



BÀI 05. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI QUYẾT BÀI TOÁN THỰC TẾ - ĐỀ SỐ 05

(Đề thi gồm: 12 câu trắc nghiệm, 04 câu đúng-sai, 06 câu trả lời ngắn)

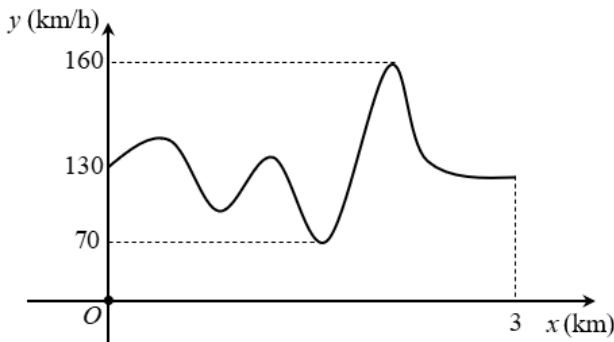
Biên soạn theo chương trình GDPT 2018 của BGD

Thời gian làm bài: 90 phút

Đề kiểm tra theo bài chuyên để ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đồ thị bên dưới là tốc độ của một chiếc xe đua trên đoạn đường đua bằng phẳng dài 3 km.



Tốc độ nhỏ nhất của xe đua trên đoạn đường này bằng

- A. 3 (km/h). B. 160 (km/h). C. 130 (km/h). **D. 70 (km/h).**

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy tốc độ nhỏ nhất bằng 70 (km/h).

Câu 2: Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ mặt đất với tốc độ ban đầu là 32,5 m/s (bỏ qua sức cản của không khí), độ cao (tính bằng mét) của vật sau t giây được cho bởi công thức $h(t) = 32,5t - 4,9t^2$. Vận tốc của vật sau 3 giây bằng

- A. 53,4 (m/s). B. 32,5 (m/s). **C. 3,1 (m/s).** D. 4,9 (m/s).

Lời giải

Theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm, vận tốc của vật sau t giây là $v(t) = h'(t) = 32,5 - 9,8t$ (m/s).

Do đó, vận tốc của vật sau 3 giây là $v(3) = 32,5 - 9,8 \cdot 3 = 3,1$ (m/s).

Câu 3: Giả sử số lượng của một quần thể nấm X tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hóa bằng hàm số $P(t) = 120e^{0,15t}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, tốc độ tăng trưởng của quần thể nấm X là

- A. 18 tế bào/giờ.** B. 120 tế bào/giờ. C. 15 tế bào/giờ. D. 102 tế bào/giờ.

Lời giải

Tốc độ tăng trưởng của quần thể nấm X tại thời điểm t là: $P'(t) = 120 \cdot 0,15 \cdot e^{0,15t} = 18e^{0,15t}$.

Do đó, tốc độ tăng trưởng của quần thể nấm X tại thời điểm $t = 0$ là $P'(0) = 18$ tế bào/giờ.

Câu 4: Giả sử chi phí (tính bằng trăm nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị hàng hóa nào đó là $C(x) = 27900 + 100x - 1,5x^2 + 0,025x^3$. Khi đó hàm chi phí biên tương ứng là

- A. $C'(x) = 28000 - 3x + 0,075x^2$. **B. $C'(x) = 100 - 3x + 0,075x^2$.**
C. $C'(x) = 100 + 3x + 0,075x^2$. D. $C'(x) = 28000 + 3x + 0,075x^2$.

Lời giải



Hàm chi phí biên tương ứng là: $C'(x) = 100 - 3x + 0,075x^2$.

Câu 5: Giả sử số lượng x sản phẩm bán ra của một loại hàng hóa phụ thuộc vào giá bán p (nghìn đồng, $p < 250$) của nó theo công thức $x = \frac{250-p}{0,01p}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Số lượng sản phẩm bán ra luôn tăng khi giá bán tăng.
- B. Số lượng sản phẩm bán ra không đổi khi giá bán giảm.
- C. Số lượng sản phẩm bán ra luôn giảm khi giá bán giảm.
- D. Số lượng sản phẩm bán ra luôn giảm khi giá bán tăng.**

Lời giải

Ta có: $x(p) = \frac{25000}{p} - 100 \Rightarrow x'(p) = -\frac{25000}{p^2} < 0$, với mọi $p \in (0; 250)$.

