



BÀI 04. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ - ĐỀ SỐ 04

(Đề thi gồm: 12 câu trắc nghiệm, 04 câu đúng-sai, 06 câu trả lời ngắn)

Biên soạn theo chương trình GDPT 2018 của BGD

Thời gian làm bài: 90 phút

Đề kiểm tra theo bài chuyên để ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Bảng biến thiên dưới đây là của hàm số nào trong các hàm số sau?

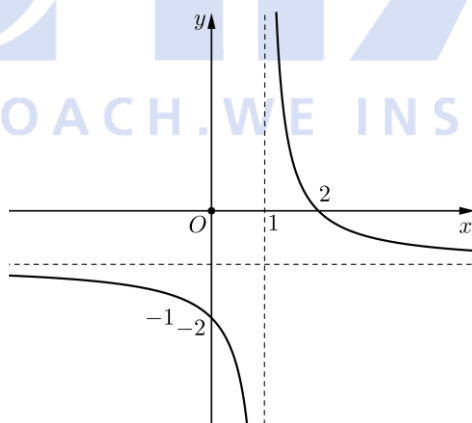
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

A. $y = -x^3 + 3x^2 - 3$. B. $y = x^3 + 3x^2 - 1$. C. $y = x^3 - 3x + 2$. D. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Lời giải

Ta có: $a = 1 > 0$; $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = 2 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx-1}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Giá trị của tổng $S = a + b + c$ bằng:



A. $S = 0$. B. $S = -2$. C. $S = 2$. D. $S = 4$.

Lời giải

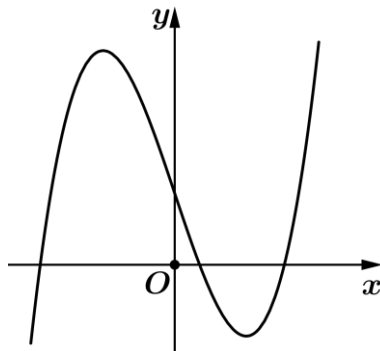
Tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c} = -1$; tiệm cận đứng: $x = \frac{1}{c} = 1$

Từ đây suy ra: $\begin{cases} a = -1 \\ c = 1 \end{cases}$ mà đồ thị lại cắt trục hoành tại $x = 2$ nên $2a + b = 0$ hay $b = -2a = 2$.

Vậy $S = a + b + c = -1 + 2 + 1 = 2$.



Câu 3: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



- A.** $y = x^3 - 3x - 1$. **B.** $y = x^3 - 3x^2 + 1$. **C.** $y = -x^3 + 3x + 1$. **D.** $y = x^3 - 3x + 1$.

Lời giải

Từ dáng điệu đồ thị suy ra hệ số $a > 0$

Giao điểm của đồ thị với trục Oy có tung độ dương

Từ đồ thị ta thấy, hoành độ hai điểm cực trị trái dấu

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-6}{bx-c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	—		—
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Trong các số a, b, c có bao nhiêu số âm?

A. 3

B. 1

C. 2

D. 0

Lời giải

Từ bảng biến thiên của hàm số, ta thấy đồ thị có hai đường tiệm cận, trong đó tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{c}{b} = -2 \\ \frac{a}{b} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc < 0 \\ ab > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0, c < 0, a > 0 \quad (1) \\ b < 0, c > 0, a < 0 \quad (2) \end{cases}$$

Lại có hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định $f'(x) = \frac{-ac + 6b}{(bx - c)^2} < 0 \Rightarrow ac > 6b$.

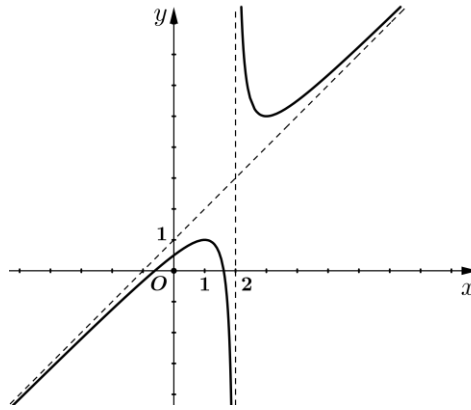
Ta thấy (1) không thể xảy ra do nếu $b > 0$ thì $ac > 6b > 0$

Ta thấy (2) có thể xảy ra do nếu $c > 0, a < 0$ thì $6b < ac < 0$.

