

Dạng 3: Tính tổng các số hạng trong một cấp số nhân

Phương pháp: Để tính tổng của n số hạng trong một cấp số nhân, ta sử dụng công thức:

$$S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, q \neq 1.$$

- Nếu $q = 1$ thì $u_1 = u_2 = u_3 = \dots = u_n$ do đó $S_n = nu_1$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính các tổng sau:

a) $S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$

b) $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$

c) $S_n = \left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(9 + \frac{1}{9}\right)^2 + \dots + \left(3^n + \frac{1}{3^n}\right)^2$

d) $S_n = 6 + 66 + 666 + \dots + \underbrace{\dots}_{n \text{ số } 6}$

Lời giải

a) Ta có dãy số $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$ là một cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = \frac{2^2}{2} = 2$. Do đó $S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 2 \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2(2^n - 1)$.

b) Ta có dãy số $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}$ là một cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{2}$ và công bội $q = \frac{\frac{1}{2^2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$. Do đó $S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$.

c) $S_n = \left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(9 + \frac{1}{9}\right)^2 + \dots + \left(3^n + \frac{1}{3^n}\right)^2 = 3^2 + 2 + \frac{1}{3^2} + 3^4 + 2 + \frac{1}{3^4} + \dots + 3^{2n} + 2 + \frac{1}{3^{2n}}$
 $= (3^2 + 3^4 + \dots + 3^{2n}) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2n}}\right) + \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_n$

Có dãy số $3^2, 3^4, \dots, 3^{2n}$ là cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1 = 3^2$ và công bội $q = \frac{3^4}{3^2} = 9$. Do đó $S_1 = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 9 \cdot \frac{1 - 9^n}{1 - 9} = \frac{9}{8}(9^n - 1)$.

Có dãy số $\frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^4}, \dots, \frac{1}{3^{2n}}$ là cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{3^2}$ và công bội $q = \frac{1}{9}$. Do đó $S_1 = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1 - \frac{1}{9^n}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{9^n}\right) = \frac{9^n - 1}{8 \cdot 9^n}$.

Vậy $S_n = \frac{9}{8}(9^n - 1) + \frac{9^n - 1}{8 \cdot 9^n} + 2n = \frac{(9^n - 1)(9^{n+1} + 1)}{8 \cdot 9^n} + 2n$.

$$\begin{aligned} \text{d) } S_n &= 6 + 66 + 666 + \dots + \underbrace{\overbrace{666\dots6}^n}_{n \text{ số } 6} \\ &= \frac{2}{3} \left[(10-1) + (100-1) + (1000-1) + \dots + (10^n-1) \right] \\ &= \frac{2}{3} \left[10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n - n \right] = \frac{2}{3} \left[10 \cdot \frac{10^n-1}{10-1} - n \right] = \frac{20}{27} (10^n-1) - \frac{2n}{3}. \end{aligned}$$

Bài tập 2: Cho một cấp số nhân (u_n) có các số hạng đều không âm và thỏa mãn $u_2 = 6$ và $u_4 = 24$. Tính tổng của 12 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.

Lời giải

Gọi công bội của cấp số nhân là q . Ta có: $u_4 = u_2 \cdot q^2$ hay $24 = 6 \cdot q^2$ suy ra $q = -2$ hoặc $q = 2$

Do cấp số nhân có các số hạng không âm nên $q = 2$.

$$\text{Khi đó cấp số nhân } (u_n) \text{ có } u_1 = \frac{u_2}{q} = \frac{6}{2} = 3 \text{ suy ra } S_{12} = \frac{u_1(1-q^{12})}{1-q} = \frac{3(1-2^{12})}{1-2} = 12285.$$

Bài tập 3: Một du khách vào trường đua ngựa đặt cược, lần đầu đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cược trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khách trên thắng hay thua bao nhiêu?

Lời giải

Số tiền du khách đặt trong mỗi lần là một cấp số nhân có $u_1 = 20\,000$ và công bội $q = 2$.

Du khách thua trong 9 lần đầu tiên nên tổng số tiền thua là:

$$S_9 = u_1 + u_2 + \dots + u_9 = \frac{u_1(1-p^9)}{1-p} = 10220000$$

Số tiền mà du khách thắng trong lần thứ 10 là $u_{10} = u_1 \cdot p^9 = 10240000$

Ta có $u_{10} - S_9 = 20\,000 > 0$ nên du khách thắng 20 000.

Bài tập 4: Anh Dũng kí hợp đồng lao động trong 10 năm với phương án trả lương như sau: Năm thứ nhất, tiền lương của anh Dũng là 120 triệu đồng. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương của anh Dũng được tăng lên 10%. Tính tổng số tiền lương anh Dũng lĩnh được trong 10 năm đầu đi làm (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị triệu đồng).

Lời giải

Ta có tiền lương năm thứ nhất của anh Dũng là: 120 triệu đồng.

Tiền lương năm thứ hai của anh Dũng là:

$$120 + 120 \cdot 10\% = 120(1 + 0,1) = 120 \cdot 1,1 \text{ (triệu đồng).}$$

Tiền lương năm thứ ba của anh Dũng là:

$$120 \cdot 1,1 + 120 \cdot 1,1 \cdot 10\% = 120 \cdot 1,1(1 + 0,1) = 120 \cdot 1,1^2 \text{ (triệu đồng).}$$

Cứ tiếp tục như vậy, ta được tiền lương năm thứ 10 của anh Dũng là 120. 1,19 (triệu đồng).

