thêm được là: $(50000 - x) \cdot \frac{50}{5000} = \frac{1}{100}(50000 - x)$.

Do đó Số quả bưởi bán được tương ứng với giá bán x : $40 + \frac{1}{100}(50000 - x) = -\frac{1}{100}x + 540$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($F(x)$: đồng).

Ta có: $F(x) = \left(-\frac{1}{100}x + 540\right) \cdot (x - 30.000) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16.200.000$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$F(x) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16.200.000$, điều kiện: $30.000 \leq x \leq 50.000$.

$F'(x) = -\frac{1}{50}x + 840$; $F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{50}x + 840 = 0 \Leftrightarrow x = 42.000$

Vì hàm $F(x)$ liên tục trên $30.000 \leq x \leq 50.000$ nên ta có:

$F(30.000) = 0$; $F(42.000) = 1.440.000$; $F(50.000) = 800.000$

Vậy với $x = 42.000$ thì $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Vậy để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất thì giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoàn Hùng là 42.000 đồng.



- Câu 12:** Một xe khách đi từ Việt Trì về Hà Nội chờ tối đa được là 60 hành khách một chuyến. Nếu một chuyến chờ được m hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách được tính là $\left(30 - \frac{5m}{2}\right)^2$ đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để nhà xe thu được lợi nhuận mỗi chuyến xe là lớn nhất?
A. 30 **B. 40** **C. 50** **D. 60**

Lời giải

Chọn B

Gọi x là số hành khách trên mỗi chuyến xe để số tiền thu được là lớn nhất ($0 < x \leq 60$)

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($F(x)$: đồng)

$$\text{Số tiền thu được: } F(x) = \left(300 - \frac{5x}{2}\right)^2 \cdot x = 90.000x - 1500x^2 + \frac{25}{4}x^3$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$F'(x) = 90000 - 3000x + \frac{75}{4}x^2; F'(x) = 0 \Leftrightarrow 90000 - 3000x + \frac{75}{4}x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 120(\text{loại}) \\ x = 40(\text{t/m}) \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	40	60	
$F'(x)$		+	0	-
$F(x)$				

Vậy để thu được số tiền lớn nhất thì trên mỗi chuyến xe khách đó phải chờ 40 người.

- Câu 13:** Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 ngàn đồng thì có thêm 2 phòng trống. Giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất.
A. 480 ngàn. **B. 50 ngàn.** **C. 450 ngàn.** **D. 80 ngàn.**

Lời giải

Gọi x (ngàn đồng) là giá phòng khách sạn cần đặt ra, $x > 400$ (đơn vị: ngàn đồng).

Giá chênh lệch sau khi tăng $x - 400$.

$$\text{Số phòng cho thuê giảm nếu giá là } x: \frac{(x - 400) + 2}{20} = \frac{x - 400}{10}.$$

$$\text{Số phòng cho thuê với giá } x \text{ là } 50 - \frac{x - 400}{10} = 90 - \frac{x}{10}.$$

$$\text{Tổng doanh thu trong ngày là: } f(x) = x \left(90 - \frac{x}{10}\right) = -\frac{x^2}{10} + 90x.$$

$$f'(x) = -\frac{x}{5} + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 450.$$



Bảng biến thiên:

x	400	450	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↖ 20250 ↘		

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 450$.

Vậy nếu cho thuê với giá 450 ngàn đồng thì sẽ có doanh thu cao nhất trong ngày là 2.025.000 đồng.

Câu 14: Một doanh nghiệp bán xe gắn máy trong đó có loại xe A bán ế nhất với giá mua vào mỗi chiếc xe là 26 triệu VNĐ và bán ra 30 triệu VNĐ, với giá bán này thì số lượng bán một năm là 600 chiếc. Cửa hàng cần đẩy mạnh việc bán được loại xe này nên đã đưa ra chiến lược kinh doanh giảm giá bán và theo tính toán của CEO nếu giảm 1 triệu VNĐ mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi cửa hàng định giá bán loại xe đó bao nhiêu thì doanh thu loại xe đó của cửa hàng đạt lớn nhất.

A. 29 triệu VNĐ **B.** 27, 5 triệu VNĐ **C.** 29, 5 triệu VNĐ **D.** 27 triệu VNĐ

Lời giải

Gọi x (triệu VNĐ) là số tiền cần giảm cho mỗi chiếc xe ($0 \leq x \leq 4$).

Số lượng xe bán ra được trong một năm sau khi giảm giá là: $x.200 + 600$ (chiếc)

Số lợi nhuận thu được từ việc bán xe trong một năm sau khi giảm giá là: $(x.200 + 600)(4 - x)$

Xét hàm số $f(x) = (x.200 + 600)(4 - x) = 200(-x^2 + x + 12)$ ($0 \leq x \leq 4$) đạt giá trị lớn nhất là 2450 khi $x = \frac{1}{2}$.

Câu 15: Công ty du lịch Ban Mê dự định tổ chức một tua xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tua là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tua 100 ngàn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất.

A. 1375000. **B.** 3781250. **C.** 2500000. **D.** 3000000.

Lời giải

Gọi x (triệu đồng) là giá tua.

Giá đã giảm so với ban đầu là $2 - x$.

Số người tham gia tăng thêm nếu giá bán x là: $\frac{(2-x)20}{0,1} = 400 - 200x$.

Số người sẽ tham gia nếu bán giá x là: $150 + (400 - 200x) = 550 - 200x$.

Tổng doanh thu là: $f(x) = x(550 - 200x) = -200x^2 + 550x$;

$$f'(x) = -400x + 550 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{8}$$



Bảng biến thiên

x	0	$\frac{11}{8}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$\frac{3025}{8}$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{11}{8} = 1,375$.

Vậy công ty cần đặt giá tua 1375000 đồng thì tổng doanh thu sẽ cao nhất là 378125000 đồng.

Câu 16: Bác Tô có một cái ao có diện tích $50m^2$ để nuôi cá. Vụ vừa qua bác nuôi với mật độ $20\text{con}/m^2$ và thu được tất cả 1,5 tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá thu được bác ấy cứ giảm đi $8\text{ con}/m^2$ thì tương ứng sẽ có mỗi con cá thành phẩm thu được tăng thêm $0,5\text{kg}$. Hỏi vụ tới bác phải mua bao nhiêu con cá giống để đạt được tổng khối lượng cá thành phẩm cao nhất? (Giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi).

A. 1100 con. **B.** 1000 con. **C.** 500 con. **D.** 502 con.

Lời giải

Số cá vụ vừa rồi Bác Tô nuôi là $20 \cdot 50 = 1000$ con.

Vậy trọng lượng mỗi con là $1,5\text{ kg}$.

Gọi số cá giảm là $8x$ con.

Trọng lượng thu được của vụ tới là: $(1000 - 400x)(1,5 + 0,5x) = -200x^2 - 100x + 1500$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = -\frac{1}{4}$. Vậy số cá giống ban đầu là 1100 con.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5}$

($f(t)$ được tính bằng nghìn người).

a) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người.

b) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1995 là 23 nghìn người.

c) Xem f là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ vậy hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$

d) Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm).

Vào năm 1998 thì tốc độ tăng dân số là $0,125$ nghìn người/năm.

Lời giải

a) Đúng: Vào đầu năm 1980, ta có $t = 10; f(10) = 18$. Vậy số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người.

Vào đầu năm 1995 ta có $t = 25; f(25) = 22$.

Số dân của thị trấn vào đầu năm 1995 là 22 nghìn người.



b) Sai: $f'(t) = \frac{120}{(t+5)^2}$ với mọi $t > 0$; $f(t)$ liên tục trên $[0; +\infty)$ vì liên tục trên khoảng $(-5; +\infty)$

Vậy hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$.

c) Đúng: Tốc độ tăng dân số vào đầu năm 1990 là:

$$f'(20) = \frac{120}{25^2} = 0,192 \text{ do } t = 1990 - 1970 = 20$$

Tốc độ tăng dân số được dự kiến vào năm 2008 của thị trấn là:

$$f'(38) = \frac{120}{43^2} \approx 0,065 \text{ do } t = 2008 - 1970 = 38$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = 0,125 \Leftrightarrow \frac{120}{(t+5)^2} = 0,125 \Leftrightarrow t+5 = \sqrt{\frac{120}{0,125}} \approx 31 \Rightarrow t \approx 26.$$

d) Sai: Vậy vào năm 1996, tốc độ tăng dân số của thị trấn là 0,125.

Câu 2: Dân số của một quốc gia sau t (năm) kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức:

$$N(t) = 100e^{0,012t}, \quad N(t) \text{ được tính bằng triệu người và } 0 \leq t \leq 50$$

a) Dân số của quốc gia vào năm 2030 là: 108,763 (triệu người)

b) Dân số của quốc gia vào năm 2035 là: 125,488 (triệu người)

c) Xem $N(t)$ là hàm số của biến số t xác định trên đoạn $[0; 50]$. Khi đó hàm số $N(t)$ đồng biến trên đoạn $[0; 50]$.

d) Đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm). Vậy vào năm 2040 thì tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/ năm.

Lời giải

a) Đúng: Dân số của quốc gia vào năm 2030 là: $N(7) = 100e^{0,012 \cdot 7} = 100e^{0,084} = 108,763$ (triệu người)

b) Sai: Dân số của quốc gia vào năm 2035 là: $N(12) = 100e^{0,012 \cdot 12} = 100e^{0,144} = 115,488$ (triệu người)

c) Đúng: Trên đoạn $[0; 50]$ ta có: $N'(t) = 0,012 \cdot 100e^{0,012t} = 1,2e^{0,012t} > 0, \forall t \in [0; 50]$

Do đó hàm số $N(t)$ đồng biến trên đoạn $[0; 50]$.

d) Ta có: $N'(t) = 1,2e^{0,012t}$

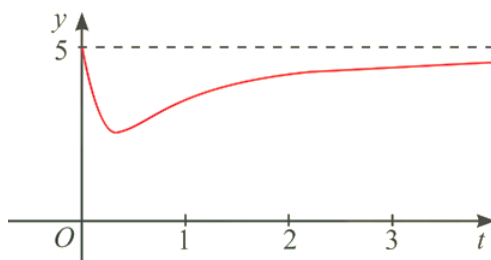
Với tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/ năm ta có:

$$1,6 = 1,2e^{0,012t} \Leftrightarrow e^{0,012t} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow t = \frac{250 \ln \frac{4}{3}}{3} \approx 23,97$$



Vậy vào năm 2046 thì tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/ năm.

Câu 3: Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ ($t \geq 0$) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$. (có đồ thị như đường màu đỏ ở hình bên)



- a) Vào thời điểm $t = 1$ thì nồng độ oxygen trong nước là 3,5 (mg/l)
- b) Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước không vượt quá 5 (mg/l)
- c) Vào thời điểm $t = 0$ thì nồng độ oxygen trong nước cao nhất
- d) Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước thấp nhất là 3,5 (mg/l)

Lời giải

Xét $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$ trên nửa đoạn $[0; +\infty)$ có $y'(t) = \frac{135t^2 - 15}{(9t^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = -\frac{1}{3} \text{ (loại)} \end{cases}$

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
y'		0	+
y	5	$\frac{5}{2}$	5

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min_{[0; +\infty)} y(t) = y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{2}$ và $\max_{[0; +\infty)} y(t) = y(0) = 5$

Vậy vào các thời điểm $t = 0$ thì nồng độ oxygen trong nước cao nhất và $t = \frac{1}{3}$ giờ thì nồng độ oxygen trong nước thấp nhất.

- a) Đúng: Vào thời điểm $t = 1$ thì nồng độ oxygen trong nước là 3,5 (mg/l)
- b) Đúng: Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước không vượt quá 5 (mg/l)
- c) Đúng: Vào thời điểm $t = 0$ thì nồng độ oxygen trong nước cao nhất
- d) Sai: Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước thấp nhất là 2,5 (mg/l)



Câu 4: Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $a(t)$.

