

BÀI

03

CẤP SỐ NHÂN

A // LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Cấp số nhân

- **Định nghĩa:** Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q . Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.

Cấp số nhân (u_n) với công bội q được cho bởi hệ thức truy hồi $u_n = u_{n-1} \cdot q$ với $n \geq 2$.

- **Nhận xét:** Để chứng minh dãy số (u_n) gồm các số khác 0 là một cấp số nhân, hãy chứng minh tỉ số $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ không đổi.

2 Số hạng tổng quát của cấp số nhân

- **Định lý 1:** Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$, ($n \geq 1$)

3 Tổng n số hạng đầu của cấp số nhân

- **Định lý 2:** Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Khi đó:

$$S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

B // PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tìm công thức của một cấp số nhân

Phương pháp: Sử dụng định nghĩa (u_n) là một cấp số nhân khi và chỉ khi $u_{n+1} = u_n \cdot q, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và q là một số không đổi. Nếu $u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta lập tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n} = k$

- Nếu k là hằng số thì (u_n) là một cấp số nhân với công bội $q = k$.
- Nếu k phụ thuộc vào n thì (u_n) không là cấp số nhân.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Viết năm số hạng đầu của mỗi dãy số (u_n) sau và xem nó có phải là cấp số nhân không. Nếu nó là cấp số nhân, hãy tìm công bội q và viết công thức số hạng tổng quát của nó dưới dạng $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.

a) $u_n = 5n$

b) $u_n = 5^n$

c) $u_1 = 1, u_n = n.u_{n-1}$

d) $u_1 = 1, u_n = 5u_{n-1}$

Lời giải

a) Năm số hạng đầu của dãy: 5;10;15;20;25

Ta có: $10 : 5 = 2 \neq 15 : 10 = \frac{3}{2}$ suy ra (u_n) không phải cấp số nhân

b) Năm số hạng đầu của dãy: 5;25; 125; 625; 3125

Ta có $u_n = 5^n$ nên $u_{n+1} = 5^{n+1} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1}}{5^n} = 5 (\forall n \geq 2)$.

Do đó (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 5$. Số hạng tổng quát: $u_n = 5.5^{n-1}$

c) Năm số hạng đầu của dãy: 1;2;6;24;120

Ta có: $2 : 1 = 2 \neq 6 : 2 = 3$ nên (u_n) không phải là cấp số nhân

d) Năm số hạng đầu của dãy: 1;5;25;125;625

Ta có: $u_n = 5u_{n-1}$ nên $\frac{u_n}{u_{n-1}} = 5 (\forall n \geq 2)$

Do đó (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 5$. Số hạng tổng quát: $u_n = 5^{n-1}$

Bài tập 2: Xét trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân, (nếu có) tìm công bội của cấp số nhân đó:

a) $u_n = (-3)^{2n+1}$

b) $u_n = (-1)^n . 5^{3n+2}$

c) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{9}{u_n} \end{cases}$

Lời giải

a) Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-3)^{2n+3}}{(-3)^{2n+1}} = (-3)^2 = 9$ (không đổi) nên (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 9$.

b) Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-1)^{n+1} . 5^{3(n+1)+2}}{(-1)^n . 5^{3n+2}} = -1.5^3 = -125$ (không đổi) nên (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = -125$.

c) Ta có $u_2 = u_1^2 = 4$, $u_3 = u_2^2 = 16$, $u_4 = u_3^2 = 256$, suy ra $\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{2} = 2$ và $\frac{u_4}{u_3} = \frac{256}{16} = 16$

$\Rightarrow \frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_4}{u_3}$ do đó (u_n) không là cấp số nhân.

d) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{9}{u_n}}{\frac{9}{u_{n-1}}} = \frac{u_{n-1}}{u_n} \Rightarrow u_{n+1} = u_{n-1}, \forall n \geq 2$.

Do đó có: $u_1 = u_3 = u_5 = \dots = u_{2n+1} \dots (1)$ và $u_2 = u_4 = u_6 = \dots = u_{2n} = \dots (2)$

Theo đề bài có $u_1 = 3 \Rightarrow u_2 = \frac{9}{u_1} = 3$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = \dots = u_{2n} = u_{2n+1} \dots$. Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 1$.

Bài tập 3: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9 \end{cases}, \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n + 3, \forall n \geq 1$ là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

Lời giải

Ta có: $v_n = u_n + 3$ (1) $\Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} + 3$ (2).

Theo đề $u_{n+1} = 4u_n + 9 \Rightarrow u_{n+1} + 3 = 4(u_n + 3)$ (3).

