

Dạng 2: Xác định số hạng và công sai của cấp số cộng

Phương pháp:

- Xác định một cấp số cộng là xác định số hạng đầu u_1 và công sai d
- Từ những giả thiết ta thường lập hệ phương trình theo ẩn số u_1 và d rồi giải hệ đó.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -3$, công sai $d = 5$.

- Viết công thức của số hạng tổng quát u_n .
- Số 492 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng trên?
- Số 300 có là số hạng nào của cấp số cộng trên không?

Lời giải

- Ta có: $u_n = u_1 + (n-1)d = -3 + (n-1).5 = 5n - 8$.
- Ta có: $5n - 8 = 492 \Leftrightarrow n = 100$. Vậy số 492 là số hạng thứ 100 của (u_n) .
- Nhận thấy $5n - 8 = 300 \Leftrightarrow n = \frac{308}{5} = 61,6 \notin \mathbb{N}^+$. Vậy số 300 không là số hạng nào của (u_n) .

Bài tập 2: Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_1 + u_2 + u_3 = -1$. Tìm công sai d và viết công thức của số hạng tổng quát u_n .

Lời giải

Ta có $u_1 + u_2 + u_3 = -1$ hay $3u_1 + 3d = -1$ mà $u_1 = \frac{1}{3}$ nên $d = -\frac{2}{3}$.

Công thức của số hạng tổng quát u_n là: $u_n = \frac{1}{3} + (n-1)\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}n + 1$.

Bài tập 3: Tìm x sao cho $x+3$, $2x+1$ và $5x+2$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng.

Lời giải

Từ $x+3$, $2x+1$ và $5x+2$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng ta suy ra:

$$(x+3) + (5x+2) = 2(2x+1) \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}.$$

Thử lại ta có ba số tìm được là $\frac{3}{2}$, -2 , $-\frac{11}{2}$ thỏa mãn bài toán. Vậy $x = -\frac{3}{2}$.

Bài tập 4: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 + 2u_5 = 0$ và $S_4 = 14$. Tính số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng.

Lời giải

Ta có $u_1 + 2u_5 = 0 \Leftrightarrow u_1 + 2(u_1 + 4d) = 0 \Leftrightarrow 3u_1 + 8d = 0$.

$$S_4 = 14 \Leftrightarrow \frac{4(2u_1 + 3d)}{2} = 14 \Leftrightarrow 2u_1 + 3d = 7$$

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} 3u_1 + 8d = 0 \\ 2u_1 + 3d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 \\ d = -3 \end{cases}.$$

Bài tập 5: Cho tam giác ABC có ba góc A, B, C theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Khi đó hãy chứng minh rằng: $AC^2 + AC \cdot BC = AB^2 + AC^2$

Lời giải

Theo định lí côsin ta có:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}, \cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC}, \cos C = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2 \cdot BC \cdot AC}$$

$$\text{Theo định lí sin ta có: } \sin A = \frac{BC}{2R}, \sin B = \frac{AC}{2R}, \sin C = \frac{AB}{2R}.$$

Vì ba góc A, B, C theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên $A + C = 2B$

$$\text{Do đó } \sin(A + C) = \sin(2B) \Leftrightarrow \sin A \cos C + \sin C \cos A = 2 \sin B \cos B$$

$$\Leftrightarrow \frac{BC}{2R} \cdot \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2 \cdot BC \cdot AC} + \frac{AB}{2R} \cdot \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = 2 \cdot \frac{AC}{2R} \cdot \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{AB \cdot BC} \Leftrightarrow AC^2 + AB \cdot BC = AB^2 + BC^2.$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Xác định số hàng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) có $u_9 = 5u_2$ và $u_{13} = 2u_6 + 5$.

A. $u_1 = 3$ và $d = 4$. **B.** $u_1 = 3$ và $d = 5$. **C.** $u_1 = 4$ và $d = 5$. **D.** $u_1 = 4$ và $d = 3$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } u_n = u_1 + (n-1)d. \text{ Theo đầu bài ta có hệ phương trình: } \begin{cases} u_1 + 8d = 5(u_1 + d) \\ u_1 + 12d = 2(u_1 + 5d) + 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 - 3d = 0 \\ u_1 - 2d = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}.$$

Câu 2: Cho (u_n) là một cấp số cộng thỏa mãn $u_1 + u_3 = 8$ và $u_4 = 10$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 + u_3 = 8 \\ u_4 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + 2d = 8 \\ u_1 + 3d = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 2d = 8 \\ u_1 + 3d = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}.$$

Vậy công sai của cấp số cộng là $d = 3$.