- a) Hàm vận tốc là $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$
- b) Hàm gia tốc là $a(t) = 6t - 12$
- c) Trong khoảng từ $t = 0$ đến $t = 2$ thì vận tốc của chất điểm tăng
- d) Từ $t = 2$ trở đi thì vận tốc của chất điểm giảm

Lời giải

- a) Đúng: Hàm $v(t) = x'(t) = 3t^2 - 12t + 9$
- b) Đúng: Hàm $a(t) = v'(t) = 6t - 12$
- c) Sai: Tập xác định: $D = [0; +\infty)$ và $a(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Bảng biến thiên:

t	0	2	$+\infty$
$a(t)$		-	0
$v(t)$	9	-3	5

Vậy trong khoảng từ $t = 0$ đến $t = 2$ thì vận tốc của chất điểm giảm,

- d) Sai: Từ $t = 2$ trở đi thì vận tốc của chất điểm tăng

Câu 5: Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho toạ độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y = t^3 - 12t + 3, t \geq 0$.

- a) Hàm vận tốc là: $v(t) = 3t^2 - 12, t \geq 0$
- b) Hạt chuyển động xuống dưới khi $t > 2$
- c) Quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 3$ là $9m$
- d) Khi $t > 0$ thì hạt tăng tốc

Lời giải

- a) Đúng: Hàm vận tốc là: $v(t) = y' = 3t^2 - 12, t \geq 0$

Hàm gia tốc là: $a(t) = v'(t) = y'' = 6t, t \geq 0$

- b) Sai: Hạt chuyển động lên trên khi $v(t) > 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12 > 0 \Leftrightarrow t > 2$ (do $t \geq 0$)

Hạt chuyển động xuống dưới khi $v(t) < 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12 < 0 \Leftrightarrow 0 \leq t < 2$ (do $t \geq 0$)



c) Đúng: Ta có: $y(3) - y(0) = 3^3 - 12.3 + 3 - 3 = -9$

Vậy quãng đường vật đi được trong thời gian $0 \leq t \leq 3$ là $9m$.

d) Đúng: Hạt tăng tốc khi $v(t)$ tăng hay $v'(t) > 0$. Do đó, $6t > 0 \Leftrightarrow t > 0$

Hạt giảm tốc khi $v(t)$ giảm hay $v'(t) < 0 \Leftrightarrow 6t < 0 \Leftrightarrow t < 0$ (không thỏa mãn do $t \geq 0$)

Câu 6: Một nhà sản xuất trung bình bán được 1000 ti vi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 14 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng, số lượng ti vi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 ti vi mỗi tuần.

a) Gọi p (triệu đồng) là giá của mỗi ti vi, x là số ti vi. Vậy hàm cầu là: $p(x) = -\frac{1}{200}x + 19$

b) Công ty giảm giá 4,5 (triệu đồng)/1 tivi cho người mua thì doanh thu của công ty là lớn nhất

c) Nếu hàm chi phí hằng tuần là $C(x) = 12000 - 3x$ (triệu đồng), trong đó x là số ti vi bán ra trong tuần, vậy có 2300 ti vi được bán ra thì lợi nhuận là cao nhất.

d) Nếu hàm chi phí hằng tuần là $C(x) = 12000 - 3x$ (triệu đồng), trong đó x là số ti vi bán ra trong tuần, nhà sản xuất nên đặt giá bán 8,5 triệu đồng/1 ti vi để lợi nhuận là lớn nhất

Lời giải

a) Đúng: Gọi p (triệu đồng) là giá của mỗi ti vi, x là số ti vi. Khi đó hàm cầu là $p = p(x)$.

Theo giả thiết, tốc độ thay đổi của x tỉ lệ với tốc độ thay đổi của p nên hàm số $p = p(x)$ là hàm số bậc nhất nên. Do đó, $p(x) = ax + b$ (a khác 0).

Giá tiền $p_1 = 14$ ứng với $x_1 = 1000$, giá tiền $p_2 = 13,5$ ứng với $x_2 = 1000 + 100 = 1100$

Do đó, phương trình đường thẳng $p(x) = ax + b$ đi qua hai điểm $(1000; 14)$ và $(1100; 13,5)$.

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 14 = 1000a + b \\ 13,5 = 1100a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{200} \\ b = 19 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)} \Rightarrow p(x) = -\frac{1}{200}x + 19$$

b) Đúng: Vì $p = -\frac{1}{200}x + 19 \Rightarrow x = -200p + 3800$

Hàm doanh thu từ tiền bán ti vi là: $R(p) = px = p(-200p + 3800) = -200p^2 + 3800p$

Để doanh thu là lớn nhất thì ta cần tìm p sao cho R đạt giá trị lớn nhất.

Ta có: $R'(p) = -400p + 3800$; $R'(p) = 0 \Leftrightarrow p = \frac{19}{2}$

Bảng biến thiên:



p	0	$19/2$	$+\infty$
$R'(p)$		+	–
$R(p)$	0	18050	$-\infty$

Vậy công ty nên giảm giá số tiền một chiếc ti vi là: $14 - \frac{19}{2} = 4,5$ (triệu đồng) thì doanh thu là lớn nhất.

c) Sai: Doanh thu bán hàng của x sản phẩm là: $R(x) = x.p(x) = x.\left(\frac{-1}{200}x + 19\right) = \frac{-x^2}{200} + 19x$ (triệu đồng). Do đó, hàm số thể hiện lợi nhuận thu được khi bán x sản phẩm là:

$$P(x) = R(x) - C(x) = \frac{-x^2}{200} + 19x - 12000 + 3x = \frac{-x^2}{200} + 22x - 12000 \text{ (triệu đồng)}.$$

Để lợi nhuận là lớn nhất thì $P(x)$ là lớn nhất. Ta có: $P'(x) = \frac{-x}{100} + 22$; $P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2200$

Bảng biến thiên:

p	0	2200	$+\infty$
$R'(p)$		+	–
$R(p)$	0	12200	$-\infty$

Vậy có 2200 ti vi được bán ra thì lợi nhuận là cao nhất.

Số ti vi mua tăng lên là: $2200 - 1000 = 1200$ (chiếc)

d) Sai: Vậy cửa hàng nên đặt giá bán là: $14 - 0,5 \cdot \frac{1200}{100} = 8$ (triệu đồng)

Câu 7: Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

$$C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500.$$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa.

a) Biểu thức tính $B(x)$ theo x là $B(x) = 220x$ (nghìn đồng).

b) Biểu thức tính $L(x)$ theo x là $L(x) = -x^3 + 3x^2 + 220x - 500$ (nghìn đồng).

c) Hộ làm nghề dệt này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày 10 mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa

d) Lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm có thể đạt được là 1000 nghìn đồng.



Khi bán x mét vải lụa:

a) Đúng: Số tiền thu được là: $B(x) = 220x$ (nghìn đồng).

b) Sai: Lợi nhuận thu được là: $L(x) = B(x) - C(x) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$ (nghìn đồng).

c) Đúng: Hàm số $L(x)$ xác định trên $[1; 18]$.

Đạo hàm $L'(x) = -3x^2 + 6x + 240$; $L(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$ hoặc $x = -8$ (loại).

Trên khoảng $(1; 10)$, $L'(x) > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng này.

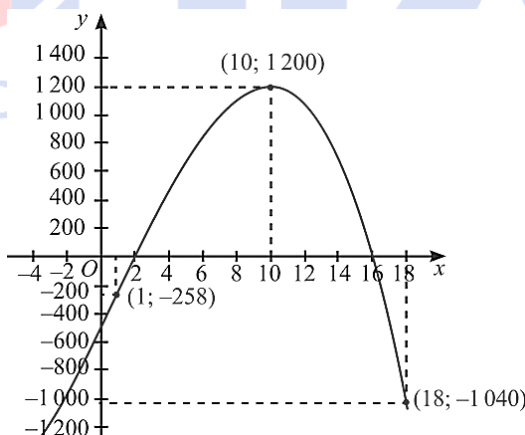
Trên khoảng $(10; 18)$; $L'(x) < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

Cực trị: Hàm số $L(x)$ đạt cực đại tại $x = 10$ và $L_{CB} = L(10) = 1200$.

Bảng biến thiên:

x	1	10	18
$L'(x)$	+	0	-
$L(x)$	-258	1200	-1040

Đồ thị hàm số có điểm cực đại $(10; 1200)$ và đi qua các điểm $(1; -258); (18; -1040)$ như hình.



d) Sai: Quan sát đồ thị hàm số, ta nhận thấy khi $x = 10$ thì hàm số đạt giá trị lớn nhất là 1200. Như vậy, hộ làm nghề dệt cần sản xuất và bán ra mỗi ngày 10 mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa. Lợi nhuận tối đa này là 1200 nghìn đồng.

Câu 8: Giả sử hàm cầu của một sản phẩm độc quyền được cho bởi $P = 400 - 2Q$ và hàm chi phí trung bình $\bar{C} = 0,2Q + 4 + \frac{400}{Q}$ trong đó Q là số đơn vị sản phẩm (P và $\bar{C}$ được tính bằng \$ đối với mỗi đơn vị sản phẩm).

a) $Q = 90$ là lượng sản phẩm bán ra để lợi nhuận thu được tối đa;

b) Giá bán để lợi nhuận thu được tối đa là 400\$



c) Lợi nhuận tối đa là 17420\$

d) Nếu chính phủ đánh thuế 22\$ / một đơn vị sản phẩm thì giá bán 390\$ để lợi nhuận thu được tối đa

Lời giải

Ta có: Lợi nhuận = Tổng doanh thu - Tổng chi phí.

Tổng doanh thu là R và tổng chi phí là C được cho bởi $R = PQ = 400Q - 2Q^2$

Và $C = Q\bar{C} = 0,2Q^2 + 4Q + 400$ nên lợi nhuận $P = R - C = 400Q - 2Q^2 - (0,2Q^2 + 4Q + 400)$.

Hay $P(Q) = 396Q - 2,2Q^2 - 400$.

a) Đúng: Để tối đa hóa lợi nhuận, ta cho $P'(Q) = 0 \Leftrightarrow 396 - 4,4Q = 0 \Leftrightarrow Q = 90$.

Ta có $P''(Q) = -4,4 < 0$. Vậy P đạt cực đại tại $Q = 90$.

b) Sai: Thay $Q = 90$ vào hàm cầu ta được giá bán trên mỗi sản phẩm để lợi nhuận thu được tối đa: $P = 400 - 2.90 = 220$.

c) Đúng: Lợi nhuận tối đa: $P(90) = 396(90) - 2,2(90)^2 - 400 = 17420$.

d) Sai: Khi chi phí đánh thuế 22\$/mỗi đơn vị sản phẩm, tổng chi phí tăng $22Q$. Hàm chi phí mới là $\bar{C}_1 = 0,2Q^2 + 4Q + 400 + 22Q$ và hàm lợi nhuận mới là

$$P = 400Q - 2Q^2 - (0,2Q^2 + 4Q + 400 + 22Q) = 374Q - 2,2Q^2 - 400$$

Ta có $P'_1(Q) = 0 \Leftrightarrow 374 - 4,4Q = 0 \Leftrightarrow Q = 85$.

Vì $P''_1(Q) = -4,4 < 0$ nên để thu được lợi nhuận tối đa, nhà độc quyền phải sản xuất 85 đơn vị sản phẩm với mức giá $P_1 = 400 - 2.85 = 230$ \$, do mức giá này chỉ hơn 10\$ so với trước đó nên chỉ một phần thuế được tính vào người tiêu dùng, phần thuế còn lại do nhà sản xuất gánh chịu. Lợi nhuận bây giờ là 15495.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho biết điện lượng truyền trong dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q(t) = 2t^2 + t$, trong đó t được tính bằng giây (s) và Q được tính theo Culong (C). Tính cường độ dòng điện tại thời điểm $t = 4$ s.