Do vậy, tiền lương mỗi năm của anh Dũng nhận được trong 10 năm lập thành một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 120$ và công bội $q = 1,1$.

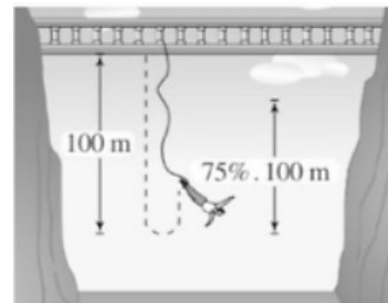
Tư vấn hướng nghiệp cho học sinh bằng phân tích nhân tướng học – xem chỉ tay – tử vi

Khi đó tổng số tiền lương anh Dũng lĩnh được trong 10 năm đầu đi làm là:

$$S_{10} = \frac{u_1(1-q^{10})}{1-q} = \frac{120 \cdot [1-(1,1)^{10}]}{1-1,1} \approx 1912 \text{ (triệu đồng)}$$

Vậy tổng số tiền lương anh Dũng lĩnh được trong 10 năm đầu đi làm là 1912 triệu đồng.

Bài tập 5: Một người nhảy Bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây đai an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài 100 m. Giả sử sau mỗi lần rơi xuống, người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ cao bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên (Hình 3). Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần rơi xuống và lại được kéo lên, tính từ lúc bắt đầu nhảy (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Lời giải

Gọi u_1 (m) là quãng đường người chơi rơi xuống ở lần thứ nhất, ta có: $u_1 = 100$

v_1 (m) là quãng đường người chơi được kéo lên ở lần thứ nhất, ta có: $v_1 = 100 \cdot 0,75 = 75$

u_2 (m) là quãng đường người chơi rơi xuống ở lần thứ hai, ta có: $u_2 = v_1 = 0,75u_1$

v_2 (m) là quãng đường người chơi được kéo lên ở lần thứ hai, ta có: $v_2 = 0,75u_2 = 0,75v_1$.

Như vậy, ta có hai cấp số nhân đều có công bội 0,75 là:

$$u_1, u_2, \dots, u_{10} \text{ và } v_1, v_2, \dots, v_{10} \text{ với } u_1 = 100 \text{ và } v_1 = 75.$$

$$\text{Ta có: } u_1 + u_2 + \dots + u_{10} = 100 \cdot \left(\frac{1-0,75^{10}}{1-0,75} \right); v_1 + v_2 + \dots + v_{10} = 75 \cdot \left(\frac{1-0,75^{10}}{1-0,75} \right).$$

Vậy quãng đường người đó đi được sau 10 lần rơi xuống và lại được kéo lên tính từ lúc bắt đầu

$$\text{nhảy là: } (u_1 + u_2 + \dots + u_{10}) + (v_1 + v_2 + \dots + v_{10}) = 175 \cdot \left(\frac{1-0,75^{10}}{1-0,75} \right) \approx 661 \text{ (m).}$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và $q = -2$. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

A. $S_{10} = -511$.

B. $S_{10} = 1023$.

C. $S_{10} = 1025$.

D. $S_{10} = -1025$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } S_{10} = u_1 \cdot \frac{1-q^{10}}{1-q} = -3 \cdot \frac{1-(-2)^{10}}{1-(-2)} = 1023.$$

Câu 2: Cho một cấp số nhân có các số hạng đều không âm thỏa mãn $u_2 = 6$, $u_4 = 24$. Tính tổng của 12 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.

- A.** $3 \cdot 2^{12} - 3$. **B.** $2^{12} - 1$. **C.** $3 \cdot 2^{12} - 1$. **D.** $3 \cdot 2^{12}$.

Lời giải

Gọi công bội của CSN bằng q . Suy ra $u_4 = u_2 \cdot q^2 \Rightarrow q = \pm 2$. Do CSN có các số hạng không âm nên $q = 2$.

$$\text{Ta có } S_{12} = u_1 \cdot \frac{1 - q^{12}}{1 - q} = 3 \cdot \frac{1 - 2^{12}}{1 - 2} = 3(2^{12} - 1).$$

Câu 3: Cho dãy (u_n) với $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$. Tính $S_{2019} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{2019}$, ta được kết quả

- A.** $2020 - \frac{1}{2^{2019}}$. **B.** $\frac{4039}{2}$. **C.** $2019 + \frac{1}{2^{2019}}$. **D.** $\frac{6057}{2}$.

Lời giải

$$S_{2019} = 2019 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2019} = 2019 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2019}}{1 - \frac{1}{2}} = 2020 - \frac{1}{2^{2019}}.$$

Câu 4: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_3 = 12$, $u_5 = 48$, có công bội âm. Tổng 7 số hạng đầu của cấp số nhân đã cho bằng

- A.** 129. **B.** -129. **C.** 128. **D.** -128.

Lời giải

Ta có: $u_4^2 = u_3 \cdot u_5 = 576$. Vì $u_3 > 0, u_5 > 0$ và công bội âm nên: $u_4 = -24 \Rightarrow q = -2$.

$$\text{Lại có: } u_3 = u_1 q^2 \Rightarrow u_1 = \frac{u_3}{q^2} = \frac{12}{4} = 3.$$

$$\text{Áp dụng công thức ta có: } S_7 = u_1 \frac{1 - q^7}{1 - q} = 3 \cdot \frac{1 - (-2)^7}{1 - (-2)} = 129.$$

Câu 5: Cho (u_n) là cấp số nhân, đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Biết $S_2 = 4; S_3 = 13$ và $u_2 < 0$, giá trị S_5 bằng

- A.** 2. **B.** $\frac{181}{16}$. **C.** $\frac{35}{16}$. **D.** 121.