Do đó hàm số luôn nghịch biến trên khoảng $(0; 250)$.

Vậy số lượng sản phẩm bán ra luôn giảm khi giá bán tăng.

Câu 6: Một cửa hàng bán dầu muốn đóng những thùng đựng dầu có thể tích không đổi bằng $V = 30\text{dm}^3$. Thùng có dạng hình hộp chữ nhật có nắp, đáy là hình vuông cạnh x dm ($x > 0$). Trên thị trường, giá nguyên vật liệu làm đáy và nắp thùng là 120 000 đồng/ m^2 , giá nguyên vật liệu làm mặt xung quanh của thùng là 100 000 đồng/ m^2 . Chi phí để cửa hàng làm một thùng đựng dầu được cho bởi công thức (đơn vị nghìn đồng)?

A. $f(x) = \frac{12}{5}x^2 + \frac{120}{x}$.

B. $f(x) = 24x^2 + \frac{120}{x}$.

C. $f(x) = 2x^2 + \frac{120}{x}$.

D. $f(x) = 24x^2 + \frac{1200}{x}$.

Lời giải

Thể tích của thùng $V = 30\text{dm}^3$. Theo đề bài do x ($x > 0$, đơn vị dm) là cạnh đáy của thùng (hình vuông) nên chiều cao của thùng là: $h = \frac{V}{x^2} = \frac{30}{x^2}$.

Giá nguyên vật liệu làm đáy và nắp thùng là 1 200 đồng/ dm^2 , giá nguyên vật liệu làm mặt xung quanh của thùng là 1 000 đồng/ dm^2 .

Diện tích mặt đáy, nắp thùng và diện tích xung quanh lần lượt là: $x^2; x^2; 4xh$. Chi phí làm một thùng đựng dầu là: $f(x) = 2 \cdot 1,2 \cdot x^2 + 1,4xh = 2,4x^2 + \frac{120}{x} = \frac{12}{5}x^2 + \frac{120}{x}$ (đơn vị nghìn).

Câu 7: Một xe ô tô chở khách du lịch có sức chứa tối đa là 16 hành khách. Trong một khu du lịch, một đoàn khách gồm 22 người đang đi bộ và muốn thuê xe về khách sạn. Lái xe đưa ra thỏa thuận với đoàn khách du lịch như sau: Nếu một chuyến xe chở x (người) thì giá tiền cho mỗi người là $\frac{(40-x)^2}{2}$ (nghìn đồng). Trong bốn phương án dưới đây, lái xe sẽ thu được nhiều tiền nhất ứng với số khách được chở là

A. 13.

B. 14.

C. 15.

D. 16.

Lời giải

Gọi $f(x), x \in \mathbb{N}^*$ là lợi nhuận mà lái xe có thể thu về khi chở x người trong chuyến xe đó.

Ta có $f(x) = x \cdot \frac{(40-x)^2}{2}$ (nghìn đồng) với $1 \leq x \leq 16$.



Tính trực tiếp $f(13) = 4738,5$ (nghìn); $f(14) = 4732$ (nghìn); $f(15) = 4687,5$ (nghìn)

$f(16) = 4608$ (nghìn).

Vậy lái xe chở 13 người để thu được nhiều tiền nhất.

Câu 8: Một công ty sản xuất một sản phẩm. Bộ phận tài chính của công ty đưa ra hàm giá bán là $p(x) = 1000 - 25x$, trong đó $p(x)$ (triệu đồng) là giá bán của mỗi sản phẩm mà tại giá bán này có x sản phẩm được bán ra. Khi đó hàm doanh thu của công ty là

A. $f(x) = 1000x - 25x^2$.

B. $f(x) = 1000x + 25x^2$.

C. $f(x) = 25x^2 - 1000x$.

D. $f(x) = 1000 - 25x^2$.

Lời giải

Ta có khi có x sản phẩm được bán ra thì giá bán là $p(x) = 1000 - 25x$, do đó doanh thu của cửa hàng khi bán ra x sản phẩm là $f(x) = x.p(x) = 1000x - 25x^2$.

Câu 9: Giả sử chi phí tiền xăng C (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình v (km/h) theo công thức:

$$C(v) = \frac{5400}{v} + \frac{3}{2}v \quad (0 < v \leq 120)$$

Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là bao nhiêu để tiết kiệm tiền xăng nhất?