Lời giải

Cường độ dòng điện tại thời điểm $t = 4$ s là $Q'(t) = I(t) = 4t + 1 \Rightarrow t(4) = 17$.

Câu 2: Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$ trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?

Lời giải



Ta có: $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t + 1$.

Nhận xét: $v(t)$ có đồ thị là một parabol nên trong 5s đầu tiên vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng 13 tại $t = 2s$.

Câu 3: Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là $s(t)$ (km) là hàm phụ thuộc theo biến t (giây) tuân theo biểu thức sau: $s(t) = e^{t^2+3} + 2te^{3t+1}$ (km). Vận tốc của tên lửa sau 1 giây là $m.e^n$ (km/s). Tính $T = m + n$ (Biết hàm biểu thị vận tốc là đạo hàm cấp một của hàm biểu thị quãng đường theo thời gian)?

Lời giải

Ta có: $v(t) = s'(t) = 2te^{t^2+3} + 2e^{3t+1} + 6te^{3t+1} \Rightarrow v(1) = 2e^4 + 2e^4 + 6e^4 = 10e^4$ (km/s)

Vậy $\begin{cases} m = 10 \\ n = 4 \end{cases} \Rightarrow T = m + n = 10 + 4 = 14$

Câu 4: Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ độ cao 2 m với vận tốc ban đầu là 24,5 (m/s). Trong Vật lý, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí thì độ cao h (mét) của vật sau t (giây) được cho bởi công thức $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$. Hỏi sau bao nhiêu giây thì vật đạt độ cao lớn nhất?

Lời giải

Xét hàm số: $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $h'(t) = -9,8t + 24,5$; $h'(t) = 0 \Leftrightarrow -9,8t + 24,5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$h'(t)$	+	0	-
$h(t)$	$-\infty$	$\frac{261}{8}$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $t = \frac{5}{2}$

Vậy thời điểm vật đạt độ cao lớn nhất là $t = \frac{5}{2}$ giây

Câu 5: Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật Logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}$, $t \geq 0$, trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

Lời giải



Ta có: $f'(t) = \frac{-5000(1+5e^{-t})'}{(1+5e^{-t})^2} = \frac{25000e^{-t}}{(1+5e^{-t})^2}$. Tốc độ bán hàng là lớn nhất khi $f'(t)$ lớn nhất.

Đặt $h(t) = \frac{25000e^{-t}}{(1+5e^{-t})^2}$ có $h'(t) = \frac{-25000e^{-t}(1+5e^{-t})^2 - 2 \cdot (-5e^{-t}) \cdot (1+5e^{-t}) \cdot 25000e^{-t}}{(1+5e^{-t})^4}$

$$= \frac{-25000e^{-t}(1+5e^{-t})(1+5e^{-t}-10e^{-t})}{(1+5e^{-t})^4} = \frac{-25000e^{-t}(1-5e^{-t})}{(1+5e^{-t})^3}$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-25000e^{-t}(1-5e^{-t})}{(1+5e^{-t})^3} = 0 \Leftrightarrow 1-5e^{-t} = 0 \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow t = \ln 5 \text{ (thỏa mãn)}$$

Ta có bảng biến thiên với $t \in [0; +\infty)$:

t	0	$\ln 5$	$+\infty$
$h'(t)$	+	0	-
$h(t)$	$\frac{6250}{9}$	1250	0

Vậy sau khi phát hành khoảng $\ln 5 \approx 1,6$ năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất.

Câu 6: Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức:

$N(t) = 1000 + \frac{100t}{100+t^2}$ (con), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

Lời giải

Xét hàm số $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100+t^2}$ ($t > 0$).

Ta có: $N'(t) = \frac{100 \cdot (100+t^2) - 100t \cdot 2t}{(100+t^2)^2} = \frac{100 \cdot (100-t^2)}{(100+t^2)^2}$.

Khi đó, với $t > 0$, $N'(t) = 0 \Leftrightarrow 100 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 100 \Leftrightarrow t = 10$.

Bảng biến thiên của hàm số $N(t)$ như sau:

t	0	10	$+\infty$
$N'(t)$	+	0	-
$N(t)$	1000	1005	1000



Căn cứ bảng biến thiên, ta thấy:

Trên khoảng $(0; +\infty)$ hàm số $N(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 1005 tại $t = 10$.

Vậy số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng là 1005 con.

Câu 7: Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng đến tốc độ của không khí đi vào khí quản. Tốc độ của không khí đi vào khí quản khi ho được cho bởi công thức $V = k(R - r)r^2$; $0 \leq r < R$, trong đó k là hằng số, R là bán kính bình thường của khí quản, r là bán kính khí quản khi ho. Hỏi bán kính của khí quản khi ho bằng bao nhiêu so với bán kính khí quản lúc bình thường thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất?

Lời giải

$$\text{Ta có: } V' = 2kRr - 3kr^2. \text{ Nhận xét } V' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = \frac{2R}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } f(0) = 0; f\left(\frac{2R}{3}\right) = \frac{4kR^3}{27}$$

Vậy bán kính của khí quản khi ho bằng $\frac{2}{3}$ bán kính khí quản lúc bình thường thì tốc độ không khí đi vào là lớn nhất.

Câu 8: Người quản lý của một khu chung cư có 100 căn hộ cho thuê nhận thấy rằng tất cả các căn hộ sẽ có người thuê nếu giá thuê một căn hộ là 8 triệu đồng một tháng. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê căn hộ thêm 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Người quản lý nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất?

Lời giải

Gọi x là số lần tăng giá 100 nghìn đồng ($x > 0$). Khi đó, số căn được cho thuê là: $100 - x$ (căn)

Tổng số tiền thu được trong một tháng là:

$$\begin{aligned} (100 - x)(8000000 + 100000x) &= 100000(100 - x)(80 + x) = 100000(-x^2 + 20x + 8000) \\ &= 100000[-(x - 10)^2 + 8100] \leq 810000000, \forall x > 0 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 10$ (thỏa mãn)

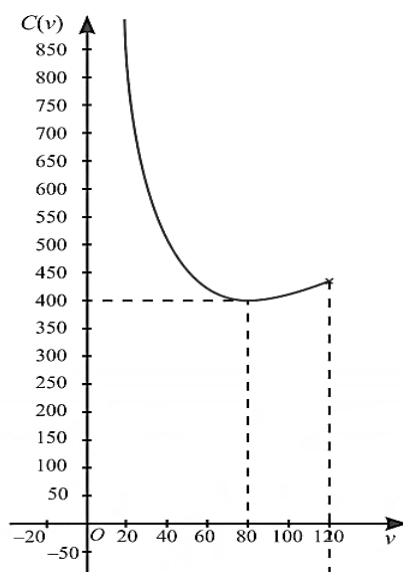
Vậy để thu được doanh thu là lớn nhất thì người quản lý nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là: $8000000 + 100000.10 = 9000000$ (đồng).



Câu 9: Giả sử chi phí tiền xăng C (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình v (km/h) theo công thức:

$$C(v) = \frac{16000}{v} + \frac{5}{2}v \quad (0 < v \leq 120)$$

Để biểu diễn trực quan sự thay đổi của $C(v)$ theo v , người ta đã vẽ đồ thị hàm số $C(v)$ như hình bên.



Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là bao nhiêu để tiết kiệm tiền xăng nhất?

Lời giải

Tập xác định: $D = (0; 120]$.

Đạo hàm $C'(v) = -\frac{16000}{v^2} + \frac{5}{2} = \frac{5(v-80)(v+80)}{2v^2} = 0 \Leftrightarrow v = -80$ (loại) hoặc $v = 80$.

Trên khoảng $(0; 80)$, $C'(v) < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

Trên khoảng $(80; 120)$, $C'(v) > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng này.

Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $v = 80$, $C_{CT} = C(80) = 400$.

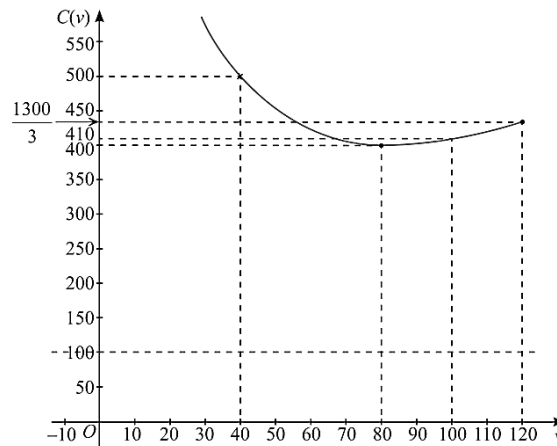
Giới hạn vô cực và tiệm cận: $\lim_{v \rightarrow 0^+} C(v) = \lim_{v \rightarrow 0^+} \left(\frac{16000}{v} + \frac{5}{2}v \right) = +\infty$ nên đường thẳng $v = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

v	0	80	120		
$C'(v)$		-	0	+	
$C(v)$	$+\infty$		400		$+\infty$



Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $(80; 400)$ và đi qua các điểm $(40; 500), (100; 410), \left(120; \frac{1300}{3}\right)$ như hình.



Quan sát đồ thị hàm số, ta nhận thấy hàm số đạt GTNN khi $v = 80$ và GTNN là 400.

Như vậy, để tiết kiệm tiền xăng nhất, tài xế nên chạy xe với tốc độ trung bình là 80 km/h.

Câu 10: Một công ty kinh doanh bất động sản có 20 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng/1 tháng thì tất cả các căn hộ đều có người thuê. Nhưng cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 200 nghìn đồng/1 tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi công ty nên cho thuê mỗi căn hộ bao nhiêu tiền một tháng để tổng số tiền thu được là lớn nhất?

Lời giải

Giả sử giá thuê mỗi căn hộ là x triệu đồng/1 tháng và số căn hộ cho thuê là y .

Khi đó tổng số tiền thu được sẽ là $x \cdot y$.

Theo đề bài, ta có: $y = 20 - 5(x - 2)$ (vì cứ mỗi lần tăng giá thuê mỗi căn hộ thêm 200 nghìn đồng/1 tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống).

Do đó ta cần tìm giá trị của x sao cho hàm số $f(x) = x[20 - 5(x - 2)]$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có: $f'(x) = 30 - 10x = 0 \Rightarrow 30 - 10x = 0 \Rightarrow x = 3$

Cuối cùng ta kiểm tra xem điểm cực này có phải là điểm cực đại hay không:

Xác định khoảng: $[-\infty; 3], [3; +\infty]$

Chọn $x_1 = 2 \Rightarrow f(x) = 10$, chọn $x_2 = 4 \Rightarrow f(x) = -10$

Vì đạo hàm dương với mọi $x < 3$ là âm với mọi $x > 3 \Rightarrow$ hàm số cực đại tại $x = 3$

Vì vậy, công ty nên cho thuê mỗi căn hộ với giá 3 triệu đồng/1 tháng để tổng số tiền thu được là lớn nhất.

Câu 11: Một con cá hồi bơi ngược dòng nước để vượt một khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là 6 (km/h). Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$ (trong đó c là hằng số dương, E được tính



bằng đơn vị Jun). Cá bơi ngược dòng quãng đường 300 km trên trong khoảng thời gian t với vận tốc bằng bao nhiêu để năng lượng tiêu hao là thấp nhất?

Lời giải

Vận tốc khi cá bơi ngược dòng sẽ là $v - 6$ (km/h).

Thời gian để bơi quãng đường 300 km là $t = \frac{300}{v-6}$ (h).

Năng lượng tiêu hao là $E(v) = 300c \frac{v^3}{v-6}$ (J).