Câu 3: Tìm công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 7 \\ u_1 + u_6 = 12 \end{cases}$

- A. $u_n = 2n + 3$. B. $u_n = 2n - 1$. C. $u_n = 2n + 1$. D. $u_n = 2n - 3$.

Lời giải

Giả sử dãy cấp số cộng (u_n) có công sai là d . Khi đó, $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 7 \\ u_1 + u_6 = 12 \end{cases}$ trở thành:

$$\begin{cases} (u_1 + d) - (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 7 \\ u_1 + (u_1 + 5d) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 7 \\ 2u_1 + 5d = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$$

Số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) : $u_n = u_1 + (n-1)d = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$

Vậy $u_n = 2n - 1$.

Câu 4: Cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$, công sai $d = -2$ thì số hạng thứ 5 là

- A. $u_5 = 8$. B. $u_5 = 1$. C. $u_5 = -5$. D. $u_5 = -7$.

Lời giải

Ta có: $u_5 = u_1 + 4d = 3 + 4 \cdot (-2) = -5$.

Câu 5: Cho cấp số cộng có $u_1 = -3$, $d = 4$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A. $u_5 = 15$. B. $u_4 = 8$. C. $u_3 = 5$. D. $u_2 = 2$.

Lời giải

Ta có $u_3 = u_1 + 2d = -3 + 2 \cdot 4 = 5$.

Câu 6: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 11$ và công sai $d = 4$. Hãy tính u_{99} .

- A. 401. B. 403. C. 402. D. 404.

Lời giải

Ta có: $u_{99} = u_1 + 98d = 11 + 98 \cdot 4 = 403$.

Câu 7: Cho cấp số cộng (u_n) , biết: $u_1 = 3$, $u_2 = -1$. Chọn đáp án đúng.

- A. $u_3 = 4$. B. $u_3 = 7$. C. $u_3 = 2$. D. $u_3 = -5$.

Lời giải

Ta có (u_n) là cấp số cộng nên $2u_2 = u_1 + u_3$ suy ra $u_3 = 2u_2 - u_1 = -5$.

Câu 8: Một cấp số cộng (u_n) có $u_{13} = 8$ và $d = -3$. Tìm số hạng thứ ba của cấp số cộng (u_n) .

- A. 50. B. 28. C. 38. D. 44

Lời giải

Ta có: $u_{13} = u_1 + 12d \Leftrightarrow 8 = u_1 + 12 \cdot (-3) \Rightarrow u_1 = 44 \Rightarrow u_3 = u_1 + 2d = 44 - 6 = 38$.

Câu 9: Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công sai $d = 2$. Giá trị của u_7 bằng:

- A. 15. B. 17. C. 19. D. 13.

Lời giải

Ta có $u_7 = u_1 + 6 \cdot d = 3 + 6 \cdot 2 = 15$.

Câu 10: Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 4$. Giá trị u_{2019} bằng

- A. 8074. B. 4074. C. 8078. D. 4078.

Lời giải

Áp dụng công thức của số hạng tổng quát $u_n = u_1 + (n-1)d = 2 + 2018 \cdot 4 = 8074$.

Câu 11: Tìm số hạng thứ 11 của cấp số cộng có số hạng đầu bằng 3 và công sai $d = -2$.

- A. -21. B. 23. C. -19. D. -17.

Lời giải

Áp dụng công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng ta có $u_{11} = u_1 + 10d = 3 + 10 \cdot (-2) = -17$.

Câu 12: Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -2$ và công sai $d = -7$. Giá trị u_6 bằng

- A. 37. B. -37. C. -33. D. 33.

Lời giải

Ta có $u_6 = u_1 + 5d = -2 - 35 = -37$.

Câu 13: Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 5$. Giá trị u_4 bằng

- A. 22. B. 17. C. 12. D. 250.

Lời giải

Ta có: $u_4 = u_1 + 3d = 2 + 15 = 17$.

Câu 14: Cho cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu tiên $u_1 = 2$ và công sai $d = 2$. Tìm u_{2018} ?