A. 30.

B. 60.

C. 90.

D. 120.

Lời giải

Tập xác định: $D = (0; 120]$.

Sự biến thiên:

Đạo hàm $C'(v) = -\frac{5400}{v^2} + \frac{3}{2} = \frac{3(v-60)(v+60)}{2v^2}$; $C'(v) = 0 \Leftrightarrow v = -60$ (loại) hoặc $v = 60$.

Trên khoảng $(0; 60)$, $C'(v) < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

Trên khoảng $(60; 120)$, $C'(v) > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng này.

Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $v = 60$, $C_{CT} = C(60) = 180$.

Như vậy để tiết kiệm tiền xăng nhất, tài xế nên chạy xe với tốc độ trung bình là 60 (km/h).

Câu 10: Dân số của Việt Nam sau t năm tính từ năm 2023 được dự đoán theo công thức với $N(t)$ tính theo đơn vị triệu người: $N(t) = 100.e^{0,012t}$, $0 < t \leq 50$. Biết rằng đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ gia tăng dân số của Việt Nam (đơn vị là triệu người/ năm). Vào năm nào thì tốc độ gia tăng dân số hơn 2 triệu người/ năm.

A. 2063.

B. 2064.

C. 2065.

D. 2066.

Lời giải

Tập xác định: $D = (0; 50]$.

Đạo hàm $N'(t) = 1,2e^{0,012t} = 2 \Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{2}{1,2}\right)}{0,012} \approx 42,57$

Vào năm 2066 thì tốc độ gia tăng dân số hơn 2 triệu người/ năm.

Câu 11: Giả sử hàm cầu đối với một loại hàng hóa được cho bởi công thức

$$p = \frac{354}{1 + 0,01x}, x \geq 0$$

Trong đó p là giá bán (nghìn đồng) của mỗi đơn vị sản phẩm và x là số lượng đơn vị sản phẩm đã bán. Số lượng đơn vị sản phẩm bán được sẽ thay đổi như thế nào khi giá bán tăng.

A. Tăng lên.

B. Giảm đi.

C. Không thay đổi.

D. Không xác định được.

Lời giải

Đạo hàm $p'(x) = \frac{-3,54}{(1 + 0,01x)^2} < 0$ nên hàm số p nghịch biến.

Do đó, nếu giá bán tăng thì số lượng đơn vị sản phẩm bán được giảm đi.

Câu 12: Một cửa hàng nhận làm những chiếc xô bằng nhôm hình trụ không có nắp để chứa nước. Gọi x (cm)

là bán kính đáy của chiếc xô và $S(x) = \pi x^2 + \frac{20000}{x}$ (cm²) là diện tích toàn phần của chiếc xô, khi đó

x bằng bao nhiêu để cửa hàng tốn ít nguyên vật liệu nhất (kết quả làm tròn tới hàng phần mười)?

A. 14,7.

B. 15.

C. 15,2.

D. 14.

Lời giải

Ta có: $S(x) = \pi x^2 + \frac{20000}{x}$

Đạo hàm $S'(x) = 2\pi x - \frac{20000}{x^2} = \frac{2\pi x^3 - 20000}{x^2}$.

Giải phương trình $S'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\pi x^3 - 20000 = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{10000}{\pi} \Leftrightarrow x = 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$

Bảng biến thiên:

x	0	$10 \cdot \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$	$+\infty$
$S'(x)$	-	0	+
$S(x)$		↘ 2039,4 ↗	

Ta thấy diện tích toàn phần chiếc xô nhỏ nhất khi bán kính đáy xô là $x = 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} \approx 14,7$ (cm).

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y = t^3 - 12t + 3, t \geq 0$.

a) Hàm gia tốc của vật là $a = y'$.

b) Hàm vận tốc của vật là $v(t) = 3t^2 - 12$.

c) Tại thời điểm $t = 1$ thì hạt đang chuyển động lên trên.

d) Trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 3$ thì quãng đường mà hạt đi là 23 m.

Lời giải



a) Sai: Nếu y là hàm số biểu thị cho chuyển động của hạt thì y' là hàm vận tốc v .

b) Đúng: Ta có $y = t^3 - 12t + 3 \Rightarrow y' = v = 3t^2 - 12$

c) Sai: Dựa vào hàm vận tốc $v(t) = 3t^2 - 12$ thì hạt đi lên khi $v > 0$ và xuống khi $v < 0$.