Lời giải

Gọi u_1, q lần lượt là số hạng đầu tiên và công bội của cấp số nhân cần tìm.

$$\text{Từ giả thiết ta có } \begin{cases} S_2 = 4 \\ S_3 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q) = 4 \\ u_1(1 + q + q^2) = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q) = 4 \\ q = 3 \\ q = \frac{-3}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Vì } \begin{cases} u_2 < 0 \\ u_3 = S_3 - S_2 = 9 > 0 \end{cases} \Rightarrow q = \frac{u_3}{u_2} < 0 \text{ nên cấp số nhân cần tìm có } \begin{cases} u_1 = 16 \\ q = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } S_5 = u_1 \left(\frac{1 - q^5}{1 - q} \right) = \frac{181}{16}.$$

Câu 6: Giá trị của tổng $S = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2018}$ bằng

A. $S = \frac{3^{2019} - 1}{2}$. B. $S = \frac{3^{2018} - 1}{2}$. C. $S = \frac{3^{2020} - 1}{2}$. D. $S = -\frac{3^{2018} - 1}{2}$.

Lời giải

Ta thấy S là tổng của 2019 số hạng đầu tiên của cấp số nhân với số hạng đầu là $u_1 = 1$, công bội $q = 3$.

$$\text{Áp dụng công thức tính tổng của cấp số nhân ta có } S = 1 \cdot \frac{1 - 3^{2019}}{1 - 3} = \frac{3^{2019} - 1}{2}.$$

Câu 7: Biết rằng $S = 1 + 2.3 + 3.3^2 + \dots + 11.3^{10} = a + \frac{21.3^b}{4}$. Tính $P = a + \frac{b}{4}$.

A. $P = 1$. B. $P = 2$. C. $P = 3$. D. $P = 4$.

Lời giải

$$\text{Từ giả thiết suy ra } 3S = 3 + 2.3^2 + 3.3^3 + \dots + 11.3^{11}.$$

Do đó:

$$-2S = S - 3S = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{10} - 10.3^{11} = \frac{1 - 3^{11}}{1 - 3} - 10.3^{11} = -\frac{1}{2} - \frac{21.3^{11}}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{4} + \frac{21}{4}.3^{11}.$$

$$\text{Vì } S = \frac{1}{4} + \frac{21.3^{11}}{4} = a + \frac{21.3^b}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{4}, b = 11 \longrightarrow P = \frac{1}{4} + \frac{11}{4} = 3.$$

Câu 8: Cho cấp số nhân (u_n) có $S_2 = 4$ và $S_3 = 13$. Tìm S_5 .

A. $S_5 = 121$ hoặc $S_5 = \frac{181}{16}$. B. $S_5 = 121$ hoặc $S_5 = \frac{35}{16}$.
C. $S_5 = 114$ hoặc $S_5 = \frac{185}{16}$. D. $S_5 = 141$ hoặc $S_5 = \frac{183}{16}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } u_3 = S_3 - S_2 = 9 \Rightarrow u_1 q^2 = 9 \Rightarrow u_1 = \frac{9}{q^2}$$

$$\text{Vì } S_2 = 4 \text{ nên } u_1 + u_1 q = 4. \text{ Do đó } \frac{9}{q^2} + \frac{9}{q} = 4 \Leftrightarrow 4q^2 - 9q - 9 = 0 \Leftrightarrow q = 3 \text{ hoặc } q = -\frac{3}{4}.$$

$$\text{Với } q = 3 \text{ thì } u_1 = 1, u_6 = u_1 q^5 = 243. \text{ Suy ra } S_5 = \frac{u_1 - u_6}{1 - q} = \frac{1 - 243}{1 - 3} = 121.$$

Với $q = -\frac{3}{4}$ thì $u_1 = 16$, $u_6 = -\frac{243}{64}$. Suy ra $S_5 = \frac{u_1 - u_6}{1 - q} = \frac{181}{16}$.

Câu 9: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 8$ và biểu thức $4u_3 + 2u_2 - 15u_1$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính S_{10} .

A. $S_{10} = \frac{2(4^{11} + 1)}{5 \cdot 4^9}$. B. $S_{10} = \frac{2(4^{10} + 1)}{5 \cdot 4^8}$. C. $S_{10} = \frac{2^{10} - 1}{3 \cdot 2^6}$. D. $S_{10} = \frac{2^{11} - 1}{3 \cdot 2^7}$

Lời giải

Gọi q là công bội của cấp số nhân. Khi đó $4u_3 + 2u_2 - 15u_1 = 2(4q + 1)^2 - 122 \geq -122, \forall q$.

Dấu bằng xảy ra khi $4q + 1 = 0 \Leftrightarrow q = -\frac{1}{4}$. Suy ra: $S_{10} = u_1 \cdot \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = 8 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{10}}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{2(4^{10} - 1)}{5 \cdot 4^8}$

Câu 10: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$, công bội dương và biểu thức $u_4 + \frac{1024}{u_7}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Tính $S = u_{11} + u_{12} + \dots + u_{20}$.