- A. $u_{2018} = 2^{2018}$. B. $u_{2018} = 2^{2017}$. C. $u_{2018} = 4036$. D. $u_{2018} = 4038$.

Lời giải

Ta có: $u_n = u_1 + (n-1)d \Rightarrow u_{2018} = 2 + (2018-1) \cdot 2 = 4036$.

Câu 15: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và công sai $d = 7$. Hỏi kể từ số hạng thứ mấy trở đi thì các số hạng của (u_n) đều lớn hơn 2018 ?

- A. 287. B. 289. C. 288. D. 286.

Lời giải

Ta có: $u_n = u_1 + (n-1)d = 3 + 7(n-1) = 7n - 4$; $u_n > 2018 \Leftrightarrow 7n - 4 > 2018 \Leftrightarrow n > \frac{2022}{7}$.

Vậy $n = 289$.

Câu 16: Viết ba số xen giữa 2 và 22 để ta được một cấp số cộng có 5 số hạng?

- A. 6, 12, 18. B. 8, 13, 18. C. 7, 12, 17. D. 6, 10, 14.

Lời giải

Xem cấp số cộng cần tìm là (u_n) có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_5 = 22 \end{cases}$ suy ra: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ d = 5 \end{cases}$.

Vậy cấp số cộng cần tìm là (u_n) : 2, 7, 12, 17, 22.

- Câu 17:** Cho cấp số cộng có $u_1 = -2$ và $d = 4$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau ?
A. $u_4 = 8$. B. $u_5 = 15$. C. $u_2 = 3$. **D. $u_3 = 6$.**

Lời giải

Ta có: $u_1 = -2$ và $d = 4$ suy ra $u_2 = u_1 + d = -2 + 4 = 2$

$u_3 = u_1 + 2d = -2 + 2.4 = 6$; $u_4 = u_1 + 3d = -2 + 3.4 = 10$; $u_5 = u_1 + 4d = -2 + 4.4 = 14$

- Câu 18:** Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$; $d = 9$. Khi đó số 2018 là số hạng thứ mấy trong dãy?
A. 226. **B. 225.** C. 223. D. 224.

Lời giải

$u_n = u_1 + (n-1)d \Leftrightarrow 2018 = 2 + (n-1).9 \Leftrightarrow n = 225$.

- Câu 19:** Cho cấp số cộng 1, 4, 7, Số hạng thứ 100 của cấp số cộng là
A. 297. B. 301. C. 295. **D. 298.**

Lời giải

Cấp số cộng 1, 4, 7, có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 3$.

Số hạng thứ 100 của cấp số cộng là: $u_{100} = u_1 + 99.d = 1 + 99.3 = 298$.

- Câu 20:** Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_1 = 3$, $u_8 = 24$ thì u_{11} bằng
A. 30. **B. 33.** C. 32. D. 28.

Lời giải

Ta có: $u_8 = u_1 + 7d \Rightarrow d = \frac{u_8 - u_1}{7} = \frac{24 - 3}{7} = 3$; $u_{11} = u_1 + 10d = 33$.

- Câu 21:** Cho cấp số cộng có số hạng thứ 3 và số hạng thứ 7 lần lượt là 6 và -2. Tìm số hạng thứ 5.
A. $u_5 = 2$. B. $u_5 = -2$. C. $u_5 = 0$. D. $u_5 = 4$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} u_3 = 6 \\ u_7 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 6 \\ u_1 + 6d = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -2 \\ u_1 = 10 \end{cases}$. Vậy $u_5 = 2$.

- Câu 22:** Cho cấp số cộng (u_n) , biết $u_2 = 3$ và $u_4 = 7$. Giá trị của u_{15} bằng
A. 27. B. 31. C. 35. **D. 29.**

Lời giải

Từ giả thiết $u_2 = 3$ và $u_4 = 7$ suy ra ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} u_1 + d = 3 \\ u_1 + 3d = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}.$$

Vậy $u_{15} = u_1 + 14d = 29$.

Câu 23: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Số 11 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng đã cho?

A. 17.

B. 16.

C. 18.

D. 19.

Lời giải

Ta có: $u_3 - u_{15} = 84 \Leftrightarrow u_1 + 2d - (u_1 + 14d) = 84 \Leftrightarrow d = -7$.