Do đó, vật đi lên khi $t \in (2; +\infty)$ và đi xuống khi $t \in (0; 2)$.

Vậy tại thời điểm $t = 1$ thì hạt đang chuyển động đi xuống.

d) Đúng: Từ $t = 0$ tới $t = 2$, vật chuyển động từ tọa độ $y = 3$ đến tọa độ $y = -13$, tức là vật đi được quãng đường 16 đơn vị độ dài.

Từ $t = 2$ tới $t = 3$, vật chuyển động từ tọa độ $y = -13$ đến tọa độ $y = -6$, tức là vật đi được quãng đường 7 đơn vị độ dài.

Kết luận quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 3$ là 23 đơn vị độ dài.

Câu 2: Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B . Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm được biểu diễn bởi công thức: $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Cho phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ triệu đồng (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.

b) Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 600 triệu đồng.

c) Lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm ($0 \leq x \leq 100$) cho B được biểu diễn bởi công thức $H(x) = -0,001x^3 + 15x - 100$.

d) Bên A bán cho B khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

Lời giải

a) Đúng: Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là $C(10) = 100 + 30.10 = 400$ triệu đồng.

b) Sai: Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là

$$R(10) = 10.P(10) = 10.(45 - 0,001.10^2) = 449 \text{ triệu đồng.}$$

c) Đúng: Lợi nhuận mà A thu được là: $H(x) = R(x) - C(x) = xP(x) - C(x)$

$$P(x) = 45x - 0,001x^3 - (100 + 30x) = -0,001x^3 + 15x - 100$$

d) Đúng: Xét hàm số $H(x) = -0,001x^3 + 15x - 100$, ($0 \leq x \leq 100$)

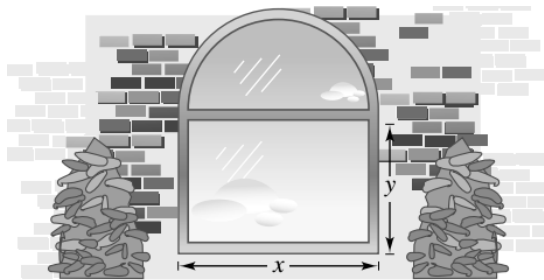
$$\text{Ta có: } H'(x) = -0,003x^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow -0,003x^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow x = 50\sqrt{2} \text{ (chọn).}$$

$$\text{Khi đó: } H(0) = -100; H(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100; H(100) = 400.$$

Vậy A bán cho B khoảng $50\sqrt{2} \approx 70,7$ tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất bằng $H(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100$.



Câu 3: Để làm một cửa sổ có dạng một hình bán nguyệt và một hình chữ nhật ghép lại như hình vẽ bên dưới, người ta dùng 8 m dây thép để làm các đường viền. Gọi x, y là độ dài cạnh của khung hình chữ nhật.



- a) Chiều dài dây để uốn ra bán nguyệt là $\frac{\pi x}{2}$.
- b) Giá trị của y tính theo x là $4 - \frac{x(4 + \pi)}{4}$.
- c) Diện tích của cửa sổ là $S = 4x - x^2$.
- d) Khi diện tích của cửa sổ lớn nhất thì $y = \frac{16}{8 + \pi}$.

Lời giải

- a) Đúng: Bán kính của hình bán nguyệt là $\frac{x}{2}$ nên nửa chu vi bán nguyệt là $\frac{\pi x}{2}$.
- b) Đúng: Ta có $2(x + y) + \frac{\pi x}{2} = 8 \Leftrightarrow y = 4 - \frac{x(4 + \pi)}{4}$.
- c) Sai: Diện tích của cửa sổ: $S = xy + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = x\left(4 - x - \frac{\pi x}{4}\right) + \frac{\pi x^2}{8} = 4x - x^2 - \frac{\pi x^2}{8}$.
- d) Đúng: S đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{4}{2 + \frac{\pi}{4}} = \frac{16}{8 + \pi}$ nên $y = 4 - x - \frac{\pi x}{4} = \frac{16}{8 + \pi}$.