A. $S = 2046$. B. $S = 2097150$. C. $S = 2095104$. D. $S = 1047552$.

Lời giải

Gọi q là công bội của cấp số nhân, $q > 0$. Ta có $u_4 + \frac{1024}{u_7} = 2q^3 + \frac{512}{q^6}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $2q^3 + \frac{512}{q^6} = q^3 + q^3 + \frac{512}{q^6} \geq 3\sqrt[3]{q^3 \cdot q^3 \cdot \frac{512}{q^6}} = 24$.

Suy ra $u_4 + \frac{1024}{u_7}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 24 khi $q^3 = \frac{512}{q^6} \Leftrightarrow q = 2$.

Ta có $S_{10} = \frac{u_1(1 - q^{10})}{1 - q} = 2^{11} - 2$; $S_{10} = \frac{u_1(1 - q^{20})}{1 - q} = 2^{21} - 2$.

Do đó $S = S_{20} - S_{10} = 2095104$.

Câu 11: Cho cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases}$. Tính S_{21} .

A. $S_{21} = \frac{1}{2}(3^{21} + 1)$ B. $S_{21} = 3^{21} - 1$. C. $S_{21} = 1 - 3^{21}$. D. $S_{21} = -\frac{1}{2}(3^{21} + 1)$.

Lời giải

Ta có $u_4 + u_6 = -540 \Leftrightarrow (u_3 + u_5)q = -540$. Kết hợp với phương trình thứ hai trong hệ, ta tìm được $q = -3$. Lại có $u_3 + u_5 = 180 \Leftrightarrow u_1(q^2 + q^4) = 180$.

Vì $q = -3$ nên $u_1 = 2$. Suy ra $S_{21} = \frac{u_1(1-q^{21})}{1-q} = \frac{1}{2}(3^{21} + 1)$.

Câu 12: Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là 1; 4; 16; 64; ... Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n = 4^{n-1}$. B. $S_n = \frac{n(1+4^{n-1})}{2}$. C. $S_n = \frac{4^n - 1}{3}$. D. $S_n = \frac{4(4^n - 1)}{3}$.

Lời giải

Cấp số nhân đã cho có $\begin{cases} u_1 = 1 \\ q = 4 \end{cases} \rightarrow S_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-4^n}{1-4} = \frac{4^n - 1}{3}$.

Câu 13: Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; \dots$ Tính tổng S của tất cả các số hạng của cấp số nhân đã cho.

A. $S = 2047,75$. B. $S = 2049,75$. C. $S = 4095,75$. D. $S = 4096,75$.

Lời giải

Cấp số nhân đã cho có

$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{4} \\ q = 2 \end{cases} \rightarrow 2048 = 2^{11} = u_1 q^{n-1} = \frac{1}{4} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-2} \Leftrightarrow n = 13$.

Vậy cấp số nhân đã cho có tất cả 13 số hạng. Vậy $S_{13} = u_1 \cdot \frac{1-q^{13}}{1-q} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1-2^{13}}{1-2} = 2047,75$

Câu 14: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $3,1555\dots = 3,1(5)$ viết dưới dạng số hữu tỉ là:

A. $\frac{63}{20}$. B. $\frac{142}{45}$. C. $\frac{1}{18}$. D. $\frac{7}{2}$.

Lời giải

$3,1555\dots = 3,1 + 0,05 + 0,005 + 0,0005 + \dots$

Dãy số $0,05; 0,005; 0,0005; 0,00005; \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = 0,05$; $q = 0,1$.

Vậy $3,1555\dots = 3,1 + \frac{0,05}{1-0,1} = \frac{142}{45}$.

Câu 15: Tính tổng $S = -1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{6^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{6^n} + \dots$

A. $S = \frac{7}{6}$ B. $S = -\frac{6}{7}$ C. $S = \frac{6}{7}$ D. $S = -\frac{7}{6}$

Lời giải

Ta có: $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \dots = -\frac{1}{6} (|q| < 1)$. Do đó: $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{-1}{1+\frac{1}{6}} = -\frac{6}{7}$

Câu 16: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,121212\dots$ được biểu diễn bởi phân số

- A. $\frac{3}{25}$. B. $\frac{12}{99}$. C. $\frac{1}{11}$. D. $\frac{3}{22}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 0,121212\dots &= \frac{12}{10^2} + \frac{12}{10^4} + \frac{12}{10^6} + \dots + \frac{12}{10^{2n}} + \dots = 12 \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \dots + \frac{1}{10^{2n}} + \dots \right) \\ &= 12 \left(\frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} \right) = \frac{4}{33} = \frac{12}{99}. \end{aligned}$$

Câu 17: Viết thêm bốn số vào giữa hai số 160 và 5 để được một cấp số nhân. Tổng các số hạng của cấp số nhân đó là

- A. 215. B. 315. C. 415. D. 515.