Số hạng tổng quát: $u_n = -7n + 130$.

Ta có: $u_n = 11 \Leftrightarrow n = 17$.

Câu 24: Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_1 = -1$; $d = 2$; $u_n = 43$. Hỏi cấp số cộng đó có bao nhiêu số hạng?

A. 20.

B. 23.

C. 22.

D. 21.

Lời giải

$u_n = u_1 + (n-1)d \Leftrightarrow 43 = -1 + (n-1) \cdot 2 \Leftrightarrow n = 23$.

Câu 25: Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu là $u_2 = 1$, $u_5 = 19$. Số 103 là số hạng thứ mấy trong cấp số cộng đã cho?

A. 19.

B. 18.

C. 20.

D. 17.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} u_2 = 1 \\ u_5 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d = 1 \\ u_1 + 4d = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -5 \\ d = 6 \end{cases}$.

Lại có $u_n = u_1 + (n-1)d \Leftrightarrow 103 = -5 + (n-1) \cdot 6 \Leftrightarrow n = 19$.

Vậy số 103 là số hạng thứ 19 trong cấp số cộng đã cho.

Câu 26: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 5$ và công sai $d = -3$. Biết rằng -289 là một số hạng của cấp số cộng trên. Hỏi đó là số hạng thứ bao nhiêu?

A. 98.

B. 99.

C. 101.

D. 100.

Lời giải

Số hạng tổng quát của cấp số cộng có $u_1 = 5$ và công sai $d = -3$ là $u_n = 5 - 3(n-1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ta có $-289 = 5 - 3(n-1) \Leftrightarrow -294 = -3(n-1) \Leftrightarrow 98 = n-1 \Leftrightarrow n = 99$.

Vậy -289 là số hạng thứ 99 của cấp số cộng trên.

Câu 27: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = 2001$ và $u_5 = 1995$. Khi đó u_{1001} bằng

A. 4005.

B. 1.

C. 3.

D. 4003.

Lời giải

Gọi u_1 và d lần lượt là số hạng đầu tiên và công sai của cấp số cộng.

Ta có: $\begin{cases} u_2 = 2001 \\ u_5 = 1995 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d = 2001 \\ u_1 + 4d = 1995 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2003 \\ d = -2 \end{cases}$. Vậy $u_{1001} = u_1 + 1000d = 3$.

Câu 28: Một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 2018$ công sai $d = -5$. Hỏi bắt đầu từ số hạng nào của cấp số cộng đó thì nó nhận giá trị âm.

- A. u_{406} . B. u_{403} . C. u_{405} . D. u_{404} .

Lời giải

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d = 2018 - 5(n-1)$

Có $u_n < 0 \Leftrightarrow 2018 - 5(n-1) < 0 \Leftrightarrow 5n > 2023 \Leftrightarrow n > \frac{2023}{5}, n \in \mathbb{N}^+$ 405.

Vậy từ u_{405} thì số hạng của cấp số cộng đó nhận giá trị âm.

Câu 29: Cho cấp số cộng (u_n) có $\begin{cases} u_1 - 2u_5 + u_6 = -15 \\ u_3 + u_7 = 46 \end{cases}$. Số hạng đầu u_1 là

- A. $u_1 = -5$. B. $u_1 = 5$. C. $u_1 = 3$. D. $u_1 = -3$.

Lời giải

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d$.

$\begin{cases} u_1 - 2u_5 + u_6 = -15 \\ u_3 + u_7 = 46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - 2(u_1 + 4d) + (u_1 + 5d) = -15 \\ (u_1 + 2d) + (u_1 + 6d) = 46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 5 \\ 2u_1 + 8d = 46 \end{cases} \Rightarrow u_1 = 3$.

Câu 30: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 5, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tính u_{10} ?

- A. 57. B. 62. C. 47. D. 52.

Lời giải:

Từ $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 5, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Ta có $u_{n+1} - u_n = 5$ nên dãy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 5$ nên $u_{10} = u_1 + 9d = 2 + 45 = 47$.

Câu 31: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_5 + 3u_3 - u_2 = -21 \\ 3u_7 - 2u_4 = -34 \end{cases}$. Tính số hạng thứ 100 của cấp số.

- A. $u_{100} = -243$. B. $u_{100} = -295$. C. $u_{100} = -231$. D. $u_{100} = -294$.