Câu 4: Tại một cơ sở sản xuất nước tinh khiết, nhân viên phụ trách sản xuất cho biết, nếu mỗi ngày cơ sở này sản xuất $x (m^3)$ nước tinh khiết thì phải chi phí các khoản sau: 5 triệu đồng chi phí cố định; 0,15 triệu đồng cho mỗi mét khối sản phẩm; $0,0005x^2$ chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết công suất tối đa mỗi ngày của cơ sở này là $200m^3$. Gọi $C(x)$ là chi phí sản xuất $x (m^3)$ sản phẩm mỗi ngày và $\bar{c}(x)$ là chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm. Khi đó:

- a) $C(x) = 0,0005x^2 + 0,15x + 5$.
- b) Chi phí sản xuất $100m^3$ nước tinh khiết là 20 triệu đồng.
- c) $\bar{c}(x) = 0,0005x + 0,15 + \frac{5}{x}$.
- d) Chi phí trung bình giảm xuống khi sản lượng nước tinh khiết trong ngày không vượt quá $100 m^3$.

Lời giải

- a) Đúng: Chi phí mỗi ngày là tổng các chi phí nên $C(x) = 0,0005x^2 + 0,15x + 5$ (triệu đồng).
- b) Sai: Khi $x = 100$, ta có $C(100) = 0,0005 \times 100^2 + 0,15 \times 100 + 5 = 25$.
- c) Sai: Chi phí trung bình trên mỗi khối sản phẩm là:

$$\bar{c}(x) = \frac{0,0005x^2 + 0,15x + 5}{x} = 0,0005x + 0,15 + \frac{5}{x}.$$

- d) Đúng: Xét hàm số $\bar{c}(x) = 0,0005x + 0,15 + \frac{5}{x}$, $0 < x \leq 200$.

$$\text{Ta có } \bar{c}'(x) = \frac{5}{10^4} - \frac{5}{x^2}, \bar{c}'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 10^4 \Rightarrow x = 100 \text{ (do } x \in (0; 200])$$

Bảng biến thiên:

x	0	100	200	
$\bar{C}'(x)$		−	0	+
$\bar{C}(x)$	$+\infty$		0,25	0,275

Vậy chi phí trung bình giảm khi hàm số $\bar{C}(x)$ nghịch biến, tức là $x \in (0;100)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

$$C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500.$$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa. Hỏi lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm trong một ngày?

Lời giải

Số tiền thu về khi bán x mét vải lụa là: $220x$. Lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa là:

$$L(x) = 220x - (x^3 - 3x^2 - 20x + 500) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$$

Xét hàm số $L(x) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$ với $x \in [1;18]$

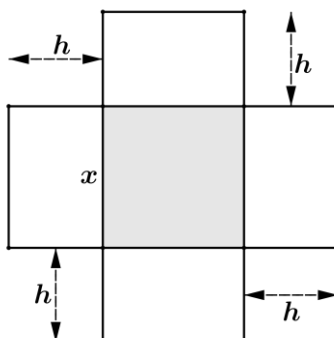
$$L'(x) = -3x^2 + 6x + 240 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \in [1;18] \\ x = -8 \notin [1;18] \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

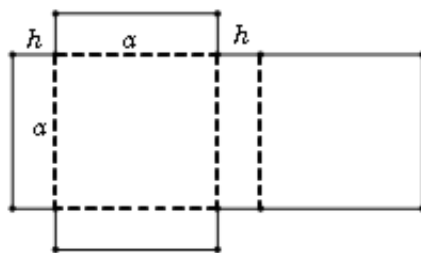
x	1	10	18	
y'		+	0	–
y			1200	
		–258		–1040

Vậy hộ làm nghề dệt này thu được lợi nhuận tối đa trong một ngày là 1200 nghìn đồng khi sản xuất 10 mét vải lụa trong một ngày.

Câu 2: Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo hình vẽ. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x (cm), chiều cao là h (cm) và thể tích là 4000cm^3 . Tìm độ dài cạnh hình vuông x sao cho chiếc hộp làm ra tốn ít bìa các tông nhất.



Lời giải



Thể tích khối hộp $V = x.x.h = x^2h = 4000 \Rightarrow h = \frac{4000}{x^2}$.

Để chiếc hộp làm ra ít tốn bìa các tông nhất khi và chỉ khi diện tích toàn phần của hộp là nhỏ nhất.