Do $c > 0 \Rightarrow E(v)_{\min} \Leftrightarrow \frac{v^3}{v-6} = (f(v))_{\min}$.

Với $v > 6$ ta có $f'(v) = \frac{3v^2(v-6) - v^3}{(v-6)^2} = \frac{2v^3 - 18v}{(v-6)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ v = 9. \end{cases}$

Lập bảng biến thiên ta nhận $v = 9$ (do $v > 6$).

Vậy để năng lượng tiêu hao là thấp nhất thì vận tốc là 9 (km/h).

Câu 12: Thể tích V của 1 (kg) nước ở nhiệt độ t (t nằm giữa 0°C đến 30°C) được cho bởi công thức

$$V = 999,87 - 0,06426t + 0,0085043t^2 - 0,0000679t^3 \text{ (m}^3\text{)}.$$

Ở nhiệt độ bao nhiêu độ C thì nước có khối lượng riêng lớn nhất?

Lời giải

Ta có đạo hàm của thể tích:

$$V'(t) = -0,06424 + 2 \cdot 0,0085043t - 3 \cdot 0,0000679t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 79,53138 \notin (0^\circ; 30^\circ) \\ t \approx 3,9665. \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên

t	0	3,9665	30
$V'(t)$	—	0	+
$V(t)$	$+\infty$	V_{min}	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, khối lượng riêng lớn nhất của vật khi thể tích nhỏ nhất lúc vật có nhiệt độ xấp xỉ gần bằng 4°C .

Câu 13: Một công ty đánh giá rằng sẽ bán được N lô hàng nếu chi hết số tiền là x (triệu đồng) vào việc quảng cáo. Biết rằng N và x liên hệ với nhau bằng biểu thức $N(x) = -x^2 + 30x + 6, 0 \leq x \leq 30$. Hãy tìm số lô hàng lớn nhất mà công ti có thể bán sau đợt quảng cáo?

Lời giải

Ta có $N(x) = -x^2 + 30x + 6 \Rightarrow N'(x) = -2x + 30 \Rightarrow N'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 15$.



$$\text{Đồng thời, ta cũng có } \begin{cases} N(0) = 6 \\ N(15) = 231 \Rightarrow \max_{x \in [0;30]} N(x) = 231 \Leftrightarrow x = 15. \\ N(30) = 6 \end{cases}$$

Vậy nếu công ti dành 15 triệu cho việc quảng cáo thì công ti sẽ bán được nhiều nhất là 231 lô hàng.

Câu 14: Công ti truyền hình cáp Vista hiện có 100000 thuê bao. Mỗi thuê bao đang trả cước thuê bao 40\$/tháng. Một cuộc khảo sát cho thấy cứ mỗi lần giảm 0,25\$ cước thuê bao, công ti có thể có thêm 1000 thuê bao. Để doanh thu thu được là tối đa, công ti cần xác định mức cước thuê bao mỗi tháng là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi x là số lần giảm 0,25\$. Cước thuê bao hàng tháng lúc này là $40 - 0,25x$ với $0 \leq x \leq 160$ (do mức cước không thể âm), và số thuê bao mới là $1000x$.

Do đó, tổng số thuê bao là $100000 + 1000x$.

Hàm doanh thu được cho bởi $R = (\text{số thuê bao}) \times (\text{cước mỗi thuê bao trả})$

$$R = (100000 + 1000x)(40 - 0,25x) = 1000(100 + x)(40 - 0,25x) = 1000(4000 + 15x - 0,25x^2)$$

Đạo hàm $R' = 0$, ta được $R' = 1000(15 - 0,5x) = 0 \Leftrightarrow x = 30$.

Vì tập xác định của R là khoảng đóng $[0; 160]$ nên R đạt cực đại tại $x = 30$ hoặc tại các điểm đầu mút của đoạn $[0; 160]$.

Ta có: $R(0) = 4000000$; $R(30) = 4225000$; $R(160) = 0$

Vậy doanh thu tối đa khi $x = 30$. Điều này tương ứng với 30 lần giảm 0,25\$, tức là cước thuê bao hàng tháng là $40\$ - 7,5\$ = 32,5\$$.

Số thuê bao tại mức cước này là $100000 + 30 \cdot (1000) = 130000$.

Câu 15: Một bài báo trong tạp chí xã hội học phát biểu rằng nếu một chương trình chăm sóc sức khỏe đặc biệt cho người già được khởi xướng, thì t năm sau khi nó được khởi động, n ngàn người già có thể trực tiếp nhận được các phúc lợi, trong đó $n = \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 32t$ ($0 \leq t \leq 12$). Với giá trị nào của t thì số người nhận phúc lợi tối đa là bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Đạo hàm } n'(t) = 0 \text{ ta có } n'(t) = t^2 - 12t + 32 = 0 \Leftrightarrow (t - 4)(t - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 8. \end{cases}$$

Vì tập xác định của n là một khoảng đóng $[0; 12]$ nên n đạt cực đại tuyệt đối tại $t = 0, t = 4, t = 8$ hoặc $t = 12$:

$$n(0) = \frac{0^3}{3} - 6(0^2) + 32 \cdot 0 = 0; n(4) = \frac{4^3}{3} - 6(4^2) + 32 \cdot 4 = \frac{160}{3}$$



$$n(8) = \frac{8^3}{3} - 6(8^2) + 32.8 = \frac{128}{3}; n(12) = \frac{12^3}{3} - 6(12^2) + 32.12 = \frac{288}{3} = 96$$

Do đó n đạt cực đại khi $t = 12$ (năm).

Câu 16: Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s = -t^3 + 6t^2 + 17t$, với $t(s)$ là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $s(m)$ là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng thời gian 8 giây đầu tiên, vận tốc $v(m/s)$ của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng?

Lời giải

Ta có : $v = s' = -3t^2 + 12t + 17$

Ta đi tìm giá trị lớn nhất của $v = -3t^2 + 12t + 17$ trên khoảng $(0; 8)$

Mặt khác: $v' = -6t + 12 = 0 \Rightarrow t = 2$

Bảng biến thiên:

t	0	2	8	
$V'(t)$		+	0	−
$V(t)$				

Vậy vận tốc lớn nhất trong khoảng 8 giây đầu tiên là: 29 (m/s).

Câu 17: Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng tennis. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ. Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí hoạt động là thấp nhất?

Lời giải

Gọi số máy móc công ty sử dụng để sản xuất là $x (x \in \mathbb{N}, x > 0)$.

Thời gian cần để sản xuất hết 8000 quả bóng là: $\frac{8000}{30x}$.

Tổng chi phí để sản xuất là: $P(x) = 200x + \frac{8000}{30x} \cdot 192 = 200x + \frac{51200}{x}$

Ta có: $P'(x) = 200 - \frac{51200}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 256 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ x = -16(\text{loại}) \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	0	16	$+\infty$	
$P'(x)$		-	0	+
$P(x)$	$+\infty$			$+\infty$
		6400		

Vậy công ty nên sử dụng 16 máy để chi phí hoạt động là thấp nhất.



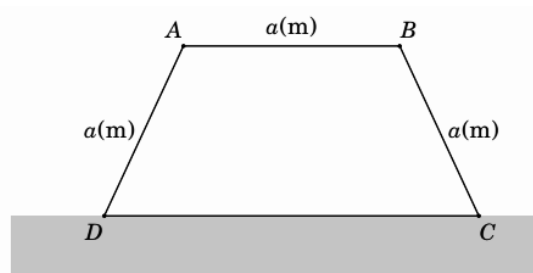
Dạng 2: Một số bài toán tối ưu đơn giản

Quy trình giải một bài toán tối ưu hoá:

- **Bước 1:** Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.
- **Bước 2:** Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x , và biểu diễn các đại lượng khác ở Bước 1 theo x . Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x . Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$
- **Bước 3:** Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Một bác nông dân có ba tấm lưới B40, mỗi tấm dài a (m) và muốn rào một mảnh vườn dọc theo bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ dưới đây biết rằng bờ sông là đường thẳng CD không phải rào lưới. Hỏi bác nông dân đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?



Lời giải

Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên CD

Đặt $x = MD$, ($0 < x < a$) suy ra

$$AM = \sqrt{AD^2 - MD^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$$

Diện tích của mảnh vườn hình thang cân là

$$S(x) = \frac{(AB + CD)AM}{2} = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Xét hàm số $f(x) = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2}$ trên khoảng $(0 < x < a)$

$$\text{Đạo hàm } f'(x) = \frac{-2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \notin (0 < x < a) \\ x = \frac{a}{2} \in (0 < x < a) \end{cases}$$

Bảng biến thiên hàm số $f(x)$ trên khoảng $(0; a)$

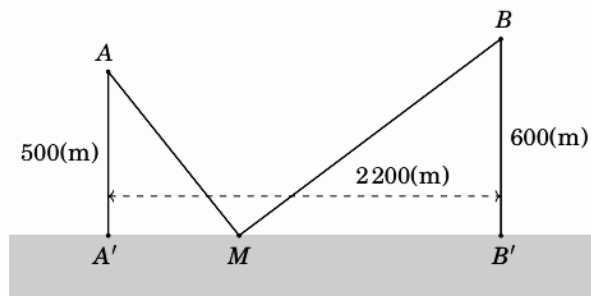
x	0	$\frac{a}{2}$	a
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	a^2	$\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$	0

Từ bảng biến thiên suy ra $\max_{(0; a)} f(x) = f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$

Vậy bác nông dân có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4} \text{ m}^2$.



Bài tập 2: Có hai xã A, B cùng ở một bên bờ sông. Khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 550\text{m}$, $BB' = 600\text{m}$. Người ta đo được $A'B' = 2200\text{m}$ như hình vẽ dưới đây. Các kỹ sư muốn xây dựng một trạm cung cấp nước sạch nằm cạnh bên bờ sông cho người dân của hai xã sử dụng. Để tiết kiệm chi phí, các kỹ sư phải chọn một vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn $A'B'$ sao cho tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó.



Lời giải

Đặt $A'M = x$ ($0 < x < 2200$), $B'M = 2200 - x$

Ta có $AM = \sqrt{x^2 + 500^2}$, $BM = \sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}$

Khi đó tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là:

$$AM + BM = \sqrt{x^2 + 500^2} + \sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 500^2} + \sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}$ trên khoảng $(0; 2200)$

$$\text{Đạo hàm } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 500^2}} - \frac{2200 - x}{\sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 1000$$

Bảng biến thiên:

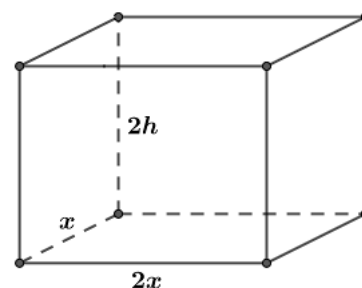
x	0	1000	2200		
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	2780		2460		2856

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông là khoảng 2460m , tại vị trí M cách điểm A' là 1000m .

Bài tập 3: Ông A dự định sử dụng hết $5,5\text{m}^2$ kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Gọi $x(m)$ là chiều rộng. ($x > 0$). Chiều dài là $2x(m)$. Chiều cao là $h(m)$. ($h > 0$)



$$\text{Theo đề bài, ta có: } 2x^2 + 4xh + 2xh = 5,5 \hat{=} 2x^2 + 6xh = 5,5 \hat{=} h = \frac{5,5 - 2x^2}{6x}$$



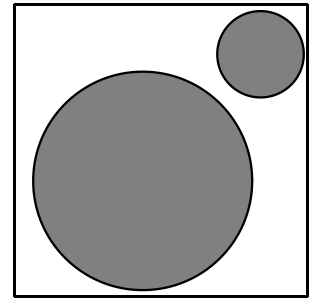
Vì $h > 0$ và $x > 0$ nên $5,5 - 2x^2 > 0 \wedge 0 < x < \frac{\sqrt{11}}{2}$.