Lời giải

$$\text{Từ giả thiết ta có } \begin{cases} u_1 = 160 \\ u_6 = 5 \end{cases} \Rightarrow q = \sqrt[5]{\frac{u_6}{u_1}} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra tổng các số hạng của cấp số nhân đó là: } S = \frac{u_1(1 - q^6)}{1 - q} = \frac{160 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^6 \right)}{\frac{1}{2}} = 315.$$

Câu 18: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 - u_1 = 26 \end{cases}$. Tổng 8 số hạng đầu của cấp số nhân (u_n) là

- A. $S_8 = 1093$. B. $S_8 = 3820$. C. $S_8 = 9841$. D. $S_8 = 3280$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 - u_1 = 26 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 = 13 \\ u_1 \cdot q^3 - u_1 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = 13 \\ u_1 \cdot (q - 1)(1 + q + q^2) = 26 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = 13 \\ q = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ q = 3 \end{cases}. \text{ Vậy tổng } S_8 = \frac{u_1(1 - q^8)}{1 - q} = \frac{1(1 - 3^8)}{1 - 3} = 3280. \end{aligned}$$

Câu 19: Tổng $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$ có giá trị là:

- A. $\frac{1}{9}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với $u_n = \frac{1}{3^n}$ có số hạng

$$\text{đầu } u_1 = \frac{1}{3}, \text{ công sai } q = \frac{1}{3}. \text{ Do đó } S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Câu 20: Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 2, a_{n+1} = -2a_n, n \geq 1, n \in \mathbb{N}$. Tính tổng của 10 số hạng đầu tiên của dãy số.

- A. $\frac{2050}{3}$. B. 2046. C. -682. D. -2046.

Lời giải

$$\text{Vì } \frac{a_{n+1}}{a_n} = -2 \text{ suy ra } (a_n) \text{ là một cấp số nhân với } \begin{cases} a_1 = 2 \\ q = -2 \end{cases}. \text{ Suy ra } S_{10} = \frac{a_1(1-q^{10})}{1-q} = -682.$$

Câu 21: Tính tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân có số hạng đầu là $\frac{1}{2}$, số hạng thứ tư là 32 và số hạng cuối là 2048?

- A. $\frac{1365}{2}$. B. $\frac{5416}{2}$. C. $\frac{5461}{2}$. D. $\frac{21845}{2}$.

Lời giải

Theo bài ra ta có $u_1 = \frac{1}{2}, u_4 = 32$ và $u_n = 2048$.

$$u_4 = u_1 \cdot q^3 \Rightarrow 32 = \frac{1}{2} \cdot q^3 \Rightarrow q = 4$$

$$u_n = 2048 \Rightarrow u_1 \cdot q^{n-1} = 2048 \Rightarrow 4^{n-1} = 4^6 \Rightarrow n = 7$$

$$\text{Khi đó tổng của cấp số nhân này là } S_7 = \frac{u_1(1-q^7)}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}(1-4^7)}{1-4} = \frac{5461}{2}.$$

Câu 22: Một cấp số nhân (u_n) có n số hạng, số hạng đầu $u_1 = 7$, công bội $q = 2$. Số hạng thứ n bằng 1792. Tính tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) ?

- A. 5377. B. 5737. C. 3577. D. 3775.

Lời giải

$$\text{Ta có } u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 7 \cdot 2^{n-1} = 1792 \Leftrightarrow n = 9 \Rightarrow S_9 = 3577$$

Câu 23: Tính tổng cá số nhân lùi vô hạn $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \frac{(-1)^2}{2^n}, \dots$ là.

- A. -1. B. $\frac{1}{2}$. C. $-\frac{1}{4}$. D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Cấp số nhân có $u_1 = -\frac{1}{2}$ công bội $q = -\frac{1}{2}$ nên tổng của cấp số nhân lùi vô hạn là.

$$\lim S_n = \lim \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{u_1}{1-q} = -\frac{1}{3}$$

Câu 24: Giá trị của tổng $7 + 77 + 777 + \dots + 77\dots7$ bằng

A. $\frac{70}{9}(10^{2018} - 1) + 2018$. B. $\frac{7}{9}\left(\frac{10^{2018} - 10}{9} - 2018\right)$. C. $\frac{7}{9}\left(\frac{10^{2019} - 10}{9} - 2018\right)$. D. $\frac{7}{9}(10^{2018} - 1)$.

Lời giải

Ta có $7 + 77 + 777 + \dots + 77\dots7$

$$= \frac{7}{9}(9 + 99 + 999 + \dots + 99\dots9) = \frac{7}{9}(10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + \dots + 10^{2018} - 1)$$

$$= \frac{7}{9}(10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{2018} - 2018)$$

Mặt khác, ta có $10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{2018}$ là tổng của một cấp số nhân với $u_1 = 10$ và công bội

$$q = 10 \Rightarrow 10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{2018} = 10 \frac{10^{2018} - 1}{9} = \frac{10^{2019} - 10}{9}.$$

$$\text{Do đó } \frac{7}{9}(10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{2018} - 2018) = \frac{7}{9}\left(\frac{10^{2019} - 10}{9} - 2018\right).$$

Câu 25: Giá trị của tổng $4 + 44 + 444 + \dots + 44\dots4$ bằng

A. $\frac{40}{9}(10^{2018} - 1) + 2018$. B. $\frac{4}{9}\left(\frac{10^{2019} - 10}{9} - 2018\right)$. C. $\frac{4}{9}\left(\frac{10^{2019} - 10}{9} + 2018\right)$. D. $\frac{4}{9}(10^{2018} - 1)$.