Diện tích toàn phần của hộp (không nắp) $S_{\text{tp}} = S_{\text{day}} + S_{\text{xung quanh}} = x.x + 4.hx = x^2 + 4hx$

$= x^2 + 4x \cdot \frac{4000}{x^2} = x^2 + \frac{16000}{x}$

Xét hàm $f(x) = x^2 + \frac{16000}{x}$ với $x > 0$ có $f'(x) = 2x - \frac{16000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{16000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 20$

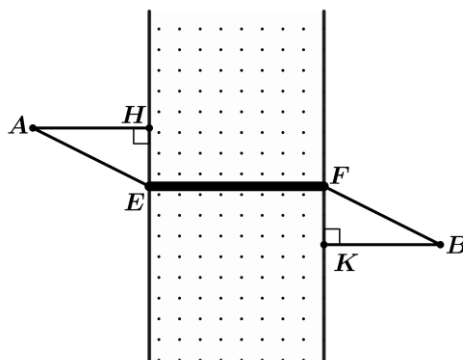
Bảng biến thiên:

x	0	20	$+\infty$
y'		–	0
		+	
y	$+\infty$	$f(20)$	$+\infty$

Vậy độ dài cạnh hình vuông $x = 20$ cm thì chiếc hộp làm ra tốn ít bìa các tông nhất.



Câu 3: Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là 4 km và thành phố B cách con sông một khoảng là 6 km (hình vẽ), biết $HE + KF = 20$ km và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu cách thành phố A là bao nhiêu kilomet để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$)? (kết quả làm tròn đến phần chục)



Lời giải

Đặt $HE = x$, $FK = y$, với $x, y > 0$

Ta có: $HE + KF = 20 \Rightarrow x + y = 20$,
$$\begin{cases} AE = \sqrt{16 + x^2} \\ BF = \sqrt{36 + y^2} = \sqrt{36 + (20 - x)^2} \end{cases}$$

Nhận xét: Vì EF không đổi nên AB ngắn nhất khi $AE + BF$ nhỏ nhất.

Ta có $AE + BF = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{(20 - x)^2 + 36} = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 40x + 436} = f(x)$

Đạo hàm $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} + \frac{x - 20}{\sqrt{x^2 - 40x + 436}} = 0 \Rightarrow x = 8, \forall x \in (0; 20)$

Bảng biến thiên

x	0	8	20		
$f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$	$+\infty$		$10\sqrt{5}$		$+\infty$

Vậy $AE = \sqrt{8^2 + 16} \approx 8,94$ km

Câu 4: Giả sử doanh số bán hàng (đơn vị triệu đồng) của một sản phẩm mới trong vòng một số năm nhất định tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t) = 500(t^2 + me^{-t})$, với $t \geq 0$ là thời gian tính bằng năm kể từ khi phát hành sản phẩm mới, $m \leq 0$ là tham số. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Biết rằng tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm, khi đó giá trị nhỏ nhất của m bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $f'(t) = 500(2t - me^{-t})$ và $f''(t) = 500(2 + me^{-t})$

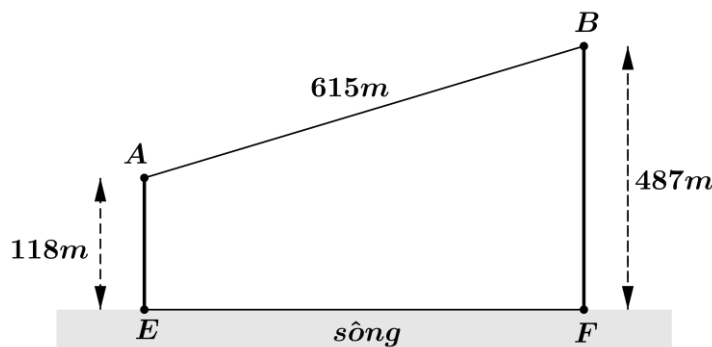
Tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm. $\Leftrightarrow f'(t)$ là hàm số đồng biến trên $[0; 10] \Leftrightarrow f''(t) \geq 0, \forall t \in [0; 10] \Leftrightarrow 500(2 + me^{-t}) \geq 0, \forall t \in [0; 10]$

$\Leftrightarrow 2 + me^{-t} \geq 0, \forall t \in [0; 10] \Leftrightarrow me^{-t} \geq -2, \forall t \in [0; 10] \Leftrightarrow m \geq -2e^t, \forall t \in [0; 10]$

$$\Leftrightarrow m \geq -2e^0 = -2 \text{ (do hàm số } y = -2e^x \text{ nghịch biến trên } [0;10]).$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của m là -2 .