Vậy trong các số a, b, c có hai số âm.



Câu 5: Đồ thị ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào trong các hàm số sau?



A. $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$

B. $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 2}$

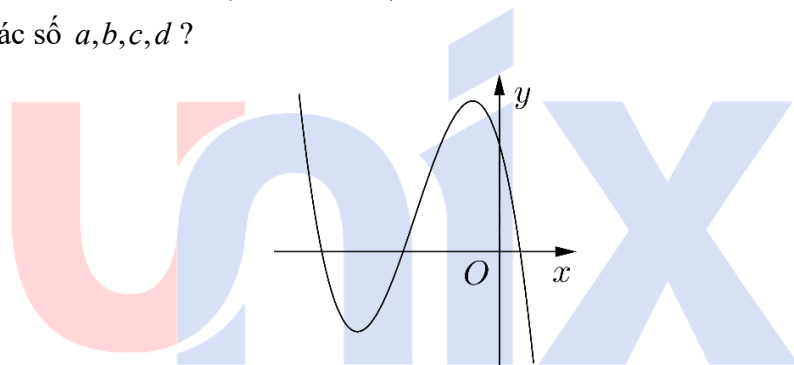
C. $y = \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 2}$

D. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 2}$

Lời giải

Hàm số đó là $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$.

Câu 6: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?



A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Dựa vào đồ thị ta thấy: $a < 0$

$$\text{Hàm số có 2 cực trị âm nên } \begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 9ac > 0 \\ -\frac{2b}{3a} < 0 \\ \frac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$$

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0; d)$ nên $d > 0$.

Vậy có đúng một số dương trong các số a, b, c, d .

Câu 7: Trong các hàm số sau, hàm số nào có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	+		+
y	-1	$+\infty$	-1

A. $y = \frac{x+1}{x-2}$.

B. $y = \frac{x+3}{x-2}$.

C. $y = \frac{x-1}{x-2}$.

D. $y = \frac{x-3}{x-2}$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 8: Một bể chứa ban đầu có 100 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 20 lít nước, đồng thời cho vào bể 10 gam chất khử trùng (hoà tan). Hàm số $f(t)$ thể hiện nồng độ chất khử trùng (gam/lít) trong bể sau t phút là:

A. $f(t) = \frac{20t+100}{10t}$. B. $f(t) = 20t+100$. C. $f(t) = \frac{10t}{20t+100}$. D. $f(t) = 20,02t+100$

Lời giải

Hàm số $f(t)$ thể hiện nồng độ chất khử trùng (gam/lít) trong bể sau t phút là

$$f(t) = \frac{20t}{40t+200} = \frac{t}{2t+10}$$

Câu 9: Hồ nuôi tôm giống của một anh nông dân chứa 30 khối nước, cứ mỗi giờ máy bơm nước sẽ bơm thêm vào hồ 4 khối nước, đồng thời anh ta cũng thêm vào 3 kg bột xử lý nước. Nồng độ (kg/khối) của bột xử lý nước trong hồ không bao giờ vượt qua

A. 12 (kg/khối). B. 1,33 (kg/khối). C. 0,75 (kg/khối). D. 0,75 (kg/khối).

Lời giải

Số khối nước tại thời điểm t là $4t+30$

Số kg bột có được tại thời điểm t là $3t$

Nồng độ bột xử lý nước có trong hồ tại thời điểm t là $f(t) = \frac{3t}{4t+30}$ với $t \geq 0$.

Khảo sát hàm số $f(t) = \frac{3t}{4t+30}$ có đạo hàm $f'(t) = \frac{90}{(4t+30)^2}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Khi đó $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3t}{4t+30} = \frac{3}{4} = 0,75$

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - mx + 2m}{x+m}$ có đồ thị (C_m) . Có tất cả bao nhiêu đồ thị (C_m) đi qua điểm $(0;1)$.

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Ta có $x = 0$ suy ra $y = \frac{2m}{m} = 2 \neq 1$. Vậy không có (C_m) nào qua $(0;1)$

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+1}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	$-\infty$

Tập các giá trị b là tập nghiệm của bất phương trình nào dưới đây?