Suy ra thể tích của bể cá là: $V = 2x^2h = \frac{5,5}{3}x - \frac{2}{3}x^3$ với $0 < x < \frac{\sqrt{11}}{2}$.

$$V' = \frac{11}{6} - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{33}}{6} (N) \\ x = -\frac{\sqrt{33}}{6} (L) \end{cases}$$

Thể tích lớn nhất của bể cá là: $V_{max} = V\left(\frac{\sqrt{33}}{6}\right) \approx 1,17(m^3)$.

Bài tập 4: Từ một mảnh giấy hình vuông cho trước cắt thành hai hình tròn sao cho tổng diện tích của hai hình tròn là lớn nhất. Gọi k ($k \leq 1$) là tỉ số bán kính của chúng khi đó. Hỏi giá trị $\sqrt{k}$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Gọi đường chéo hình chữ nhật là a . Ta có: $R + r = \frac{a}{1 + \sqrt{2}}$.

Tìm max của $R^2 + r^2$. Khảo sát hàm, ta tìm được $R = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ Từ đó ta tìm được $\sqrt{k} = \sqrt{2} - 1$.

Bài tập 5: Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất được uốn thành một hình vuông, đoạn thứ hai được uốn thành một vòng tròn. Hỏi khi tổng diện tích của hình vuông và hình tròn ở trên nhỏ nhất thì chiều dài đoạn dây uốn thành hình vuông bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Gọi x ($0 < x < 60$) là chiều dài của đoạn thứ hai, suy ra $60 - x$ là độ dài đoạn thứ nhất.

Khi đó cạnh hình vuông là $15 - \frac{x}{4}$ nên diện tích hình vuông là $\left(15 - \frac{x}{4}\right)^2$.

Chu vi của vòng tròn là $2\pi R = x \Rightarrow R = \frac{x}{2\pi}$. Khi đó diện tích hình tròn là $\pi R^2 = \frac{x^2}{4\pi}$.

Khi đó tổng diện tích của hai hình sẽ là $f(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \left(15 - \frac{x}{4}\right)^2$.

Khi đó ta có $f'(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2}\left(15 - \frac{x}{4}\right) = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}\right) - \frac{15}{2}$.

Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{15}{\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}}$. Suy ra tổng diện tích hai hình nhỏ nhất khi $x = \frac{60\pi}{4 + \pi}$.

Khi đó cạnh hình vuông sẽ là $60 - \frac{60\pi}{4 + \pi} \approx 33,61$.



Bài tập 6: Bác thợ hàn dùng một thanh kim loại dài 4 m để uốn thành khung cửa sổ có dạng như hình vẽ. Gọi r là bán kính của nửa đường tròn. Tìm r để diện tích tạo thành đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

$$\text{Ta có } 2(h+r) + \pi r = 4 \Rightarrow h = \frac{4-2r-\pi r}{2}.$$

$$\text{Diện tích của khung cửa là } S = \frac{1}{2}\pi r^2 + 2rh$$

$$= \frac{1}{2}\pi r^2 + 2r \left(\frac{4-2r-\pi r}{2} \right) = -\frac{\pi+4}{2}r^2 + 4r.$$

$$\text{Ta có } h = \frac{4-2r-\pi r}{2} > 0 \Leftrightarrow 0 < r < \frac{4}{\pi+2}.$$

$$\text{Xét hàm số } S(r) = -\frac{\pi+4}{2}r^2 + 4r \text{ trên } \left(0; \frac{4}{\pi+2}\right) \text{ có } S'(r) = -(\pi+4)r + 4 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{4}{\pi+4}$$

Bảng biến thiên

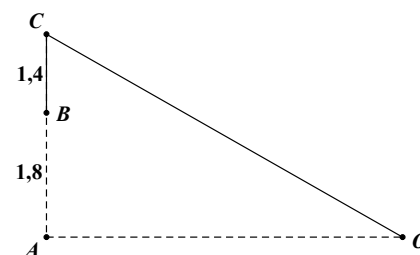
x	0	$\frac{4}{\pi+4}$	$\frac{4}{\pi+2}$
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$		$\frac{8}{\pi+4}$	

$$\text{Vậy } S(r) \text{ đạt giá trị lớn nhất } \Leftrightarrow r = \frac{4}{\pi+4}.$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4 mét và đặt ở độ cao 1,8 mét so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đó? Biết rằng góc BOC là góc nhọn.



A. $AO = 2,4$ m

B. $AO = 2$ m

C. $AO = 2,6$ m

D. $AO = 3$ m

Lời giải

Đặt độ dài cạnh $AO = x$ cm, ($x > 0$)

$$\text{Suy ra: } BO = \sqrt{3,24 + x^2}, CO = \sqrt{10,24 + x^2}$$

Ta sử dụng định lí cosin trong tam giác OBC ta có:

$$\cos \widehat{BOC} = \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2 \cdot OB \cdot OC} = \frac{(3,24 + x^2) + (10,24 + x^2) - 1,96}{2\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}} = \frac{5,76 + x^2}{\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}}$$



Vì góc $\widehat{BOC}$ là góc nhọn nên bài toán trở thành tìm x để $F(x) = \frac{5,76 + x^2}{\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

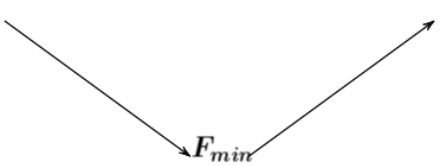
Đặt $(3,24 + x^2) = t, (t > 3,24)$ suy ra $F(t) = \frac{t + \frac{63}{25}}{\sqrt{t(t+7)}} = \frac{25t + 63}{25\sqrt{t(t+7)}}$

Ta tìm t để $F(t)$ nhận giá trị nhỏ nhất.

$$F'(t) = \left(\frac{25t + 63}{25\sqrt{t(t+7)}} \right)' = \frac{1}{25} \left(\frac{25\sqrt{t(t+7)} - (25t + 63) \left(\frac{2t+7}{2\sqrt{t(t+7)}} \right)}{t(t+7)} \right)$$

$$= \frac{1}{25} \left(\frac{50(t^2 + 7t) - (25t + 63)(2t + 7)}{2t(t+7)\sqrt{t(t+7)}} \right) = \frac{1}{25} \left(\frac{49t - 441}{2t(t+7)\sqrt{t(t+7)}} \right) = 0 \Leftrightarrow t = 9$$

Bảng biến thiên:

t	3,24	9	$+\infty$
$F'(t)$	–	0	+
$F(t)$			

Thay vào đặt ta có: $(3,24 + x^2) = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{144}{25} \Leftrightarrow x = 2,4m$

Vậy để nhìn rõ nhất thì $AO = 2,4m$.

Câu 2: Từ hình vuông có cạnh bằng 6 người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ. Sau đó người ta gấp thành hình hộp chữ nhật không nắp. Tính thể tích lớn nhất của khối hộp.

- A.** $8\sqrt{2}$. **B.** $10\sqrt{2}$.
C. $9\sqrt{2}$. **D.** $11\sqrt{2}$.

Lời giải

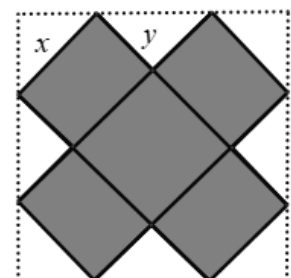
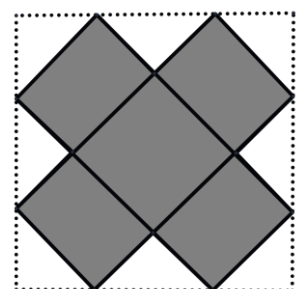
Đặt kích thước các cạnh như hình vẽ

Ta có $\frac{x}{\sqrt{2}} + y\sqrt{2} + \frac{x}{\sqrt{2}} = 6 \Leftrightarrow x + y = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow y = 3\sqrt{2} - x$ với $0 < x < 3\sqrt{2}$.

Thể tích của khối hộp tạo thành là $V = x^2y = x^2(3\sqrt{2} - x)$.

Ta có $V' = 3x(2\sqrt{2} - x) = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên



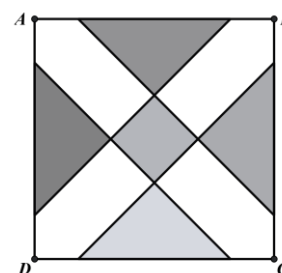


x	0	$2\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$
$V'(x)$	+	0	-
$V(x)$	A graph of the potential function V(x) is shown. The x-axis has marked points at 0, 2√2, and 3√2. The y-axis is labeled V(x). The curve starts at the origin (0,0), rises to a peak at x = 2√2 with a value of 8√2, and then decreases. The peak is marked with a horizontal line segment and labeled 8√2. Arrows on the curve indicate the direction of increasing and decreasing values.		

Vậy: $\max V = 8\sqrt{2}$ khi $x = 2\sqrt{2}, y = \sqrt{2}$.

Câu 3: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4, chính giữa có một hình vuông đồng tâm với $ABCD$. Biết rằng bốn tam giác là bốn tam giác cân. Hỏi tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{19}{3}$. B. $\frac{17}{3}$.
C. $\frac{16}{3}$. D. $\frac{14}{3}$.



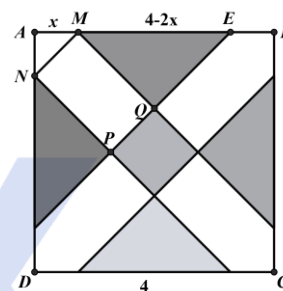
Lời giải

Đặt $AM = x$ ($0 < x < 4$) $\Rightarrow ME = 4 - 2x$.

$$2MQ^2 = (4 - 2x)^2 \Leftrightarrow MQ^2 = 2(2 - x)^2 \Leftrightarrow MQ = \sqrt{2}(2 - x)$$

Gọi S tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ.

$$S = 4 \cdot \frac{MQ^2}{2} + PQ^2 = 2MQ^2 + MN^2 = (4 - 2x)^2 + (x\sqrt{2})^2 = 6x^2 - 16x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$



Bảng biến thiên

x	0	$\frac{4}{3}$	4
$S'(x)$	—	0	+
$S(x)$			

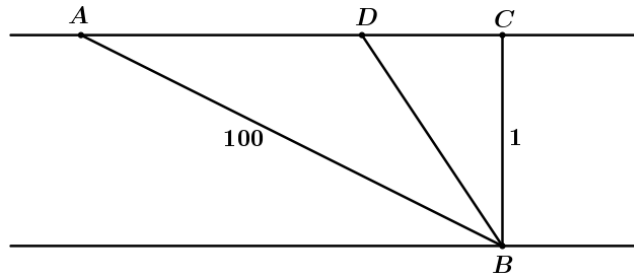
$$\text{Vậy } S_{\min} = \frac{16}{3}$$

Câu 4: Trong một bài thực hành huấn luyện quân sự có một tình huống chiến sĩ phải bơi qua sông để tấn công mục tiêu ở ngay phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 100m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một phần ba vận tốc chạy trên bộ. Hãy cho biết chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất? Biết dòng sông là thẳng, mục tiêu cách chiến sĩ 1km theo đường chim bay và chiến sĩ cách bờ bên kia 100m.

- A. $\frac{200\sqrt{2}}{3}$. B. $75\sqrt{3}$. C. $\frac{200\sqrt{3}}{3}$. D. $75\sqrt{2}$.



Lời giải



Gọi A là mục tiêu; B là vị trí chiến sỹ và BD là đường bơi của chiến sỹ.