Thay (1) và (2) vào (3) được: $v_{n+1} = 4v_n, \forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = 4$ (không đổi).

Kết luận (v_n) là cấp số nhân với công bội $q = 4$ và số hạng đầu $v_1 = u_1 + 3 = 5$.

Bài tập 4: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9, (n \geq 1) \end{cases}$.

a) Chứng minh dãy số (v_n) với $v_n = u_n + 3, n \geq 1$ là một cấp số nhân.

b) Tìm công thức tổng quát của dãy số (u_n) .

Lời giải

a) Ta có $v_n = u_n + 3 \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = (4u_n + 9) + 3$ nên $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(4u_n + 9) + 3}{u_n + 3} = \frac{4(u_n + 3)}{u_n + 3} = 4$.

Vậy (v_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = u_1 + 3 = 2 + 3 = 5$ và công bội $q = 4$.

b) Do (v_n) là cấp số nhân với $\begin{cases} v_1 = 5 \\ q = 4 \end{cases}$ nên số hạng tổng quát của $v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = 5 \cdot 4^{n-1}$.

Suy ra công thức tổng quát của dãy số (u_n) là $u_n = v_n - 3 = 5 \cdot 4^{n-1} - 3$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

A. 1; -1; 1; -1.

B. 1; -3; 9; 10.

C. 1; 0; 0; 0.

D. 32; 16; 8; 4.

Lời giải

Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội q ta có: $u_{n+1} = u_n \cdot q \Rightarrow q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

1; -1; 1; -1 là cấp số nhân với $q = -1$.

$-1; 3; 9; 10$ không là cấp số nhân.

$1; 0; 0; 0$ là cấp số nhân với $q = 0$.

$32; 16; 8; 4$ là cấp số nhân với $q = \frac{1}{2}$.

Câu 2: Dãy số nào sau đây **không phải** là cấp số nhân?

- A. $1; -3; 9; -27; 54$. B. $1; 2; 4; 8; 16$. C. $1; -1; 1; -1; 1$. D. $1; -2; 4; -8; 16$.

Lời giải

Dãy $1; 2; 4; 8; 16$ là cấp số nhân với công bội $q = 2$.

Dãy $1; -1; 1; -1; 1$ là cấp số nhân với công bội $q = -1$.

Dãy $1; -2; 4; -8; 16$ là cấp số nhân với công bội $q = -2$.

Dãy $1; -3; 9; -27; 54$ không phải là cấp số nhân vì $-3 = 1 \cdot (-3); (-27) \cdot (-3) = 81 \neq 54$.

Câu 3: Trong các dãy số sau, dãy số nào **không phải** là một cấp số nhân?

- A. $2; 4; 8; 16; \dots$ B. $1; -1; 1; -1; \dots$
C. $1^2; 2^2; 3^2; 4^2; \dots$ D. $a; a^3; a^5; a^7; \dots$

Lời giải

Xét đáp án C: $1^2; 2^2; 3^2; 4^2; \dots$ $\frac{u_2}{u_1} = 4 \neq \frac{9}{4} = \frac{u_3}{u_2}$

Các đáp án A, B, D đều là các cấp số nhân.

$a; a^3; a^5; a^7; \dots$ $\rightarrow$ là cấp số nhân và $u_n = a^{2n-1} = \frac{1}{a} \cdot (a^2)^n$.

Câu 4: Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

- A. $1; 2; 4; 8; \dots$ B. $3; 3^2; 3^3; 3^4; \dots$
 C. $4; 2; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \dots$ D. $\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi^2}; \frac{1}{\pi^4}; \frac{1}{\pi^6}; \dots$

Lời giải

Các đáp án A, B, C đều là các cấp số nhân công bội lần lượt là $u_m = u_k \cdot q^{m-k}$.

Xét đáp án D: $\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi^2}; \frac{1}{\pi^4}; \frac{1}{\pi^6}; \dots$ $\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{\pi} \neq \frac{1}{\pi^2} = \frac{u_3}{u_2}$

Câu 5: Dãy số $u_n = 3 + 3^n$ là một cấp số nhân với:

- A. Công bội là 3 và số hạng đầu tiên là 1.
B. Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 1.
 C. Công bội là 4 và số hạng đầu tiên là 2.
 D. Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 2.

Lời giải

$$\text{Cấp số nhân: } 1; 2; 4; 8; 16; 32; \dots \longrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ q = \frac{u_2}{u_1} = 2 \end{cases}$$

- Câu 6:** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -2$ và $q = -5$. Viết bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân.
A. $-2; 10; 50; -250$. **B.** $-2; 10; -50; 250$. **C.** $-2; -10; -50; -250$. **D.** $-2; 10; 50; 250$.