Lời giải

Đặt $S = 4 + 44 + 444 + \dots + 44\dots4$.

$$\text{Ta có: } \frac{9}{4}S = 9 + 99 + 999 + \dots + 99\dots9 = (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \dots + (10^{2018} - 1)$$

$$\text{Suy ra: } \frac{9}{4}S = (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{2018}) - 2018 = A - 2018.$$

Với $A = 10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{2018}$ là tổng 2018 số hạng của một cấp số nhân có số hạng đầu

$$u_1 = 10, \text{ công bội } q = 10 \text{ nên ta có } A = u_1 \frac{1 - q^{2018}}{1 - q} = 10 \frac{1 - 10^{2018}}{-9} = \frac{10^{2019} - 10}{9}.$$

$$\text{Do đó } \frac{9}{4}S = \frac{10^{2019} - 10}{9} - 2018 \Leftrightarrow S = \frac{4}{9}\left(\frac{10^{2019} - 10}{9} - 2018\right).$$

Câu 26: Cho dãy số xác định bởi $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2u_n + \frac{n-1}{n^2 + 3n + 2}\right); n \in \mathbb{N}^+$. Khi đó u_{2018} bằng:

A. $u_{2018} = \frac{2^{2016}}{3^{2017}} + \frac{1}{2019}$. **B.** $u_{2018} = \frac{2^{2018}}{3^{2017}} + \frac{1}{2019}$. **C.** $u_{2018} = \frac{2^{2017}}{3^{2018}} + \frac{1}{2019}$. **D.** $u_{2018} = \frac{2^{2017}}{3^{2018}} + \frac{1}{2019}$.

Lời giải

Ta có: $u_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2u_n + \frac{n-1}{n^2+3n+2} \right) = \frac{1}{3} \left(2u_n + \frac{3}{n+2} - \frac{2}{n+1} \right) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n+1}$.

$\Leftrightarrow u_{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{2}{3} \left(u_n - \frac{1}{n+1} \right)$ (1)

Đặt $v_n = u_n - \frac{1}{n+1}$, từ (1) ta suy ra: $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$.

Do đó (v_n) là cấp số nhân với $v_1 = u_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, công bội $q = \frac{2}{3}$.

Suy ra: $v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \Leftrightarrow u_n - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} + \frac{1}{n+1}$.

Vậy $u_{2018} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{2017} + \frac{1}{2019} = \frac{2^{2016}}{3^{2017}} + \frac{1}{2019}$.

Câu 27: Cho dãy số (U_n) xác định bởi: $U_1 = \frac{1}{3}$ và $U_{n+1} = \frac{n+1}{3n} \cdot U_n$. Tổng $S = U_1 + \frac{U_2}{2} + \frac{U_3}{3} + \dots + \frac{U_{10}}{10}$ bằng:

A. $\frac{3280}{6561}$. **B.** $\frac{29524}{59049}$. **C.** $\frac{25942}{59049}$. **D.** $\frac{1}{243}$.

Lời giải

Theo đề ta có: $U_{n+1} = \frac{n+1}{3n} \cdot U_n \Leftrightarrow \frac{U_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{U_n}{n}$ mà $U_1 = \frac{1}{3}$ hay $\frac{U_1}{1} = \frac{1}{3}$

Nên ta có $\frac{U_2}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3} \right)^2$; $\frac{U_3}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \left(\frac{1}{3} \right)^3$; ...; $\frac{U_{10}}{10} = \left(\frac{1}{3} \right)^{10}$.

Hay dãy $\left(\frac{U_n}{n} \right)$ là một cấp số nhân có số hạng đầu $U_1 = \frac{1}{3}$, công bội $q = \frac{1}{3}$.

Khi đó $S = U_1 + \frac{U_2}{2} + \frac{U_3}{3} + \dots + \frac{U_{10}}{10} = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{3^{10}-1}{2 \cdot 3^{10}} = \frac{59048}{2 \cdot 3^{10}} = \frac{29524}{59049}$.

Câu 28: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1; n \geq 2 \end{cases}$. Tổng $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$ bằng

A. $2^{20} - 20$. **B.** $2^{21} - 22$. **C.** 2^{20} . **D.** $2^{21} - 20$.

Lời giải

$u_n = 2u_{n-1} + 1 \Leftrightarrow u_n + 1 = 2(u_{n-1} + 1)$

Đặt $v_n = u_n + 1$, ta có $v_n = 2v_{n-1}$ trong đó $v_1 = 2$

Vậy (v_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $v_1 = 2$ và công bội bằng 2, nên số hạng tổng quát

$$v_n = 2^n \Rightarrow u_n = v_n - 1 = 2^n - 1$$

$$\Rightarrow S = u_1 + u_2 + \dots + u_{20} = (2^1 - 1) + (2^2 - 1) + \dots + (2^{20} - 1) = (2^1 + 2^2 + \dots + 2^{20}) - 20$$

$$S = 2 \cdot (2^{20} - 1) - 20 = 2^{21} - 22.$$

Câu 29: Người ta thiết kế một cái tháp 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp. Tính diện tích mặt trên cùng.

- A. 8 m^2 . B. 6 m^2 . C. 10 m^2 . D. 12 m^2 .

Lời giải

Gọi $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{11}$ lần lượt là diện tích mặt trên của đế tháp, tầng 1, tầng 2, ..., tầng 11.

Khi đó ta có: $a_0 = 12288; a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} = a_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n, n = 1, 2, \dots, 11$.

Diện tích mặt trên tầng trên cùng là: $a_{11} = a_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = 12288 \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = 6 \text{ (m}^2\text{)}$

Câu 30: Dân số tỉnh Bình Phước theo điều tra vào ngày 1/1/2011 là 905300 người. Nếu duy trì tốc độ tăng trưởng dân số không đổi là 10% một năm thì đến 1/1/2020 dân số của tỉnh Bình Phước là bao nhiêu?

- A. 22582927. B. 02348115. C. 2134650. D. 11940591.