Lời giải

$\begin{cases} u_5 + 3u_3 - u_2 = -21 \\ 3u_7 - 2u_4 = -34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d + 3(u_1 + 2d) - u_1 - d = -21 \\ 3(u_1 + 6d) - 2(u_1 + 3d) = -34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = -7 \\ u_1 + 12d = -34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ d = -3 \end{cases}$.

Số hạng thứ 100 là $u_{100} = 2 + 99(-3) = -295$.

Câu 32: Cho cấp số cộng u_n có công sai $d = 2$ và biểu thức $u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Số 2018 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng u_n ?

- A. 1011. B. 1014. C. 1013. D. 1012.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{cases} u_2 = u_1 + 2 \\ u_3 = u_1 + 4 \Rightarrow u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = (u_1 + 2)^2 + (u_1 + 4)^2 + (u_1 + 6)^2 = 3u_1^2 + 24u_1 + 56 = 3(u_1 + 4)^2 + 8 \geq 8 \\ u_4 = u_1 + 6 \end{cases}$$

Vậy $u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $u_1 = -4$.

Từ đó suy ra $2018 = u_1 + (n-1)d \Leftrightarrow 2018 = -4 + (n-1)2 \Leftrightarrow n = 1012$.

Câu 33: Cho cấp số cộng (u_n) , biết $u_1 = -5$, $d = 2$. Số 81 là số hạng thứ bao nhiêu?

- A. 100. B. 50. C. 75. D. 44.

Lời giải

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d \Leftrightarrow 81 = -5 + (n-1)2 \Leftrightarrow n = 44$.

Vậy 81 là số hạng thứ 44.

Câu 34: Một cấp số cộng (u_n) có $u_9 = 47$, công sai $d = 5$. Số 10092 là số hạng thứ mấy trong cấp số cộng đó?

- A. 2018. B. 2017. C. 2016. D. 2019.

Lời giải

Ta có $u_9 = u_1 + 8d \Rightarrow u_1 = 7$.

Gọi 10092 là số hạng thứ n trong khai triển, ta có:

$$10092 = u_1 + (n-1)d \Rightarrow n = \frac{10092 - 7}{5} + 1 = 2018.$$

Câu 35: Cho hai cấp số cộng $(x_n): 4, 7, 10, \dots$ và $(y_n): 1, 6, 11, \dots$. Hỏi trong 2018 số hạng đầu tiên của mỗi cấp số có bao nhiêu số hạng chung?

- A. 404. B. 673. C. 403. D. 672.

Lời giải

Số hạng tổng quát của cấp số cộng (x_n) là: $x_n = 4 + (n-1).3 = 3n + 1$.

Số hạng tổng quát của cấp số cộng (y_n) là: $y_m = 1 + (m-1).5 = 5m - 4$.

Giả sử k là 1 số hạng chung của hai cấp số cộng trong 2018 số hạng đầu tiên của mỗi cấp số.

Vì k là 1 số hạng của cấp số cộng (x_n) nên $k = 3i + 1$ với $1 \leq i \leq 2018$ và $i \in \mathbb{N}^+$.

Vì k là 1 số hạng của cấp số cộng (y_n) nên $k = 5j - 4$ với $1 \leq j \leq 2018$ và $j \in \mathbb{N}^+$.

Do đó $3i + 1 = 5j - 4 \Rightarrow 3i = 5j - 5 \Rightarrow i \vdots 5 \Rightarrow i \in \{5; 10; 15; \dots; 2015\} \Rightarrow$ có 403 số hạng chung.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho cấp số cộng $-2; x; 6; y$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $x = 2$ b) $y = 8$ c) $P = y - x = 6$ d) $P = x^2 + y^2 = 104$.

Lời giải

a) Đúng: Theo tính chất của cấp số cộng, ta có: $x = \frac{-2+6}{2} = 2$ và $6 = \frac{x+y}{2}$.

b) Sai: $x = 2$ nên $6 = \frac{2+y}{2} \Rightarrow y = 10$.

c) Sai: Vậy $P = y - x = 8$

d) Đúng: Vậy $P = x^2 + y^2 = 2^2 + 10^2 = 104$.