Lời giải.

$$\begin{cases} u_1 = -2 \\ q = -5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = -2 \\ u_2 = u_1 q = 10 \\ u_3 = u_2 q = -50 \\ u_4 = u_3 q = 250 \end{cases}$$

- Câu 7:** Tìm tất cả giá trị của x để ba số $2x-1; x; 2x+1$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.
A. $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $x = \pm \frac{1}{3}$. **C.** $x = \pm \sqrt{3}$. **D.** $x = \pm 3$.

Lời giải

$$\text{Cấp số nhân } 2x-1; x; 2x+1 \longrightarrow (2x-1)(2x+1) = x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

- Câu 8:** Trong các dãy số cho dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?
A. $1; 2; 3; 4; 5$. **B.** $1; 3; 6; 9; 12$. **C.** $2; 4; 6; 8; 10$. **D.** $2; 2; 2; 2; 2$.

Lời giải

Ta thấy ở đáp án D có $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = 2$ nên đây là cấp số nhân với công bội $q = 1$.

- Câu 9:** Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số nhân?
A. $1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots$ **B.** $2; 4; 6; 8; 16; 32; \dots$ **C.** $-2; -3; -4; -5; -6; -7; \dots$ **D.** $1; 2; 4; 8; 16; 32; \dots$

Lời giải

Nhận thấy $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2}$ nên các dãy số ở đáp án A, B và C không phải là cấp số nhân.

Riêng đối với dãy $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$ ở đáp án D thỏa mãn: $u_{n+1} = 2u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Vậy dãy số $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$ là cấp số nhân với $u_1 = 1$ và công bội $q = 2$.

- Câu 10:** Chọn cấp số nhân trong các dãy số sau:
A. $1; 0, 2; 0, 04; 0, 0008; \dots$ **B.** $2; 22; 222; 2222; \dots$ **C.** $x; 2x; 3x; 4x; \dots$ **D.** $1; -x^2; x^4; -x^6; \dots$

Lời giải

Dãy số $1; -x^2; x^4; -x^6; \dots$ là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$; công bội $q = -x^2$.

- Câu 11:** Trong các số sau, dãy số nào là một cấp số nhân:
A. $1, -3, 9, -27, 81$. **B.** $1, -3, -6, -9, -12$. **C.** $1, -2, -4, -8, -16$. **D.** $0, 3, 9, 27, 81$.

Lời giải

Câu 12: Xác định x để 3 số $x-2$; $x+1$; $3-x$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân:

- A. Không có giá trị nào của x . **B.** $x = \pm 1$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = -3$.

Lời giải

$$\text{Ba số } x-2; x+1; 3-x \text{ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân} \Leftrightarrow (x-2)(3-x) = (x+1)^2 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 7 = 0$$

Câu 13: Xác định x để 3 số $2x-1$; x ; $2x+1$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân:

- A.** $x = \pm \frac{1}{3}$. **B.** $x = \pm \sqrt{3}$. **C.** $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** Không có giá trị nào của x .

Lời giải

$$\text{Ba số: } 2x-1; x; 2x+1 \text{ theo thứ tự lập thành cấp số nhân} \Leftrightarrow (2x-1)(2x+1) = x^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 1 = x^2 \\ \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Câu 14: Trong các dãy số (u_n) sau, dãy nào là cấp số nhân?

- A.** $u_n = n^2 + n + 1$. **B.** $u_n = (n+2).3^n$. **C.** $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{6}{u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. **D.** $u_n = (-4)^{2n+1}$.

Lời giải

A. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2 + 3n + 3}{n^2 + n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, không phải là hằng số. Vậy (u_n) không phải là cấp số nhân.

B. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+3).3^{n+1}}{(n+2).3^n} = \frac{3(n+3)}{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, không phải là hằng số. Vậy (u_n) không phải là cấp số nhân.

C. Từ công thức truy hồi của dãy số, suy ra $u_1 = 2; u_2 = 3; u_3 = 2; u_4 = 3; \dots$

Vì $\frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_2}{u_1}$ nên (u_n) không phải là cấp số nhân.

D. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-4)^{2(n+1)+1}}{(-4)^{2n+1}} = 16, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) là một cấp số nhân.

Câu 15: Dãy số nào sau đây là cấp số nhân?

A. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 1, n \geq 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = -3u_n, n \geq 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3, n \geq 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} u_1 = \frac{\pi}{2} \\ u_n = \sin\left(\frac{\pi}{n-1}\right), n \geq 1 \end{cases}$

Lời giải

(u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_{n+1} = qu_n$

Câu 16: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3}{2} \cdot 5^n$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. (u_n) không phải là cấp số nhân.
 B. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 5$ và số hạng đầu $u_1 = \frac{3}{2}$.
 C. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 5$ và số hạng đầu $u_1 = \frac{15}{2}$.
 D. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = \frac{5}{2}$ và số hạng đầu $u_1 = 3$.

Lời giải

$$u_n = \frac{3}{2} \cdot 5^n \text{ là cấp số nhân công bội } q = 5 \text{ và } u_1 = \frac{15}{2}$$

Câu 17: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

- A. $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$. B. $u_n = \frac{1}{3^n} - 1$. C. $u_n = n + \frac{1}{3}$. D. $u_n = n^2 - \frac{1}{3}$.

Lời giải

$$\text{Dãy } u_n = \frac{1}{3^{n-2}} = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ là cấp số nhân có } \begin{cases} u_1 = 3 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Câu 18: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

- A. $u_n = 7 - 3n$. B. $u_n = 7 - 3^n$. C. $u_n = \frac{7}{3n}$. D. $u_n = 7 \cdot 3^n$.

Lời giải.

$$\text{Dãy } u_n = 7 \cdot 3^n \text{ là cấp số nhân có } \begin{cases} u_1 = 21 \\ q = 3 \end{cases}$$

Câu 19: Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_n \neq 0, n \in \mathbb{N}^+$. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

- A. $u_1; u_3; u_5; \dots$ B. $3u_1; 3u_2; 3u_3; \dots$ C. $\frac{1}{u_1}; \frac{1}{u_2}; \frac{1}{u_3}; \dots$ D. $u_1 + 2; u_2 + 2; u_3 + 2; \dots$

Lời giải

Giả sử (u_n) là cấp số nhân công bội q , thì

Dãy $u_1; u_3; u_5; \dots$ là cấp số nhân công bội q^2 .

Dãy $3u_1; 3u_2; 3u_3; \dots$ là cấp số nhân công bội $2q$.

Dãy $\frac{1}{u_1}; \frac{1}{u_2}; \frac{1}{u_3}; \dots$ là cấp số nhân công bội $\frac{1}{q}$.

Dãy $u_1 + 2; u_2 + 2; u_3 + 2; \dots$ không phải là cấp số nhân.

Câu 20: Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là cấp số nhân?

- A. $u_n = 3n$. B. $u_n = 2^n$. C. $u_n = \frac{1}{n}$. D. $u_n = 2^n + 1$.

Lời giải

Ta thấy, với $\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ dãy số $(u_n) = 2^n$ có tính chất: $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{2^n}{2^{n-1}} = 2$ nên là cấp số nhân với công bội $q = 2, u_1 = 2$.

Câu 21: u_n được cho bởi công thức nào dưới đây là số hạng tổng quát của một cấp số nhân?

- A. $u_n = \frac{1}{2^{n+1}}$. B. $u_n = n^2 - \frac{1}{2}$. C. $u_n = \frac{1}{2^n} - 1$. D. $u_n = n^2 + \frac{1}{2}$.

Lời giải

$u_n = \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ là số hạng tổng quát của một cấp số nhân có $u_1 = \frac{1}{4}$ và $q = \frac{1}{2}$.

$u_n = n^2 - \frac{1}{2}$ có $u_1 = \frac{1}{2}; u_2 = \frac{7}{2} = \frac{1}{2} \cdot 7; u_3 = \frac{17}{2} \neq \frac{7}{2} \cdot 7$ nên không phải số hạng tổng quát của một cấp số nhân.

$u_n = \frac{1}{2^n} - 1$ có $u_1 = -\frac{1}{2}; u_2 = -\frac{3}{4} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}; u_3 = -\frac{7}{8} \neq -\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2}$ nên không phải số hạng tổng quát của một cấp số nhân.

$u_n = n^2 + \frac{1}{2}$ có $u_1 = \frac{3}{2}; u_2 = \frac{9}{2} = \frac{3}{2} \cdot 3; u_3 = \frac{19}{2} \neq \frac{9}{2} \cdot 3$ nên không phải số hạng tổng quát của một cấp số nhân.

Câu 22: Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số nhân?

- A. $u_n = (-1)^n n$. B. $u_n = n^2$. C. $u_n = 2^n$. D. $u_n = \frac{n}{3^n}$.

Lời giải

Lập tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

A: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)}{(-1)^n \cdot n} = -\frac{n+1}{n} \Rightarrow (u_n)$ không phải cấp số nhân.