Lời giải

Sau 9 năm thì số dân của tỉnh Bình Phước là: $905300 \cdot 1,1^9 \approx 2134650$ người.

Câu 31: Bạn A thả quả bóng cao su từ độ cao 10m theo phương thẳng đứng. Mỗi khi chạm đất nó lại nảy lên theo phương thẳng đứng có độ cao bằng $\frac{3}{4}$ độ cao trước đó. Tính tổng quãng đường bóng đi được đến khi bóng dừng hẳn.

- A. 40 m. B. 70 m. C. 50 m. D. 80 m.

Lời giải

Các quãng đường khi bóng đi xuống tạo thành một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = 10$ và $q = \frac{3}{4}$.

Tổng các quãng đường khi bóng đi xuống là $S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{10}{1 - \frac{3}{4}} = 40$.

Tổng quãng đường bóng đi được đến khi bóng dừng hẳn $2S - 10 = 70$.

Câu 32: Một loại vi khuẩn sau mỗi phút số lượng tăng gấp đôi biết rằng sau 5 phút người ta đếm được 64000 con hỏi sau bao nhiêu phút thì có được 2048000 con.

- A.** 10. **B.** 11. **C.** 26. **D.** 50.

Lời giải

Số lượng vi khuẩn tăng lên là cấp số nhân (u_n) với công bội $q = 2$.

Ta có: $u_6 = 64000 \Rightarrow u_1 \cdot q^5 = 64000 \Rightarrow u_1 = 2000$.

Sau n phút thì số lượng vi khuẩn là u_{n+1} .

$u_{n+1} = 2048000 \Rightarrow u_1 \cdot q^n = 2048000 \Rightarrow 2000 \cdot 2^n = 2048000 \Rightarrow n = 10$.

Vậy sau 10 phút thì có được 2048000 con.

Câu 33: Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A , biết độ dài cạnh đáy BC , đường cao AH và cạnh bên AB theo thứ tự lập thành cấp số nhân với công bội q . Giá trị của q^2 bằng

- A.** $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

Lời giải

Đặt $BC = a$; $AB = AC = b$; $AH = h$. Theo giả thiết ta có a, h, b lập cấp số nhân, suy ra

$h^2 = ab$. Mặt khác tam giác ABC cân tại đỉnh A nên $h^2 = m_a^2 = \frac{b^2 + b^2}{2} - \frac{a^2}{4}$

Do đó $\frac{b^2 + b^2}{2} - \frac{a^2}{4} = ab \Leftrightarrow a^2 + 4ab - 4b^2 = 0 \Leftrightarrow a = (2\sqrt{2} - 2)b$

Lại có $b = q^2 a$ nên suy ra $q^2 = \frac{b}{a} = \frac{1}{2\sqrt{2} - 2} = \frac{2\sqrt{2} + 2}{4} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$.

Câu 34: Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$, công bội $q = 2$. Tính tổng

$T = \frac{1}{u_1 - u_5} + \frac{1}{u_2 - u_6} + \frac{1}{u_3 - u_7} + \dots + \frac{1}{u_{20} - u_{24}}$.

- A.** $\frac{1-2^{19}}{15 \cdot 2^{18}}$. **B.** $\frac{1-2^{20}}{15 \cdot 2^{19}}$. **C.** $\frac{2^{19}-1}{15 \cdot 2^{18}}$. **D.** $\frac{2^{20}-1}{15 \cdot 2^{19}}$

Lời giải

$T = \frac{1}{u_1 - u_5} + \frac{1}{u_2 - u_6} + \frac{1}{u_3 - u_7} + \dots + \frac{1}{u_{20} - u_{24}}$

$= \frac{1}{u_1(1-q^4)} + \frac{1}{u_2(1-q^4)} + \frac{1}{u_3(1-q^4)} + \dots + \frac{1}{u_{20}(1-q^4)} = \frac{1}{1-q^4} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_{20}} \right)$

$$= \frac{1}{1-q^4} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_1 q} + \frac{1}{u_1 q^2} + \dots + \frac{1}{u_1 q^{19}} \right) = \frac{1}{1-q^4} \cdot \frac{1}{u_1} \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots + \frac{1}{q^{19}} \right) = \frac{1}{1-q^4} \cdot \frac{1}{u_1} \cdot \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^{20} - 1}{\frac{1}{q} - 1}$$

$$= \frac{1}{1-q^4} \cdot \frac{1}{u_1} \cdot \frac{1-(q)^{20}}{(1-q)q^{19}} = \frac{1-2^{20}}{15 \cdot 2^{19}}$$

Câu 35: Cho cấp số nhân (a_n) có $a_1 = 7$, $a_6 = 224$ và $S_k = 3577$. Tính giá trị của biểu thức $T = (k+1)a_k$.
A. $T = 17920$. **B.** $T = 8064$. **C.** $T = 39424$. **D.** $T = 86016$.

Lời giải

Ta có $a_6 = 224 \Leftrightarrow a_1 q^5 = 224 \Rightarrow q = 2$.

Do $S_k = \frac{a_1(1-q^k)}{1-q} = 7(2^k - 1)$ nên $S_k = 3577 \Leftrightarrow 7(2^k - 1) = 3577 \Leftrightarrow 2^k = 2^9 \Leftrightarrow k = 9$.

Suy ra: $T = 10a_9 = 10a_1 q^8 = 17920$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 + u_5 = 51$; $u_2 + u_6 = 102$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Số hạng $u_1 = 3$ b) Số hạng $u_4 = 48$
 c) Số 12288 là số hạng thứ 12 của cấp số nhân (u_n)
 d) Tổng 8 số hạng đầu của cấp số nhân là: 765.