- A.** $b^3 - 8 \leq 0$. **B.** $-b^2 + 4 > 0$. **C.** $b^2 - 3b + 2 < 0$. **D.** $b^3 - 8 < 0$.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+1}$ có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{1}{c}$ và đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{a}{c}$.

Nhìn vào bảng biến thiên, ta thấy $-\frac{1}{c} = -1 \Rightarrow c = 1$ và $\frac{a}{c} = 2 \Rightarrow a = 2$ (vì $c = 1$).

Ta có $y' = \frac{a-bc}{(cx+1)^2}$.

Vì hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$ nên

$$y' = \frac{a-bc}{(bx+c)^2} > 0 \Leftrightarrow a-bc > 0 \Leftrightarrow 2-b > 0 \Leftrightarrow b < 2 \Leftrightarrow b^3 < 8 \Leftrightarrow b^3 - 8 < 0.$$

Vậy tập các giá trị b là tập nghiệm của bất phương trình $b^3 - 8 < 0$.

Câu 12: Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + (m^2 - 2)x + 2m^2 + 4$ cắt các trục tọa độ Ox , Oy lần lượt tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 8 là

- A.** $m = \pm 2$. **B.** $m = \pm 1$. **C.** $m = \pm \sqrt{3}$. **D.** $m = \pm \sqrt{2}$.

Lời giải

Giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục tung là $B(0; 2m^2 + 4)$

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị đã cho với trục hoành là:

$$x^3 + (m^2 - 2)x + 2m^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2 - 2x + m^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ (x-1)^2 + m^2 + 1 = 0 \quad (vn) \end{cases}$$

Giao điểm của đồ thị đã cho với trục hoành là $A(-2; 0)$.

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là: } S = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2m^2 + 4) = 8 \Rightarrow m = \pm \sqrt{2}.$$



PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 20$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 20
- b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1) \cap (5; +\infty)$
- c) Điểm uốn của đồ thị hàm số có tọa độ $I(2; -26)$
- d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(-4; +\infty)$ bằng -80

Lời giải

- a) Đúng: Thay $x = 0$ suy ra $f(0) = 20$
- b) Sai: Hàm số phải đồng biến trên một miền liên tục
- c) Đúng: $x_I = \frac{-b}{3a} = \frac{-(-6)}{3.1} = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow y_I = f(x_I) = f(2) = -26$ suy ra $I(2; -26)$
- d) Đúng: Ta có $f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(-4; +\infty)$:

x	-4	-1	5	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$-\infty$	20	-80	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(-4; +\infty)$ bằng -80 .

Câu 2: Cho hàm số $y = 2x^3 + (m-1)x^2 + (m+2)x + 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Khi $m = 1$ đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 1 điểm phân biệt
- b) Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $A(0;1)$
- c) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = 9x - 3$ đi qua điểm $B(1;5)$
- d) Có 1 giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại và điểm cực tiểu có hoành độ lớn hơn $\frac{1}{6}$.

Lời giải

- a) Đúng: Đồ thị hàm số khi $m = 1$ luôn cắt trục hoành tại một điểm phân biệt
- b) Đúng: Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $A(0;1)$



c) Sai: Gọi d là tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $(d): y = 9x - 3$ thì hệ số góc của d :

$$k = 9 \Leftrightarrow y'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 6x_0^2 + 3 = 9 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1.$$

(x_0 là hoành độ tiếp điểm của (d) với (C))

Phương trình tiếp tuyến d có dạng $y = k(x - x_0) + y(x_0)$.

Khi $x_0 = 1$ thì phương trình của d là $y = 9(x - 1) + 6 = 9x - 3$ phương trình này bị loại

Khi $x_0 = -1$ thì phương trình d là $y = 9(x + 1) - 4 = 9x + 5$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 9x + 5$

d) Sai: $y' = 6x^2 + 2(m - 1)x + m + 2$

Đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại và điểm cực tiểu có hoành độ lớn hơn $\frac{1}{6}$.

$\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 lớn hơn $\frac{1}{6}$.

Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 4 - 3\sqrt{3} < m < 4 + 3\sqrt{3}$ (a)

Khi đó hai nghiệm của phương trình $y' = 0$ là

$$x_1 = \frac{1 - m - \sqrt{m^2 - 8m - 11}}{6}, \quad x_2 = \frac{1 - m + \sqrt{m^2 - 8m - 11}}{6}.$$

Vì $x_1 < x_2$ do đó x_1, x_2 đều lớn hơn $\frac{1}{6}$ khi và chỉ khi $\frac{1 - m - \sqrt{m^2 - 8m - 11}}{6} > \frac{1}{6}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 8m - 11} < -m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 - 3\sqrt{3} \vee m > 4 + 3\sqrt{3} \text{ (Do (a))} \\ -m > 0 \\ m^2 - 8m - 11 < m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 - 3\sqrt{3} \\ m > -\frac{11}{8} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{11}{8} < m < 4 - 3\sqrt{3}.$$

Vậy không có giá trị nguyên nào của tham số m thỏa mãn.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{3x+2}{x+2}$ có đồ thị là (C) . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (C) .

b) Điểm $I(-2; 3)$ là giao điểm của các đường tiệm cận của đồ thị (C) .

c) Đồ thị (C) cắt đường thẳng $y = x + 2$ tại hai điểm phân biệt

d) Đường thẳng $y = x$ cắt (C) tại hai điểm A, B . Biết đường thẳng $y = x + k$ cắt (C) tại C, D thì $ABCD$ là hình bình hành khi đó $k > 5$

Lời giải



- a) Sai: Đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (C) .
- b) Đúng: Điểm $I(-2;3)$ là giao điểm của các đường tiệm cận của đồ thị (C) .
- c) Đúng: Đồ thị (C) cắt đường thẳng $y = x + 2$ tại hai điểm phân biệt
- d) Đúng: Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $y = x$

$$\frac{3x+2}{x+2} = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 2 \Rightarrow A(-1; -1), B(2; 2)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $y = x + m$

$$\frac{3x+2}{x+2} = x + m \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + 2m-2 = 0 \quad (1)$$

Đường thẳng $y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt $C, D \Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác $-2 \Leftrightarrow (m-1)(m-9) > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 1) \cup (9; +\infty)$

Khi đó : $C(x_1; x_1 + m), D(x_2; x_2 + m), ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{DC}$

$$\Leftrightarrow x_2 - x_1 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 3 \Leftrightarrow \Delta = 9 \Leftrightarrow m^2 - 10m + 9 = 9 \Leftrightarrow m = 0, m = 10$$

Kiểm tra thấy $m = 10$ là giá trị cần tìm.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x - 3}$ có đồ thị là (C) . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là $y = -x - 6$.
- b) Đồ thị (C) nhận giao điểm $I(3; -9)$ làm tâm đối xứng.
- c) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy .
- d) Đồ thị không cắt trục Ox .

Lời giải

a) Đúng: Ta có $y = -x - 6 - \frac{14}{x-3}$

Khi đó tiệm cận xiên là $y = -x - 6$.

b) Đúng: Phương trình đường tiệm cận đứng là $x = 3$.

Suy ra giao điểm 2 tiệm cận là $I(3, -9)$ là tâm đối xứng.

c) Đúng: $y' = \frac{-x+6x+5}{(x-3)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 5 = 0 \quad (*)$

Phương trình $(*)$ luôn có 2 nghiệm $x_1 < 0 < x_2$ nên (C) luôn có 2 điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy

d) Sai: $y = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 3x + 4 = 0$ và phương trình luôn có 2 nghiệm suy ra (C) cắt Ox tại hai điểm phân biệt.



PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Gọi S là tập hợp các giá trị m để tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 + x - 3}{x - 1}$ tạo với hai trục hệ tọa độ Oxy một tam giác có diện tích bằng 2. Khi đó tổng các giá trị của S bằng bao nhiêu?

Lời giải

Với $m = 0$ ta có $y = \frac{x-3}{x-1}$. Khi đó đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.

Với $m = 2$ ta có $y = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = 2x + 3$. Khi đó đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.

Với $m \neq 0; m \neq 2$ ta có $y = mx + m + 1 + \frac{m-2}{x-1}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - mx - m - 1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{m-2}{x-1} = 0$ nên đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là

$y = mx + m + 1$. Giao điểm của tiệm cận xiên với trục Ox là $\left(\frac{-m-1}{m}; 0\right)$

Giao điểm của tiệm cận xiên với trục Oy là $(0; m+1)$.