B: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \Rightarrow (u_n)$ không phải là cấp số nhân.

C: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \Rightarrow u_{n+1} = 2u_n \Rightarrow (u_n)$ là cấp số nhân có công bội bằng 2.

D: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{3n} \Rightarrow (u_n)$ không phải là cấp số nhân.

Câu 23: Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 3.2^{n+1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Chọn kết luận đúng:

- A.** Dãy số là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 12$.
- B.** Dãy số là cấp số cộng có công sai $d = 2$.
- C.** Dãy số là cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 6$.
- D.** Dãy số là cấp số nhân có công bội $q = 3$.

Lời giải

Dãy số (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 3.2^{n+1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), $u_{n+1} = 3.2^{n+2}$.

Xét thương $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3.2^{n+2}}{3.2^{n+1}} = 2 = \text{const}$ với $\forall n \in \mathbb{N}$ nên dãy số (u_n) là một cấp số nhân có công bội $q = 2$ và có số hạng đầu là $u_1 = 3.2^{1+1} = 12$.

Câu 24: Dãy nào sau đây là một cấp số nhân?

- A.** 1, 2, 3, 4, ...
- B.** 1, 3, 5, 7, ...
- C.** 2, 4, 8, 16, ...
- D.** 2, 4, 6, 8, ...

Lời giải

Ta có: 2, 4, 8, 16, ... là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = 2$.

Câu 25: Cho dãy số: $-1; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; \frac{1}{27}; -\frac{1}{81}$. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A.** Dãy số không phải là một cấp số nhân.
- B.** Dãy số này là cấp số nhân có $u_1 = -1; q = -\frac{1}{3}$.
- C.** Số hạng tổng quát. $u_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{3^{n-1}}$
- D.** Là dãy số không tăng, không giảm.

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{3} = -1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right); -\frac{1}{9} = -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right); \frac{1}{27} = -\frac{1}{9} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right); \dots$. Vậy dãy số trên là cấp số nhân với $u_1 = -1; q = -\frac{1}{3}$.

Áp dụng công thức số hạng tổng quát cấp số nhân ta có $u_n = u_1 q^{n-1} = -1 \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = (-1)^n \cdot \frac{1}{3^{n-1}}$.

Câu 26: Tập hợp các giá trị x thỏa mãn $x, 2x, x+3$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân là

- A.** $\{0; 1\}$.
- B.** $\emptyset$.
- C.** $\{1\}$.
- D.** $\{0\}$

Lời giải

Gọi q là công bội của cấp số nhân.

Ta có

$$\begin{cases} 2x = x.q \\ x+3 = 2x.q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x.q \\ x+3 = 2.2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Tập hợp các giá trị x thỏa mãn $x, 2x, x+3$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân là $\{1\}$.

Câu 27: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của x để ba số $1; x; x+2$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân?

- A. 2. **B.** 1. C. 3. D. 0.

Lời giải

Để $1; x; x+2$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân thì: $x^2 = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Vậy có đúng 1 số nguyên dương $x = 2$.

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị của x để ba số $2x-1, x, 2x+1$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

- A. $x = \pm \frac{1}{3}$ **B.** $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ C. $x = \pm \sqrt{3}$ D. $x = \pm 3$

Lời giải

Để ba số đó lập thành một cấp số nhân thì:

$$x^2 = (2x-1)(2x+1) \Leftrightarrow x^2 = 4x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Câu 29: Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là sai?

- A. Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số nhân.
B. Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số cộng.
C. Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số tăng.
D. Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số dương.

Lời giải

- A. Đúng vì dãy số đã cho là cấp số nhân với công bội $q = 1$.
B. Đúng vì dãy số đã cho là cấp số cộng với công sai $d = 0$.
C. Đúng vì dãy số đã cho là cấp số cộng có công sai dương nên: $u_{n+1} - u_n = d > 0 \Rightarrow u_{n+1} > u_n$.
D. Sai. Ví dụ dãy $-5; -2; 1; 3; \dots$ là dãy số có $d = 3 > 0$ nhưng không phải là dãy số dương.

Câu 30: Xác định x dương để $2x-3; x; 2x+3$ lập thành cấp số nhân.

- A. $x = 3$. **B.** $x = \sqrt{3}$. C. $x = \pm \sqrt{3}$. D. không có giá trị nào của x .