Chọn một đơn vị độ dài là 100m suy ra $BC = 1$; $AB = 10$; $AC = 3\sqrt{11}$

Gọi vận tốc bơi của chiến sỹ là một đơn vị vận tốc thì vận tốc chạy của chiến sỹ là 3 đơn vị vận tốc. Gọi x là quãng đường chiến sỹ bơi suy ra $BD = x$

Vậy quãng đường chiến sỹ chạy là $AD = AC - CD = 3\sqrt{11} - \sqrt{x^2 - 1}$

Thời gian chiến sỹ đến được mục tiêu là: $t = \frac{3\sqrt{11} - \sqrt{x^2 - 1}}{3} + \frac{x}{1} = \sqrt{11} - \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 1} + x$

Xét hàm $f(x) = \sqrt{11} - \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 1} + x$ có $f'(x) = 1 - \frac{1}{3} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ (thỏa mãn)} \\ x = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ (loại)} \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	1	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$	10
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Vậy thời gian chiến sỹ đến mục tiêu ngắn nhất khi $f(x)_{\min} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

Vậy chiến sỹ phải bơi $\frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot 100 = 75\sqrt{2} (m)$.

Câu 5: Một người dự định làm một bể chứa nước hình trụ bằng inóc có nắp đậy với thể tích 1 (m^3). Chi phí mỗi m^2 đáy là 600 nghìn đồng, mỗi m^2 nắp là 200 nghìn đồng và mỗi m^2 mặt bên là 400 nghìn đồng. Hỏi người đó án kính bể là bao nhiêu để chi phí làm bể ít nhất?

- A. $\sqrt[3]{2\pi}$. B. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. C. $\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$. D. $\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$.

Lời giải

Gọi R và h lần lượt là bán kính và chiều cao của bể chứa nước.

Ta có thể tích bể chứa nước là: $V = 1 \Rightarrow \pi R^2 h = 1 \Leftrightarrow h = \frac{1}{\pi R^2}$.

Diện tích nắp và mặt đáy bể chứa nước là: $S_1 = \pi R^2$.

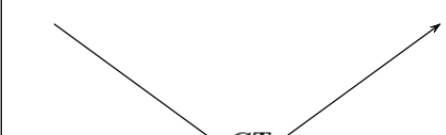
Diện tích xung quanh của bể chứa nước là: $S_2 = 2\pi R h = 2\pi R \cdot \frac{1}{\pi R^2} = \frac{2}{R}$.



Chi phí làm bể chứa nước là: $f(R) = 6\pi R^2 + 2\pi R^2 + 4 \cdot \frac{2}{R} = 8\pi R^2 + \frac{8}{R}$ (trăm nghìn đồng).

Ta có: $f'(R) = 16\pi R - \frac{8}{R^2}$. Xét $f'(R) = 0 \Leftrightarrow 16\pi R - \frac{8}{R^2} = 0 \Leftrightarrow 2\pi R^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$.

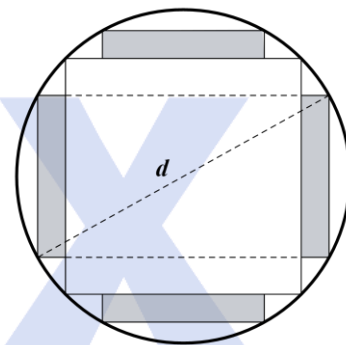
Bảng biến thiên:

R	0	$\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$	$+\infty$
$f'(R)$	–	0	+
$f(R)$			

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy chi phí làm bể chứa nước thấp nhất khi $R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$.

Câu 6: Một khúc gỗ tròn hình trụ cần xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và 4 miếng phụ như hình vẽ. Hãy xác định kích thước của các miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất. Biết đường kính khúc gỗ là d .

- A.** Rộng $\frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{16}d$, dài $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{17}}{4}d$
- B.** Rộng $\frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{15}d$, dài $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{17}}{4}d$
- C.** Rộng $\frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{14}d$, dài $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{17}}{4}d$
- D.** Rộng $\frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{13}d$, dài $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{17}}{4}d$



Lời giải

Gọi chiều dài và chiều rộng của miếng phụ lần lượt là x, y . Đường kính của khúc gỗ là d , khi đó

tiết diện ngang của thanh xà có độ dài cạnh là $\frac{d}{\sqrt{2}}$ và $0 < x < \frac{d(2 - \sqrt{2})}{4}, 0 < y < \frac{d}{\sqrt{2}}$

Theo đề Câu ta được hình chữ nhật ABCD như hình vẽ, theo định lý Pitago ta có:

$$\left(2x + \frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = d^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2 - 8x^2 - 4\sqrt{2}dx}$$

Do đó, miếng phụ có diện tích là: $S(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2 - 8x^2 - 4\sqrt{2}dx}$ với $0 < x < \frac{d(2 - \sqrt{2})}{4}$

Bài toán trở thành tìm x để $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

$$\text{Ta có: } S'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2 - 8x^2 - 4\sqrt{2}dx} + \frac{x(-8x - 2\sqrt{2}d)}{\sqrt{2}\sqrt{d^2 - 8x^2 - 4\sqrt{2}dx}} = \frac{-16x^2 - 6\sqrt{2}dx + d^2}{\sqrt{2}\sqrt{d^2 - 8x^2 - 4\sqrt{2}dx}}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow -16x^2 - 6\sqrt{2}dx + d^2 = 0 \Leftrightarrow -16\left(\frac{x}{d}\right)^2 - 6\sqrt{2}\left(\frac{x}{d}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{16}d$$



Vậy miếng phụ có kích thước $x = \frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{16}d, y = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{17}}{4}d$

Câu 7: Nhà Long muốn xây một hồ chứa nước có dạng một khối hộp chữ nhật có nắp đậy có thể tích bằng $576m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá tiền thuê nhân công để xây hồ tính theo m^2 là 500.000 đồng/ m^2 . Hãy xác định kích thước của hồ chứa nước sao cho chi phí thuê nhân công là ít nhất và chi phí đó là bao nhiêu?

- A.** Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 216 triệu
B. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 215 triệu
C. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 214 triệu
D. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 213 triệu.

Lời giải

Gọi x, y, h lần lượt là chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hồ chứa nước, ($x > 0, y > 0, h > 0, m$)

Ta có: $\frac{y}{x} = 2 \Leftrightarrow y = 2x$. Thể tích hồ chứa nước $V = xyh \Leftrightarrow h = \frac{V}{xy} = \frac{576}{x(2x)} = \frac{288}{x^2}$

Diện tích cần xây dựng hồ chứa nước:

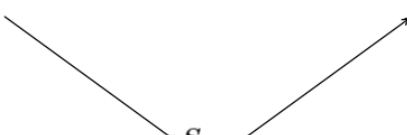
$$S(x) = 2xy + 2xh + 2yh = 2x(2x) + 2x \frac{288}{x^2} + 2(2x) \frac{288}{x^2} = 4x^2 + \frac{1728}{x}$$

Để chi phí nhân công là ít nhất thì diện tích cần xây dựng là nhỏ nhất, mà vẫn đạt thể tích như mong muốn.

Bài toán trở thành tìm x để $S(x)$ nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow S(x) = 4x^2 + \frac{1728}{x} \Rightarrow S'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x - \frac{1728}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

Bảng biến thiên:

x	0	6	$+\infty$
$S'(x)$	—	0	+
$S(x)$			

Vậy kích thước của hồ là: rộng 6m, dài 12m, cao 8m.

Diện tích cần xây: $432m^2$ và chi phí ít nhất là: $432 \times 500.000 = 216.000.000$

Câu 8: Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính R , nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp?

- A.** $2R^2$ **B.** $5R^2$ **C.** R^2 **D.** $3R^2$

Lời giải

Gọi x là độ dài cạnh của hình chữ nhật không nằm dọc theo đường kính của hình tròn ($0 < x < R$)

Độ dài cạnh còn lại của hình chữ nhật là $2\sqrt{R^2 - x^2}$

Ta có diện tích của hình chữ nhật là: $S(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$

Bài toán trở thành tìm x để $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất.



$$S'(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{2R^2 - 4x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow 2R^2 - 4x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{R\sqrt{2}}{2} \text{ (thoaman)} \\ x = \frac{-R\sqrt{2}}{2} \text{ (loai)} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	R
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$			

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là R^2 .

- Câu 9:** Để thiết kế một chiếc bể cá hình chữ nhật có chiều cao là $60cm$, thể tích là $96.000cm^3$, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70.000 đồng/ m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/ m^2 . Chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là:
- A. 83.200.000 đồng B. 382.000 đồng C. 83.200 đồng D. 8.320.000 đồng.

Lời giải

Diện tích của đáy hộp là: $S = \frac{V}{h} = \frac{96.000}{60} = 1600cm^2 = 0,16m^2$

Gọi chiều dài cạnh đáy của hộp là $x, (x > 0, m)$, chiều rộng của hộp là $\frac{0,16}{x}$

Gọi $F(x)$ là hàm chi phí để làm bể cá.

Chi phí để hoàn thành bể cá:

$$F(x) = 0,16 \times 100.000 + 2 \cdot 0,16x \cdot 70.000 + 2 \cdot 0,16 \cdot \frac{0,16}{x} \cdot 70.000 = 16.000 + 48.000x + \frac{13440}{x}$$

Bài toán trở thành tìm x để $F(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$F'(x) = 84.000 - \frac{13440}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 84.000 - \frac{13440}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$$

Bảng biến thiên:

x	0	0,4	$+\infty$
$F'(x)$	-	0	+
$F(x)$			

Vậy chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là: 83.200 đồng

- Câu 10:** Ông Nam cần xây dựng một bể nước mưa có thể tích $V = 8(m^3)$ dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài gấp $\frac{4}{3}$ lần chiều rộng, đáy và nắp đổ bê tông, cốt thép; xung quanh xây bằng gạch và xi măng. Biết rằng chi phí trung bình là $980.000đ/m^2$ và ở nắp để hở một khoảng hình vuông có



diện tích bằng $\frac{2}{9}$ diện tích nắp bể. Tính chi phí thấp nhất mà ông Nam phải chi trả (làm tròn đến hàng nghìn đồng).

- A.** 22.770.000 đ. **B.** 27.657.000 đ. **C.** 20.965.000 đ. **D.** 23.235.000 đ.

Lời giải

Gọi chiều rộng của bể là $3x$ (m). Ta có chiều dài bể là $4x$ (m) và chiều cao của bể là $\frac{2}{3x^2}$ (m)

Khi đó tổng diện tích bề mặt xây là:

$$T = (3x + 4x) \cdot 2 \cdot \frac{2}{3x^2} + 2 \cdot 3x \cdot 4x - \frac{2}{9} \cdot 3x \cdot 4x = \frac{28}{3x^2} + \frac{64x^2}{3} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{28}{3x^2} \cdot \frac{64x^2}{3}} = \frac{32\sqrt{7}}{3} \text{ (m}^2\text{)}.$$

Chi phí C (tính theo đồng) xây dựng là: $C = T \cdot 980000 \geq \frac{32\sqrt{7}}{3} \cdot 980000 \approx 27657000$ (đồng).

Câu 11: Dùng một dây thép dài 60 m uốn thành một khung có dạng như hình vẽ. Biết phần dưới là hình chữ nhật và phía trên là một tam giác đều. Diện tích lớn nhất của khung có giá trị bằng:

- A.** $\frac{900}{6-\sqrt{3}}$ (m²). **B.** $\frac{1200}{6-\sqrt{3}}$ (m²). **C.** $\frac{700}{3+\sqrt{3}}$ (m²). **D.** $\frac{600}{3-\sqrt{3}}$ (m²).