Câu 5: Cho hai vị trí A, B cách nhau 615 m , cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ.

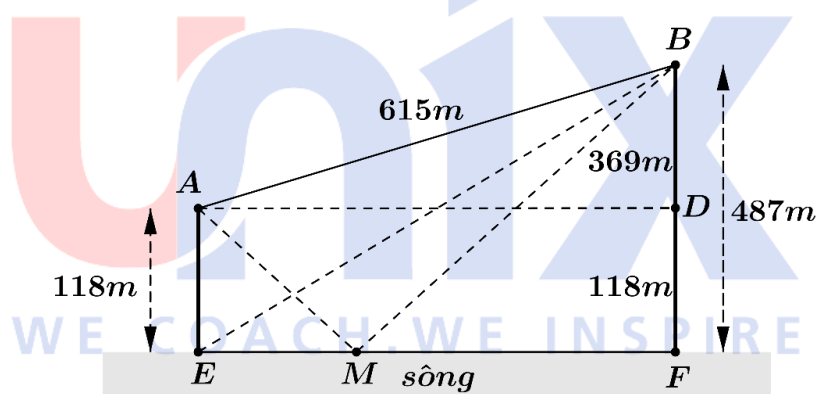


Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118 m và 487 m . Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B . Đoạn đường ngắn nhất là số nguyên dương mà người đó có thể đi là bao nhiêu?

Lời giải

Giả sử người đó đi từ A đến M để lấy nước và đi từ M về B

Dễ dàng tính được $BD = 369, EF = 492$.



Ta đặt $EM = x$, khi đó ta được: $MF = 492 - x$; $AM = \sqrt{x^2 + 118^2}$; $BM = \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}$.

Như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định bằng tổng quãng đường AM và MB :

$$\text{Xét hàm } f(x) = \sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} \text{ với } x \in [0; 492]$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được quãng đường ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm M .

$$\text{Đạo hàm: } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} = \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}} \Leftrightarrow x\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} = (492 - x)\sqrt{x^2 + 118^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2[(492 - x)^2 + 487^2] = (492 - x)^2(x^2 + 118^2) \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (487x)^2 = (58056 - 118x)^2 \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{58056}{605} \text{ hay } x = -\frac{58056}{369} \Leftrightarrow x = \frac{58056}{605} \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases}$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 492]$.

So sánh các giá trị của $f(0); f\left(\frac{58056}{605}\right); f(492)$ ta có giá trị nhỏ nhất $f\left(\frac{58056}{605}\right) \approx 779,8 \text{ m}$

Khi đó quãng đường đi ngắn nhất là xấp xỉ $779,8 \approx 780 \text{ m}$.

Câu 6: Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 100 km. Vận tốc dòng nước là 5 (km/h). Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h), ($v > 5$) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = c.v^3.t$, trong đó c là hằng số dương, E được tính bằng Jun. Biết rằng vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên thuộc khoảng $(a; b)$ thì năng lượng tiêu hao của cá giảm. Hãy tính giá trị lớn nhất của $b - a$ (kết quả làm tròn tới hàng phần mười).

Lời giải

Khi bơi ngược dòng vận tốc của cá là $v - 5$ (km/h).

Thời gian để cá vượt khoảng cách 100 km là $t = \frac{100}{v-5} (v > 5)$.

Năng lượng tiêu hao của cá khi vượt khoảng cách 100 km là $E(v) = c.v^3 \cdot \frac{100}{v-5} = 100c \cdot \frac{v^3}{v-5}$

Xét hàm số $y = E(v)$ ta có $E'(v) = 100c \cdot \frac{3v^2(v-5) - v^3}{(v-5)^2} = 100c \cdot \frac{v^2(2v-15)}{(v-5)^2}$

Giải phương trình $E'(v) = 0 \Leftrightarrow v = 7,5$ (do $v > 5$). Ta có bảng biến thiên

v	5	7, 5	$+\infty$	
$E'(v)$		–	0	+
$E(v)$	$+\infty$		$E(7, 5)$	$+\infty$

Vậy vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên thuộc khoảng $(5; 7,5)$ thì năng lượng tiêu hao của cá giảm.

Khi đó giá trị lớn nhất của $b - a$ là 2,5.

-----HẾT-----