Lời giải

$$2x-3; x; 2x+3 \text{ lập thành cấp số nhân } \Leftrightarrow x^2 = (2x-3)(2x+3) \Leftrightarrow x^2 = 4x^2 - 9 \Leftrightarrow x^2 = 3 \\ \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{3}. \text{ Vì } x \text{ dương nên } x = \sqrt{3}.$$

Câu 31: Giả sử $\frac{\sin \alpha}{6}, \cos \alpha, \tan \alpha$ theo thứ tự đó là một cấp số nhân. Tính $\cos 2\alpha$.

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \cos \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Theo tính chất của cấp số nhân, ta có: } \cos^2 \alpha = \frac{\sin \alpha}{6} \cdot \tan \alpha \Leftrightarrow 6 \cos^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}.$$

$$\Leftrightarrow 6\cos^3 \alpha - \sin^2 \alpha = 0 \Leftrightarrow 6\cos^3 \alpha + \cos^2 \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta có: } \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Câu 32: Cho dãy số có các số hạng đầu là $\frac{1}{3}; \frac{1}{3^2}; \frac{1}{3^3}; \frac{1}{3^4}; \dots$ Số hạng tổng quát của dãy số này là

- A. $\frac{1}{3^{n-1}}$ B. $\frac{1}{3^{n+2}}$ C. $\frac{1}{3^n}$ D. $\frac{1}{3^{n+1}}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } u_1 = \frac{1}{3} = \frac{1}{3^1}; u_2 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3^2}; u_3 = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{3^3} \dots$$

$$\text{Vậy } u_n = \frac{1}{3^n}.$$

Câu 33: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Số hạng tổng quát u_n ($n \geq 2$) bằng

- A. $3 \cdot 2^n$ B. $3 \cdot 2^{n+2}$ C. $3 \cdot 2^{n+1}$ D. $3 \cdot 2^{n-1}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

Câu 34: Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

- A. $u_n = 3^n$ B. $u_n = n^{n+1}$ C. $u_n = 3^{n+1}$ D. $u_n = 3^{n-1}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } u_1 = 3 \text{ và } \frac{u_{n+1}}{u_n} = 3$$

$$\text{Suy ra dãy số } (u_n) \text{ là cấp số nhân với } \begin{cases} u_1 = 3 \\ q = 3 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$

Câu 35: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} 3u_1 = \sqrt{3u_1 - u_2} + u_2 + 6 \\ u_{n+1} = 2u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $u_n \geq 2^{2021}$.

- A. 2021. B. 1012. C. 2022. D. 1011.

Lời giải

$$\text{Ta có: } u_{n+1} = 2u_n \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2, \forall n \in \mathbb{N} \text{ nên dãy } (u_n) \text{ là cấp số nhân với công bội } q = 2.$$

$$\Rightarrow u_2 = 2u_1.$$

$$\text{Mà } 3u_1 = \sqrt{3u_1 - u_2} + u_2 + 6 \Leftrightarrow 3u_1 - u_2 - \sqrt{3u_1 - u_2} - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3u_1 - u_2} \right)^2 - \sqrt{3u_1 - u_2} - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3u_1 - u_2} = 2(N) \\ \sqrt{3u_1 - u_2} = -3(L) \end{cases} \Leftrightarrow 3u_1 - u_2 = 4.$$

Từ và ta có: $\begin{cases} u_2 = 2u_1 \\ 3u_1 - u_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow u_1 = 4$

$\Rightarrow (u_n)$ là cấp số nhân với công bội $q = 2, u_1 = 4$. Nên số hạng tổng quát là:

$$u_n = 2 \cdot 4^{n-1} = 2 \cdot 2^{2(n-1)} = 2^{2n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

$$u_n \geq 2^{2021} \Leftrightarrow 2^{2n-1} \geq 2^{2021} \Leftrightarrow 2n-1 \geq 2021 \Leftrightarrow n \geq 1011.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất thỏa mãn là 1011.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho các dãy số sau đây: $u_n = (\sqrt{5})^{2n-3}$; $v_n = \frac{2}{n}$; $w_n = \frac{3^{n+1}}{2^n}$ và dãy số hữu hạn gồm các số hạng:

$16; 4; 1; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}; \frac{1}{64}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) (u_n) là một cấp số nhân công bội $q = 5$.

b) (v_n) không phải là một cấp số nhân

c) (w_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu $w = \frac{9}{2}$

d) Dãy số hữu hạn đã cho theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng $\frac{1}{8}$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $u_{n+1} = (\sqrt{5})^{2(n+1)-3} = (\sqrt{5})^{2n-1} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\sqrt{5})^{2n-1}}{(\sqrt{5})^{2n-3}} = (\sqrt{5})^2 = 5, \forall n \in \mathbb{N}^+.$

Do đó (u_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ với công bội $q = 5$.

b) Đúng: Ta có: $v_{n+1} = \frac{2}{n+1} \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n}{n+1}$ (tỉ số này còn phụ thuộc vào n).