Đường tiệm cận xiên tạo thành một tam giác thì diện tích của tam giác:

$$S = \frac{1}{2} \cdot |m+1| \cdot \left| \frac{-m-1}{m} \right| = 2 \Leftrightarrow (m+1)^2 = 4|m| \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m + 1 = 4m; & \text{khi } m \geq 0 \\ m^2 + 2m + 1 = -4m; & \text{khi } m < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 1 = 0; & \text{khi } m \geq 0 \\ m^2 + 6m + 1 = 0; & \text{khi } m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = -3 + 2\sqrt{2} \\ m = -3 - 2\sqrt{2} \end{cases}. \text{ Vậy tổng giá trị của } S \text{ bằng } \frac{-11}{2} = -5,5.$$

Câu 2: Nếu trong một ngày, một xưởng sản xuất được x chiếc vợt cầu lông thì chi phí trung bình (tính bằng nghìn đồng) cho một chiếc vợt cầu lông được cho bởi công thức $C(x) = \frac{5x+1}{x}$. Xét trong một khoảng thời gian dài, xưởng sản xuất đã sản xuất được “rất nhiều” chiếc vợt cầu lông. Vậy cho đến nay, chi phí sản xuất mỗi chiếc vợt cầu lông là bao nhiêu nghìn đồng?



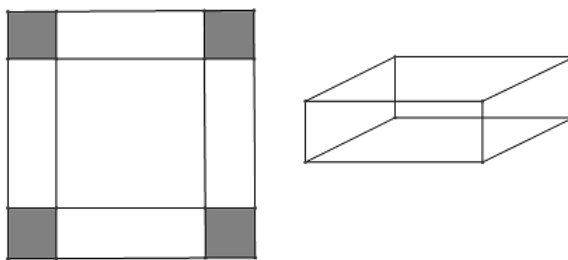
Lời giải

Chi phí sản xuất mỗi chiếc vợt cầu lông là: $\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+1}{x} \right) = 5$.

Vậy cho đến nay, chi phí sản xuất mỗi chiếc vợt cầu lông là 5 nghìn đồng



- Câu 3:** Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



Lời giải

Ta có $h = x$ (cm) là đường cao hình hộp

Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là $12 - 2x$ (cm)

$$\text{Ta có } \begin{cases} x > 0 \\ 12 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 6)$$

Thể tích của hình hộp là: $V = x(12 - 2x)^2$. Xét hàm số $y = x(12 - 2x)^2, x \in (0; 6)$

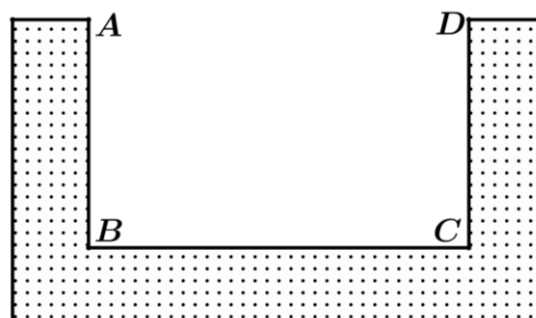
$$\text{Ta có } y' = (12 - 2x)^2 - 4x(12 - 2x) = (12 - 2x)(12 - 6x)$$

$$\text{Giải phương trình } y' = 0 \Leftrightarrow (12 - 2x)(12 - 6x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 6 \end{cases} \text{ ta nhận } x = 2.$$

x	0	2	6	
y'		+	0	-
y				

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là $y(2) = 128$. Vậy $x = 2$ (cm) thì thể tích hộp là lớn nhất.

- Câu 4:** Hình dưới đây là mương dẫn nước thủy lợi tại một địa phương phục vụ tưới tiêu cho ruộng đồng. Phần không gian trong mương để nước chảy có mặt cắt ngang là hình chữ nhật $ABCD$. Với điều kiện lưu lượng nước qua mương cho phép thì diện tích mặt cắt $ABCD$ là $0,48\text{m}^2$. Để đảm bảo yêu cầu kỹ thuật tốt nhất cho mương, người ta cần thiết kế sao cho tổng độ dài $T = AB + BC + CD$ là ngắn nhất. Khi đó chiều rộng đáy mương bằng bao nhiêu (biết chiều rộng phải dưới 1m, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải

Đặt $BC = x(m)$ với $0 < x < 1$.