Lời giải

Gọi hai cạnh của hình chữ nhật là x và y như hình vẽ

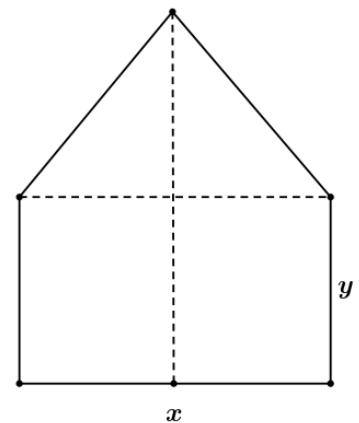
Khi đó chu vi của khung là $(x + 2y) + 2x = 60 \Leftrightarrow y = 30 - \frac{3}{2}x$

Suy ra diện tích của khung là:

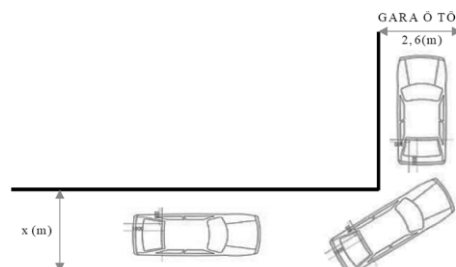
$$S = xy + \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = x(30 - 1,5x) + \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6-\sqrt{3}}{4}x^2 + 30x = f(x)$$

Dễ dàng suy ra được:

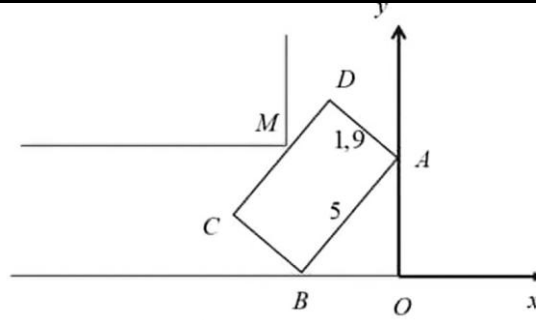
$$S_{\max} = \max f(x) = f\left(\frac{60}{6-\sqrt{3}}\right) = \frac{900}{6-\sqrt{3}} \text{ (m}^2\text{)}$$



Câu 12: Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA Ô TÔ nhà cô Hiền. Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng x (m), đoạn đường thẳng vào cổng GARA có chiều rộng 2,6 (m). Biết kích thước xe ô tô là $5\text{m} \times 1,9\text{m}$. Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài 5 (m), chiều rộng 1,9 (m). Hỏi chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị bên dưới để ô tô có thể đi vào GARA được?



- A.** $x = 3,7$ (m). **B.** $x = 2,6$ (m). **C.** $x = 3,55$ (m). **D.** $x = 4,27$ (m).



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ. Khi đó $M(-2, 6; x)$.

Gọi $B(-a; 0)$ suy ra $A(0; \sqrt{25-a^2})$. Phương trình $AB: \frac{x}{-a} + \frac{y}{\sqrt{25-a^2}} - 1 = 0$.

Do $CD \parallel AB$ nên phương trình $CD: \frac{x}{-a} + \frac{y}{\sqrt{25-a^2}} - T = 0$.

Mà khoảng cách giữa AB và CD bằng 1,9 m nên

$$\frac{|T-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{25-a^2}}\right)^2}} = 1,9 \Rightarrow T = 1 + \frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}}.$$

Điều kiện để ô tô đi qua được là M, O nằm khác phía đối với bờ là đường thẳng CD .

$$\text{Suy ra: } \frac{-2,6}{-a} + \frac{x}{\sqrt{25-a^2}} - 1 - \frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{25-a^2} + \frac{9,5}{a} - \frac{2,6 \times \sqrt{25-a^2}}{a}$$

Để cho nhanh, chúng ta dùng chức năng **TABLE** trong máy tính:

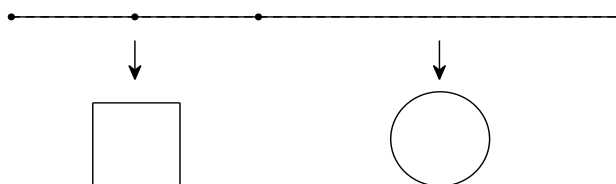
$$f(X) = \sqrt{25-X^2} + \frac{9,5}{X} - \frac{2,6 \times \sqrt{25-X^2}}{X} \text{ với STEP} = \frac{5}{29}; \text{ START} = 0; \text{ END} = 5.$$

Thấy giá trị lớn nhất của $f(X) = \sqrt{25-X^2} + \frac{9,5}{X} - \frac{2,6 \times \sqrt{25-X^2}}{X}$ xấp xỉ 3,698.

Vậy chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị $x = 3,7$ (m)

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Một sợi dây kim loại dài a (cm). Người ta cắt đoạn dây đó thành hai đoạn có độ dài x (cm) được uốn thành đường tròn và đoạn còn lại được uốn thành hình vuông ($a > x > 0$).



a) Bán kính đường tròn: $r = \frac{x}{\pi}$.



b) Diện tích hình vuông: $\left(\frac{a-x}{4}\right)^2$.

c) Tổng diện tích hai hình: $\frac{(4+\pi).x^2 - 2a\pi x + \pi a^2}{16\pi}$.

d) Khi $x = \frac{a\pi}{2+\pi}$ thì hình vuông và hình tròn tương ứng có tổng diện tích nhỏ nhất.

Lời giải

a) Sai : Do x là độ dài của đoạn dây cuộn thành hình tròn ($0 < x < a$).

Suy ra chiều dài đoạn còn lại là $a-x$.

Chu vi đường tròn: $2\pi r = x \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$. Diện tích hình tròn: $S_1 = \pi.r^2 = \frac{x^2}{4\pi}$.

b) Đúng: Diện tích hình vuông: $S_2 = \left(\frac{a-x}{4}\right)^2$.

c) Đúng: Tổng diện tích hai hình: $S = \frac{x^2}{4\pi} + \left(\frac{a-x}{4}\right)^2 = \frac{(4+\pi).x^2 - 2a\pi x + \pi a^2}{16\pi}$.

Đạo hàm: $S' = \frac{(4+\pi).x - a\pi}{8\pi}$; $S' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a\pi}{4+\pi}$.

d) Sai: Hàm S chỉ có một cực trị và là cực tiểu tại $x = \frac{a\pi}{4+\pi}$ suy ra $S_{\min} \Leftrightarrow x = \frac{a\pi}{4+\pi}$.

Câu 2.

Từ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $MA^2 = MB^2 + MC^2$ người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau là AMB , BNC , CPD và DQA . Với phần còn lại người ta gấp lên và ghép lại để thành hình chóp tứ giác đều.



Gọi cạnh đáy của mô hình là x (cm) với $x > 0$.

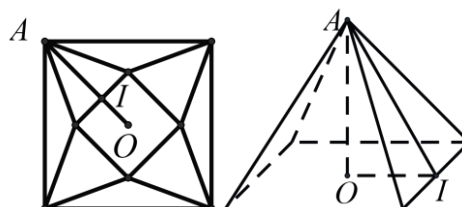
a) Chiều cao của hình chóp là $\sqrt{1250 - 25\sqrt{2}x}$.

b) Điều kiện của x là: $0 < x < 25\sqrt{2}$

c) Thể tích của khối chóp bằng $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{1250x^3 - 25\sqrt{2}x^4}$.

d) Khi cạnh đáy của khối chóp bằng $3\sqrt{2}$ dm thì thể tích của khối chóp là lớn nhất

Lời giải





a) Đúng : Gọi cạnh đáy của mô hình là x (cm) với $x > 0$. Ta có $AI = AO - IO = 25\sqrt{2} - \frac{x}{2}$.

Chiều cao của hình chóp $h = \sqrt{AI^2 - OI^2} = \sqrt{\left(25\sqrt{2} - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{1250 - 25\sqrt{2}x}$.

b) Đúng: Điều kiện $1250 - 25\sqrt{2}x > 0 \Rightarrow x < 25\sqrt{2}$.

c) Sai: Thể tích của khối chóp bằng $V = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \sqrt{1250 - 25\sqrt{2}x} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1250x^4 - 25\sqrt{2}x^5}$.

d) Sai: Xét hàm số $y = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1250x^4 - 25\sqrt{2}x^5}$ với $0 < x < 25\sqrt{2}$.

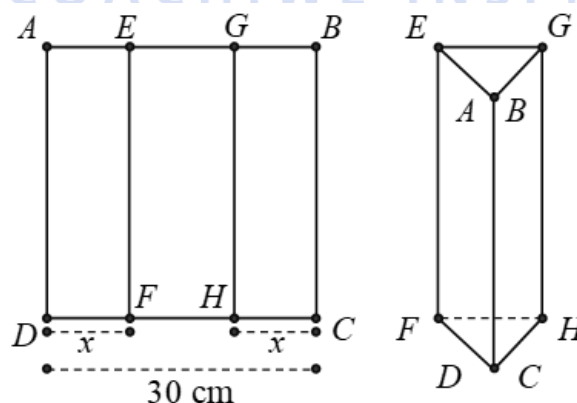
Ta có $y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{5000x^3 - 125\sqrt{2}x^4}{2\sqrt{1250x^4 - 25\sqrt{2}x^5}}$; $y' = 0 \Rightarrow 5000x^3 - 125\sqrt{2}x^4 = 0 \Rightarrow x = 20\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên

x	0	$20\sqrt{2}$	$25\sqrt{2}$	
y'		+	0	-
y				

Vậy để mô hình có thể tích lớn nhất thì cạnh đáy của mô hình bằng $20\sqrt{2}$ cm = $2\sqrt{2}$ dm.

Câu 3. Một tấm kẽm hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 30 cm. Người ta gấp tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy.



a) Thể tích khối trụ được tính bằng công thức $V = 30S$ trong đó S là diện tích của tam giác AEG

b) Diện tích của tam giác AEG bằng: $\sqrt{30} \cdot \sqrt{(15-x)^2 (2x-15)}$

c) Giá trị của x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là $x = 10$ (cm)

d) Thể tích khối lăng trụ lớn nhất bằng 1250 (cm^3)



Lời giải

a) Đúng: Đường cao lăng trụ là $AD = AB = 30\text{cm}$ không đổi. Để thể tích lăng trụ lớn nhất chỉ cần diện tích đáy lớn nhất.

Gọi I là trung điểm cạnh $EG \Rightarrow AI \perp EG$ trong tam giác AEG
 $\Rightarrow IG = 15 - x, (0 < x < 15)$

Ta có:

$$AI = \sqrt{x^2 - \left(\frac{30-2x}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - (15-x)^2} = \sqrt{30x-225}, x \in \left(\frac{15}{2}; 15\right)$$

b) Sai: $S_{\triangle AEG} = \frac{1}{2} AI \cdot EG = \frac{1}{2} (30-2x) \sqrt{30x-225} = \sqrt{15} \cdot \sqrt{(15-x)^2 (2x-15)}$

Vậy ta cần tìm $x \in \left(\frac{15}{2}; 15\right)$ để $f(x) = (15-x)^2 (2x-15)$ lớn nhất.