Do đó (v_n) không phải là một cấp số nhân.

c) Đúng: Ta có: $w_{n+1} = \frac{3^{n+2}}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3^{n+1}}{2^n} \Rightarrow \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{3^{n+1}}{2^n}}{\frac{3^{n+1}}{2^n}} = \frac{3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^+.$

Do đó (w_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu $w_1 = \frac{3^2}{2^1} = \frac{9}{2}$ với công bội $q = \frac{3}{2}$

d) Sai: Đặt $u_1 = 16; u_2 = 4; u_3 = 1; u_4 = \frac{1}{4}; u_5 = \frac{1}{16}; u_6 = \frac{1}{64}$.

Ta có: $u_2 = u_1 \cdot \frac{1}{4}; u_3 = u_2 \cdot \frac{1}{4}; u_4 = u_3 \cdot \frac{1}{4}; u_5 = u_4 \cdot \frac{1}{4}; u_6 = u_5 \cdot \frac{1}{4}$.

Vì vậy dãy số hữu hạn đã cho theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng $\frac{1}{4}$.

Câu 2: Xác định tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Dãy số (u_n) với $u_n = (-7)^n \cdot 5^{3n-1}$ là cấp số nhân với công bội $q = -875$.

b) Dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = -5u_n \end{cases}$ là cấp số nhân với công bội $q = -4$.

c) Dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$ không là cấp số nhân.

d) Dãy số (u_n) với $-\frac{1}{8}; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; 1$ không là cấp số nhân.

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-7)^{n+1} \cdot 5^{3(n+1)-1}}{(-7)^n \cdot 5^{3n-1}} = \frac{(-7) \cdot 5^2}{5^{-1}} = -7 \cdot 5^3 = -875$ không đổi.

Vậy (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = -875$.

b) Sai: Ta có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = -5u_n \end{cases}$. Khi đó $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{-5u_n}{u_n} = -5$

Vậy (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = -5$.

c) Đúng: Ta có: $u_2 = u_1^2 = 2^2 = 4; u_3 = u_2^2 = 4^2 = 16; u_4 = u_3^2 = 16^2 = 256$

Khi đó: $\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{2} = 2; \frac{u_4}{u_3} = \frac{256}{16} = 16$

Nhận thấy: $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_4}{u_3} (2 \neq 16)$

Vậy (u_n) không là cấp số nhân.

d) Đúng: Ta có: $\frac{u_2}{u_1} = \left(-\frac{1}{4}\right); \frac{u_4}{u_3} = \left(-\frac{1}{8}\right) = 2; \frac{u_4}{u_3} = 1; \frac{u_6}{u_5} = \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

Nhận thấy: $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_4}{u_3} (2 \neq -2)$

Vậy (u_n) không là cấp số nhân.

Câu 3: Cho tứ giác $ABCD$ có bốn góc tạo thành một cấp số nhân có công bội bằng 2. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- Số đo góc nhỏ nhất bằng 24°
- Số đo góc lớn nhất bằng 196°
- Tổng số đo góc lớn nhất với góc nhỏ nhất bằng 220°
- Số đo góc lớn nhất trừ cho số đo góc nhỏ nhất bằng 168°

Lời giải

Đặt $u_1; u_2; u_3; u_4$ theo thứ tự là số đo bốn góc của tứ giác $ABCD$, gọi q là công bội của cấp số nhân $u_1; u_2; u_3; u_4 \Rightarrow q = 2$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 360^\circ \\ q = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot \frac{1-q^4}{1-q} = 360^\circ \\ q = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot \frac{1-2^4}{1-2} = 360^\circ \\ q = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 24^\circ \\ q = 2 \end{cases}$$

Vậy số đo bốn góc của tứ giác $ABCD$ là: $24^\circ; 48^\circ; 96^\circ; 192^\circ$.