Theo đề bài ta có : $AB \cdot BC = 0,48 \Rightarrow AB = \frac{0,48}{BC} = \frac{0,48}{x}$.

Xét hàm số $T = f(x) = AB + BC + CD = x + 2 \cdot AB = x + \frac{0,96}{x}$.

Đạo hàm $f'(x) = 1 - \frac{0,96}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 0,96 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{5} \approx 0,98(m)$.

x	0	$\frac{2\sqrt{6}}{5}$	1
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{4\sqrt{6}}{5}$	$\frac{49}{25}$

Vậy chiều rộng đáy mương $BC = 0,98(m)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5: Một cốc chứa 25 ml dung dịch NaOH với nồng độ 100 mg/ml. Một bình chứa dung dịch NaOH khác với nồng độ 9 mg/ml được trộn vào cốc. Gọi $C(x)$ là nồng độ của NaOH sau khi trộn x (ml) từ bình chứa, ta thấy nồng độ của NaOH trong cốc sẽ luôn giảm theo x nhưng luôn lớn hơn một số a . Tính a ?

Lời giải

Tổng khối lượng của NaOH sau khi trộn x (ml) là: $25 \cdot 100 + 9x = 2500 + 9x$ (mg)

Tổng thể tích của dung dịch sau khi trộn là: $25 + x \Rightarrow C(x) = \frac{2500 + 9x}{25 + x}$ với $x \geq 0$

Tập xác định là $D = [0; +\infty)$ có $C'(x) = \frac{9 \cdot (25 + x) - (2500 + 9x)}{(25 + x)^2} = \frac{-2275}{(25 + x)^2} < 0, \forall x \in D$

Lại có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2500 + 9x}{25 + x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2500}{x} + 9}{\frac{25}{x} + 1} = 9$

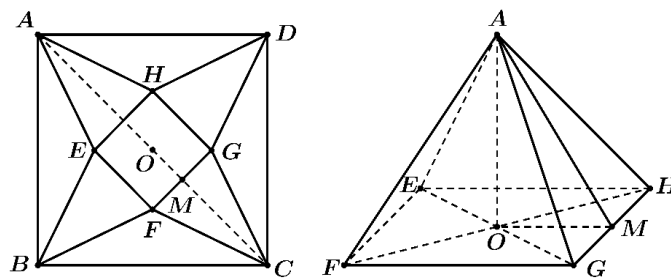
Do đó nồng độ NaOH luôn giảm nhưng luôn lớn hơn 9 mg/ml.

Câu 6: Trong tiết học Toán, giáo viên phát cho 4 tổ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 10 cm. Giáo viên yêu cầu 4 tổ sử dụng tấm bìa này và cắt tấm bìa theo các tam giác cân AEB, BFC, CGD, DHA để sau đó gấp các tam giác AEH, BEF, CFG, DGH sao cho bốn đỉnh A, B, C, D trùng nhau tạo thành

khối chóp tứ giác đều. Khi đó thể tích lớn nhất của khối chóp tứ giác đều tạo thành bằng là $\frac{a\sqrt{b}}{c} \text{ (cm}^3\text{)}$

với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = a + b + c$

Lời giải



Đặt cạnh hình vuông $EFGH$ là $x (x > 0)$. O là tâm hình vuông $ABCD, EFGH$.

Khi đó $OM = \frac{x}{2}$, $CM = CO - OM = \frac{10\sqrt{2} - x}{2} (0 < x < 10\sqrt{2})$.

Khi gò các tam giác thành hình chóp tứ giác đều $A.EFGH$ thì $A \equiv C$ nên $AM = CM$. Suy ra $AO = \sqrt{AM^2 - OM^2} = \sqrt{50 - 5\sqrt{2}x}$.

Thể tích khối chóp $A.EFGH$ là $V_{A.EFGH} = \frac{1}{3} S_{EFGH} \cdot AO = \frac{1}{3} x^2 \sqrt{50 - 5\sqrt{2}x} = \frac{1}{3} \sqrt{50x^4 - 5\sqrt{2}x^5}$.

Xét hàm số $f(x) = 50x^4 - 5\sqrt{2}x^5$ với $0 < x < 5\sqrt{2}$ ta tìm được $\max f(x) = \frac{32\sqrt{10}}{3}$ khi $x = 4\sqrt{2}$

-----HẾT-----