Câu 2: Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d < 0$ thỏa mãn $\begin{cases} u_1 + u_7 = 26 \\ u_2^2 + u_6^2 = 466 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Số hạng $u_1 = 25$ b) Công sai $d = -3$ c) Số hạng $u_{10} = -11$ d) Số hạng $u_{2024} = -8067$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} u_1 + u_7 = 26 \\ u_2^2 + u_6^2 = 466 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 6d = 26 \\ (u_1 + d)^2 + (u_1 + 5d)^2 = 466 \end{cases}$

$$\begin{cases} u_1 = 13 - 3d & (1) \\ (u_1 + d)^2 + (u_1 + 5d)^2 = 466 & (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta được: $(13 - 2d)^2 + (13 + 2d)^2 = 466 \Leftrightarrow 8d^2 + 338 = 466 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 4 \\ d = -4 \end{cases}$

a) Đúng: Vì $d < 0$ nên ta nhận $d = -4$, khi đó $u_1 = 25$

b) Sai: Ta có: $u_n = u_1 + (n - 1)d = 25 + (n - 1)(-4) = 29 - 4n$.

c) Đúng: Số hạng $u_{10} = -11$

d) Đúng: Số hạng $u_{2024} = -8067$

Câu 3: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 5$ và $d = -7$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $u_{11} = -65$ b) $u_5 + u_7 = -50$

c) Số -849 là số hạng thứ 123 của cấp số cộng

d) Số -114 là số hạng thứ 18 của cấp số cộng

Lời giải

Số hạng tổng quát của cấp số cộng là: $u_n = u_1 + (n-1)d = 5 + (n-1).(-7) = -7n + 12$

a) Đúng: Ta có: $u_{11} = -7.11 + 12 = -65$.

b) Sai: $u_5 + u_7 = -60$

c) Đúng: Ta có: $-849 = -7n + 12 \Rightarrow n = 123$.

d) Đúng: Ta có $-114 = -7n + 12 \Rightarrow n = 18$

Câu 4: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 15 \\ u_1 + u_6 = 27 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau”

a) Số hạng $u_1 = 21$

b) Công sai của cấp số cộng bằng -2

c) Số hạng $u_{11} = -9$

d) Số -6048 là số hạng thứ 2024

Lời giải

Áp dụng công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng: $u_n = u_1 + (n-1)d$.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 15 \\ u_1 + u_6 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 15 \\ u_1 + (u_1 + 4d) = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 15 \\ 2u_1 + 5d = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 21 \\ d = -3 \end{cases}$$

a) Đúng: $u_1 = 21$

b) Sai: $d = -3$. Suy ra $u_n = u_1 + (n-1)d = 21 + (n-1).(-3) = -3n + 24$

c) Đúng: Vậy $u_{11} = -9$

d) Đúng: Ta có $-6048 = -3n + 24 \Rightarrow n = 2024$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Cho hai số -3 và 23 . Xen kẽ giữa hai số đã cho n số hạng để tất cả các số đó tạo thành cấp số cộng có công sai $d = 2$. Tìm n .

Lời giải

Theo giả thiết thì ta được một cấp số cộng có $n+2$ số hạng với $u_1 = -3, u_{n+2} = 23$.

$$\text{Khi đó } u_{n+2} = u_1 + (n+1)d \Leftrightarrow n+1 = \frac{u_{n+2} - u_1}{d} = \frac{23 - (-3)}{2} = 13 \Leftrightarrow n = 12$$

Câu 2: Biết các số $C_n^1; C_n^2; C_n^3$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với $n > 3$. Tìm n .

Lời giải

Ba số $C_n^1; C_n^2; C_n^3$ theo thứ tự u_1, u_2, u_3 lập thành cấp số cộng nên

$$u_1 + u_3 = 2u_2 \Leftrightarrow C_n^1 + C_n^3 = 2C_n^2 \quad (n \geq 3) \Leftrightarrow n + \frac{(n-2)(n-1)n}{6} = 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{n^2 - 3n + 2}{6} = n - 1 \Leftrightarrow n^2 - 9n + 14 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = 7 \end{cases} \Leftrightarrow n = 7 (n \geq 3).$$

Nhận xét: Nếu u_{k-1}, u_k, u_{k+1} là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng thì ta có $u_{k-1} + u_{k+1} = 2u_k$.