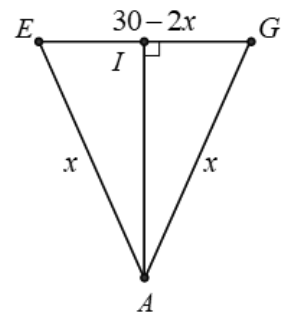
$$f'(x) = -2(15-x)(2x-15) + 2(15-x)^2 = 2(15-x)(30-3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ x = 10 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

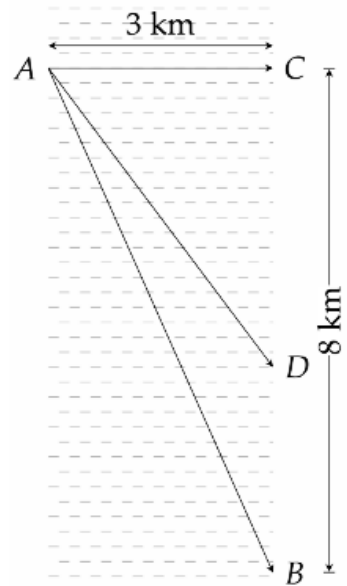
x	$15/2$	10	15
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	125	0

c) Đúng: Vậy thể tích lăng trụ lớn nhất khi $x = 10$.

d) Sai: Và thể tích lớn nhất bằng $125 \cdot 30 = 3750 (\text{cm}^3)$



Câu 4. Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo trực tiếp đến B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8$ km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Gọi x (km) là độ dài quãng đường BD . Xét tính đúng sai trong các khẳng định sau:



a) $8 - x$ (km) là độ dài quãng đường CD .

b) Thời gian chèo thuyền trên quãng đường AD là: $\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}$ (giờ)

c) Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{8-x}{8}$

d) Khoảng 1 giờ 20 phút là khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B .



Lời giải

a) Đúng: Gọi x (km) là độ dài quãng đường BD ; $8 - x$ (km) là độ dài quãng đường CD .

b) Sai: Thời gian chèo thuyền trên quãng đường $AD = \sqrt{x^2 + 9}$ là: $\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6}$ (giờ)

Thời gian chạy trên quãng đường DB là: $\frac{8-x}{8}$ (giờ)

c) Sai: Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8-x}{8}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8-x}{8}$ trên khoảng $(0; 8)$

Ta có $f'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{8}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 + 9} = 4x \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}}$

Bảng biến thiên

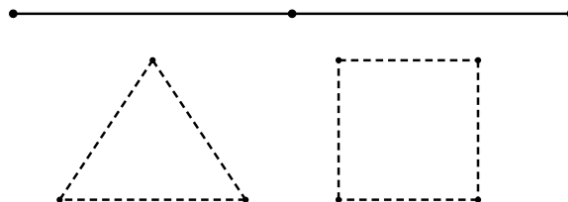
x	0	$\frac{9}{\sqrt{7}}$	8
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$	$\frac{\sqrt{73}}{6}$

d) Đúng: Dựa vào bảng biến thiên ta thấy thời gian ngắn nhất để di chuyển từ A đến B là $1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$

Vậy khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B là $1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1^h 20'$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cắt một đoạn dây dài 60m thành hai đoạn dây, đoạn dây thứ nhất gấp thành một tam giác đều có diện tích S_1 , đoạn dây thứ hai gấp thành một hình vuông có diện tích S_2 (như hình vẽ dưới)



Khi đó giá trị nhỏ nhất của tổng $T = S_1 + S_2$ là bao nhiêu?

Lời giải

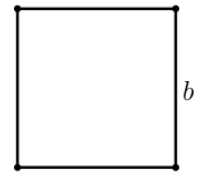
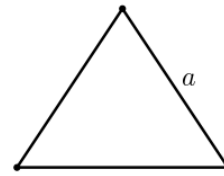
Gọi độ dài đoạn dây gấp tam giác đều là x thì độ dài đoạn dây gấp hình vuông là $60 - x$ (mét)



Khi đó $x = 3a \Leftrightarrow a = \frac{x}{3} \Rightarrow S_1 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{36}$

Mặt khác:

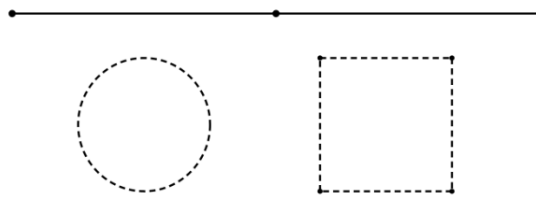
$60 - x = 4b \Rightarrow b = \frac{60 - x}{4} \Rightarrow S^2 = b^2 = \left(\frac{60 - x}{4}\right)^2$



Khi đó $S_1 + S_2 = \frac{x^2 \sqrt{3}}{36} + \left(\frac{60 - x}{4}\right)^2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{(9 + 4\sqrt{3})x^2 - 1080x + 32400}{144}$

Dễ dàng tính được $(S_1 + S_2)_{\min} = \min f(x) = f\left(\frac{540}{9 + 4\sqrt{3}}\right) \approx 97,87(\text{m}^2)$.

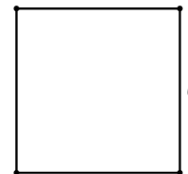
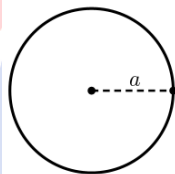
Câu 2: Cắt một đoạn dây dài 30m thành hai đoạn dây, đoạn dây thứ nhất gấp thành một đường tròn có diện tích S_1 , đoạn dây thứ hai gấp thành một hình vuông có diện tích S_2 (như hình vẽ dưới)



Khi đó giá trị nhỏ nhất của tổng $T = S_1 + S_2$ là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi độ dài đoạn dây gấp đường tròn là x thì độ dài đoạn dây gấp hình vuông là $30 - x$ (mét)



Khi đó $x = 2\pi a \Leftrightarrow a = \frac{x}{2\pi} \Rightarrow S_1 = \pi a^2 = \frac{x^2}{4\pi}$

Mặt khác: $30 - x = 4b \Rightarrow b = \frac{30 - x}{4} \Rightarrow S^2 = b^2 = \left(\frac{30 - x}{4}\right)^2$

Khi đó $S_1 + S_2 = \frac{x^2}{4\pi} + \left(\frac{30 - x}{4}\right)^2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 60\pi x + 900\pi}{16\pi}$

Dễ dàng tính được $(S_1 + S_2)_{\min} = \min f(x) = f\left(\frac{30\pi}{\pi + 4}\right) \approx 31,51(\text{m}^2)$.

Câu 3: Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp.

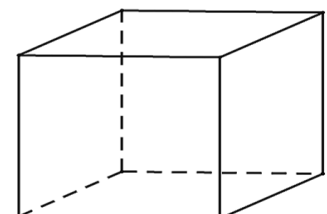
Gọi h là chiều cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h = \frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m + n$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi chiều dài, chiều rộng của hộp là $2x$ và x ($x > 0$).

Khi đó, ta có thể tích của cái hộp là:

$V = 2x^2 \cdot h \Rightarrow 2x^2 \cdot h = 48 \Leftrightarrow x^2 \cdot h = 24$





Do giá thành làm đáy và mặt bên hộp là 3, giá thành làm nắp hộp là 1 nên giá thành làm hộp là

$$L = 3(2x^2 + 2xh + 4xh) + 2x^2$$

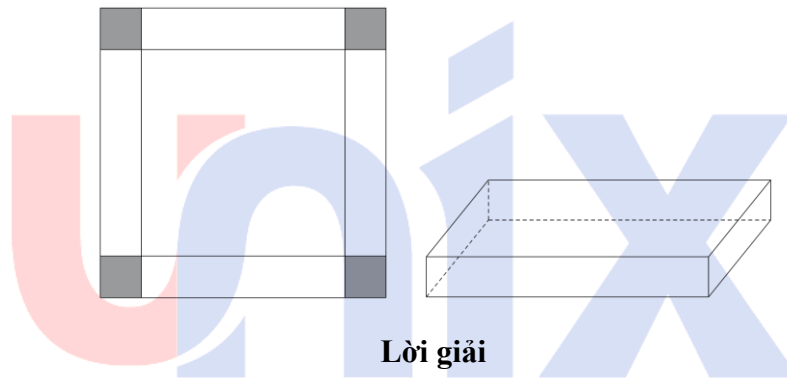
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm ta được:

$$L = 8x^2 + 9xh + 9xh \geq 3\sqrt{8x^2 \cdot 9xh \cdot 9xh} = 3\sqrt{648(x^2h)^2} = 216$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: } \begin{cases} 8x^2 = 9xh \\ x^2h = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9h}{8} \\ \frac{9^2}{8^2} \cdot h^3 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ h = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Vậy $m = 8, n = 3$ và $m + n = 11$.

Câu 4: Một tấm bìa hình vuông có diện tích 900 cm^2 . Người ta cắt ở bốn góc của tấm bìa đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x cm rồi gấp tấm bìa lại như hình vẽ bên để được một cái hộp không nắp có dạng hình hộp chữ nhật. Tìm thể tích lớn nhất mà hình hộp chữ nhật có thể thu được?



Lời giải

Cạnh của tấm bìa là $a = \sqrt{S} = \sqrt{900} = 30$ cm, đáy sẽ là hình vuông có cạnh bằng $30 - 2x$.

Thể tích thu được là: $V = (30 - 2x)^2 x = f(x)$ với $0 \leq x \leq \frac{a}{2} = 15$

Dễ dàng tính được: $V_{\max} = \max f(x) = f(5) = 2000 (\text{cm}^3)$

Câu 5: Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (hình vẽ dưới). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



Lời giải



Gọi độ dài của hàng rào song sông là x với $x > 0$

Gọi độ dài của mỗi hàng rào trong ba hàng rào song song nhau là y với $y > 0$

Diện tích đất mà bác nông dân rào được là: $xy(m^2)$

Tổng chi phí là 15 000 000 đồng nên ta có phương trình:

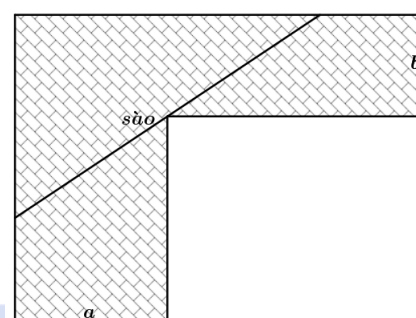
$$x60000 + 3y50000 = 15000000 \Rightarrow 6x + 15y = 1500$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có:

$$6x + 15y \geq 2\sqrt{6x \cdot 5y} \Rightarrow 1500 \geq 2\sqrt{30xy} \Rightarrow xy \leq 6250$$

Vậy diện tích lớn nhất mà bác nông dân có thể tạo rào là $6250(m^2)$

Câu 6: Để chặn đường hành lang hình chữ L, người ta dùng một que sào thẳng dài đặt kín những điểm chạm với hành lang (như hình vẽ). Biết $a = 24$ và $b = 3$. Hỏi cái sào thỏa mãn điều kiện trên có chiều dài tối thiểu là bao nhiêu?



Lời giải

Đặt các điểm như hình vẽ.

Đặt $DF = x$, $x > 0$, ta có $\triangle ADF$ đồng dạng với $\triangle BED$

$$\text{nên } \frac{EB}{ED} = \frac{AF}{DF} \Rightarrow EB = \frac{ab}{x}$$

Gọi l là chiều dài của que sào, ta có

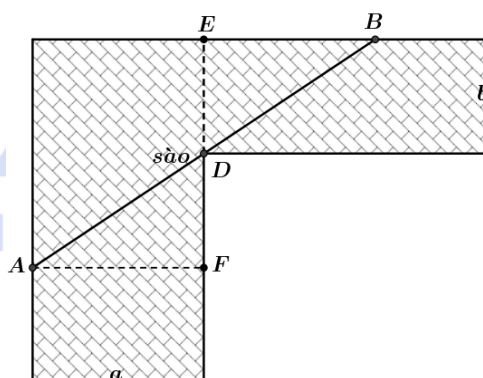
$$l^2 = AB^2 = (x+b)^2 + \left(a + \frac{ab}{x}\right)^2 = f(x).$$

Đạo hàm:

$$f'(x) = 2(x+b) - 2\frac{ab}{x^2}\left(a + \frac{ab}{x}\right) = 2(x+b)\left(1 - \frac{a^2b}{x^3}\right); f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a^2b} = 12.$$

Dễ dàng suy ra được $\min f(x) = f(12) = 1125$

Vậy giá trị nhỏ nhất của que sào là $l = \sqrt{1125} = 15\sqrt{5}$.



-----HẾT-----