- Đúng: Số đo góc nhỏ nhất bằng 24°
- Sai: Số đo góc lớn nhất bằng 192°
- Sai: Tổng số đo góc lớn nhất với góc nhỏ nhất bằng 216°
- Đúng: Số đo góc lớn nhất trừ cho số đo góc nhỏ nhất bằng 168°

Câu 4: Cho các dãy số $a_n = n^2 + n + 1; b_n = (n+2) \cdot 3^n; \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_{n+1} = \frac{6}{c_n}, \forall n \in \mathbb{N}^+ \end{cases}; d_n = (-4)^{2n+1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

sai của các khẳng định sau:

- (a_n) không phải là cấp số nhân
- (b_n) không phải là cấp số nhân
- (c_n) là một cấp số nhân
- (d_n) là một cấp số nhân

Lời giải

a) Đúng: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2 + 3n + 3}{n^2 + n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^+$, không phải là hằng số nên (a_n) không phải là cấp số nhân.

b) Đúng: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+3) \cdot 3^{n+1}}{(n+2) \cdot 3^n} = \frac{3(n+3)}{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}^+$, không phải là hằng số nên (b_n) không phải là cấp số nhân.

c) Sai: Từ công thức truy hồi của dãy số, suy ra $c_1 = 2; c_2 = 3; c_3 = 2; c_4 = 3; \dots$

d) Đúng: $\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{(-4)^{2(n+1)+1}}{(-4)^{2n+1}} = 16, \forall n \in \mathbb{N}$. Vậy (d_n) là một cấp số nhân công bội $q = 16$.

d) Sai: Vậy sau 10 ngày Aladin đã ước: $3(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9) = 3\left(\frac{1 - 2^{10}}{1 - 2}\right) = 3069$ điều.

$$\begin{cases} u_k = 16 \\ u_{k+1} = 36 \end{cases} \Rightarrow q = \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{9}{4} \longrightarrow u_{k+2} = u_{k+1}q = 81$$

15 | Ths. Lê Việt – THPT Thăng Long, Hà Nội – Phone (zalo): 0835.221183 - Ôn thi cam kết điểm số

$$\begin{cases} \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} \\ \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8}{2} = \frac{x}{8} \\ \frac{128}{x} = \frac{x}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 \\ x^2 = 1024 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 \\ x = 32 \\ x = -32 \end{cases} \Leftrightarrow x = 32$$

Câu 3: Tìm x để ba số $1+x$; $9+x$; $33+x$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

Lời giải

$$\text{Cấp số nhân } 1+x; 9+x; 33+x \longrightarrow (1+x)(33+x) = (9+x)^2 \Leftrightarrow x = 3.$$

Câu 4: Ba số hạng đầu của một cấp số nhân là $x-6$; x và y . Tìm y , biết rằng công bội của cấp số nhân là 6.

Lời giải

Cấp số nhân $x-6$; x và y có công bội $q=6$ nên ta có

$$\begin{cases} u_1 = x-6, q=6 \\ x = u_2 = u_1 q = 6(x-6) \\ y = u_3 = u_2 q^2 = 36x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{36}{5} \\ y = 36 \cdot \frac{36}{5} = \frac{1296}{5} \approx 259 \end{cases}$$

Câu 5: Một cấp số nhân có 6 số hạng, số hạng đầu bằng 2 và số hạng thứ sáu bằng 486. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho.

Lời giải

$$\text{Theo giả thiết ta có: } \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_6 = 486 \end{cases} \longrightarrow 486 = u_6 = u_1 q^5 = 2q^5 \Leftrightarrow q^5 = 243 \Leftrightarrow q = 3.$$

Câu 6: Một công ty xây dựng mua một chiếc máy ủi với giá 3 tỉ đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá trị của chiếc máy ủi này lại giảm 20% so với giá trị của nó trong năm liền trước đó. Tìm giá trị còn lại của chiếc máy ủi đó sau 5 năm sử dụng.

Lời giải

Giá trị của chiếc máy ủi mỗi năm lập thành một cấp số nhân với số hạng đầu bằng 3 và công bội $q = 0,8$

Giá trị của chiếc máy ủi sau 5 năm sử dụng là: $u_5 = 3 \times 0,8^{5-1} = 0,1875$ (tỷ đồng)

Câu 7: Tỷ lệ tăng dân số của tỉnh X là 1,4%. Biết rằng dân số tỉnh X hiện nay là 1,8 triệu người. Hỏi với mức tăng như vậy thì sau 10 năm nữa dân số tỉnh X là bao nhiêu?

Lời giải

Theo giả thiết, ta thấy tỷ lệ tăng dân số hàng năm của tỉnh X là một cấp số nhân (u_n) với số hạng đầu $u_1 = 1,8 \cdot 10^6$ và công bội $q = 1 + \frac{1,4}{100} = 1,014$.

Do đó, dân số của tỉnh X sau 10 năm là: $u_{11} = u_1 \cdot q^{10} = 1,8 \cdot 10^6 (1,014)^{10} \approx 2068483$ người.

-----HẾT-----