Câu 3: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = 2001$ và $u_5 = 1995$. Khi đó u_{1001} bằng:

Lời giải

$$\begin{cases} 2001 = u_2 = u_1 + d \\ 1995 = u_5 = u_1 + 4d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2003 \\ d = -2 \end{cases} \longrightarrow u_{1001} = u_1 + 1000d = 3$$

Câu 4: Ba góc A, B, C ($A < B < C$) của tam giác tạo thành cấp số cộng, biết góc lớn nhất gấp đôi góc bé nhất. Hiệu số đo độ của góc lớn nhất với góc nhỏ nhất bằng:

Lời giải

Ba góc A, B, C của một tam giác theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng thỏa yêu cầu, thì $C = 2A, C + A = 2B$. Ta có

$$\begin{cases} A + B + C = 180^\circ \\ A + C = 2B \\ C = 2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3B = 180^\circ \\ A + C = 2B \\ C = 2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 60^\circ \\ A + C = 120^\circ \\ C = 2A \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A = 40^\circ \\ B = 60^\circ \\ C = 80^\circ \end{cases} \longrightarrow C - A = 40^\circ.$$

Câu 5: Cho biết bốn số $5; x; 15; y$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tính giá trị của biểu thức $3x + 2y$.

Lời giải

Theo tính chất của cấp số cộng, ta có: $\begin{cases} x = \frac{5+15}{2} \\ \frac{x+y}{2} = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 20 \end{cases}$.

Vậy $3x + 2y = 70$.

Câu 6: Cho cấp số cộng (u_n) , thỏa mãn $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = 36 \\ u_2 u_3 = 54 \end{cases}$. Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n) , biết $d > 4$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = 36 \\ u_2 u_3 = 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + d) + (u_1 + 3d) + (u_1 + 5d) = 36 \\ (u_1 + d)(u_1 + 2d) = 54 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 12 \\ (u_1 + d)(u_1 + 2d) = 54 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Từ (1) suy ra $u_1 = 12 - 3d$.

Thay vào (2), ta được: $(12 - 2d)(12 - d) = 54 \Leftrightarrow d^2 - 18d + 45 = 0 \Leftrightarrow d = 3$ hoặc $d = 15$.

Vì $d > 4$ nên $d = 15$ thỏa mãn.

Câu 7: Cho bốn số thực tạo thành một cấp số cộng có tổng bằng 28 và tổng các bình phương của chúng bằng 276. Tìm tích của bốn số đó.

Lời giải

Gọi bốn số cần tìm theo thứ tự cấp số cộng là: $a - 3r, a - r, a + r, a + 3r$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a - 3r + a - r + a + r + a + 3r = 28 \\ (a - 3r)^2 + (a - r)^2 + (a + r)^2 + (a + 3r)^2 = 276 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 28 \\ 4a^2 + 20r^2 = 276 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ r^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ r = \pm 2 \end{cases}$$

Vậy bốn số cần tìm là 1, 5, 9, 13; tích của chúng bằng 585

Câu 8: Cho hai cấp số cộng có dãy số hạng lần lượt là: 5; 8; 11; ... và 3; 7; 11; ... Hỏi trong 100 số hạng đầu tiên của mỗi cấp số, có bao nhiêu số hạng chung?

Lời giải

Giả sử u_n, v_m theo thứ tự là số hạng thứ n và m của mỗi cấp số cộng, ta có:

$$u_n = 5 + 3(n - 1); v_m = 3 + 4(m - 1).$$

$$\text{Ta có: } u_n = v_m \Leftrightarrow 5 + 3(n - 1) = 3 + 4(m - 1) \Leftrightarrow 2 + 3n = -1 + 4m \Leftrightarrow n = \frac{4m - 3}{3}.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{m}{3}, \text{ vì } n \in \mathbb{N}^+ \text{ nên } \frac{4m - 3}{3} \in \mathbb{N}^+ \text{ nên } 4m - 3 \text{ chia hết cho 3. Ta có: } \begin{cases} m = 3t \leq 100 \\ n = 4t - 1 \leq 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \leq 33 \\ t \leq 25 \end{cases}.$$

Suy ra $t \in \{1; 2; 3; \dots; 25\}$. Với mỗi giá trị của t , ta có một số hạng chung thuộc về hai dãy $(u_n), (v_m)$.

Vậy có tất cả 25 số hạng chung của hai dãy số đã cho trong 100 số hạng đầu tiên.

-----HẾT-----