Lời giải

a) Đúng: Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^4 = 51 \\ u_1 q + u_1 q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q^4) = 51 & (1) \\ u_1 q(1 + q^4) = 102 & (2) \end{cases}$$

Nhận xét: Nếu $u_1 = 0$ hay $q = 0$ thì (1) và (2) đều không thỏa mãn vì vậy ta có $u_1 q \neq 0$.

Chia theo vế (2) cho (1) ta được: $q = 2$.

Thay $q = 2$ vào (1) suy ra $u_1 = \frac{51}{1+2^4} = 3$.

Công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân: $u_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

b) Sai: $u_4 = 3 \cdot 2^3 = 24$

c) Sai: Xét $u_n = 12288 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{n-1} = 12288 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^{12} \Leftrightarrow n = 13$.

Vậy 12288 là số hạng thứ 13 của cấp số nhân đã cho.

d) Đúng: Tổng 8 số hạng đầu của cấp số nhân là: $S_8 = \frac{u_1(1-q^8)}{1-q} = \frac{3 \cdot (1-2^8)}{1-2} = 765$.

Câu 2: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} u_4 = \frac{2}{27} \\ u_3 = 243u_8 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số hạng $u_1 = 2; u_2 = \frac{2}{3}$

b) $u_5 - u_3 = -\frac{16}{81}$

c) Số $\frac{2}{6561}$ là số hạng thứ 8 của cấp số nhân

d) Tổng 9 số hạng đầu của cấp số nhân là số lớn hơn 3.

Lời giải

a) Đúng: Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n) .

Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases} u_1 q^3 = \frac{2}{27} \\ u_1 q^2 = 243 \cdot u_1 q^7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 q^3 = \frac{2}{27} \\ q^5 = \frac{1}{243} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{3} \\ u_1 = 2 \end{cases}$

Năm số hạng đầu của (u_n) là: $u_1 = 2; u_2 = \frac{2}{3}; u_3 = \frac{2}{9}; u_4 = \frac{2}{27}; u_5 = \frac{2}{81}$.

b) Đúng: $u_5 - u_3 = \frac{2}{81} - \frac{2}{9} = -\frac{16}{81}$

c) Sai: Số hạng tổng quát của cấp số nhân: $u_n = u_1 q^{n-1} = \frac{2}{3^{n-1}}$.

Xét $u_n = \frac{2}{6561} \Rightarrow \frac{2}{3^{n-1}} = \frac{2}{6561} \Rightarrow 3^{n-1} = 6561 = 3^8 \Rightarrow n = 9$.

Vậy $\frac{2}{6561}$ là số hạng thứ 9 của cấp số nhân (u_n) .

d) Sai: Tổng 9 số hạng đầu của cấp số nhân là: $S_9 = \frac{u_1(1-q^9)}{1-q} = \frac{2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^9\right)}{1 - \frac{1}{3}} \approx 2,99985 < 3$.

Câu 3: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số hạng $u_1 = 2$

b) Gọi q là công bội của cấp số nhân, thì ba số $q; 1; 3$ tạo thành một cấp số cộng

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^3 - u_1 q = 54 \\ u_1 q^4 - u_1 q^2 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q (q^2 - 1) = 54 \\ u_1 q^2 (q^2 - 1) = 108 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{54}{q(q^2 - 1)} \\ \frac{1}{q} = \frac{54}{108} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{54}{2(2^2 - 1)} \\ q = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 2 \end{cases}$$

a) Đúng: Số hạng đầu của cấp số nhân bằng 9

b) Sai: Công bội của cấp số nhân $q = 3$

$$\text{c) Ta có: } S_n = 4599 \Leftrightarrow \frac{u_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} = 4599 \Leftrightarrow \frac{9 \cdot (1 - 2^n)}{1 - 2} = 4599$$

$$\Leftrightarrow -9 \cdot (1 - 2^n) = 4599 \Leftrightarrow 1 - 2^n = -511 \Leftrightarrow 2^n = 512 \Leftrightarrow n = 9$$

Vậy tổng của 9 số hạng đầu tiên bằng 4599.

$$\text{d) Ta có: } u_k = 576 \Leftrightarrow u_1 \cdot q^{k-1} = 576 \Leftrightarrow 9 \cdot 2^{k-1} = 576 \Leftrightarrow 2^{k-1} = 64 \Leftrightarrow k - 1 = 6 \Leftrightarrow k = 7$$

Vậy số 576 là số hạng thứ 7 của cấp số nhân.

Câu 6: Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân có $u_1 = 3$, $u_3 = 12$ và công bội của cấp số nhân đó là số âm. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Công bội của cấp số cộng đó là $q = -2$. b) Số hạng thứ 25 của cấp số nhân đó bằng $-3 \cdot 2^{24}$.

c) Tổng 101 số hạng đầu của cấp số nhân đó bằng $1 - 2^{101}$. d) $u_{55} = \sqrt{u_{54} \cdot u_{56}}$

Lời giải

a) Đúng: Vì dãy số (u_n) là một cấp số nhân có $u_1 = 3$, $u_3 = 12$ và công bội $q < 0$

$$\text{Suy ra } u_3 = u_1 \cdot q^2 \Rightarrow 3 \cdot q^2 = 12 \Rightarrow q = -2$$

b) Sai: $u_{25} = u_1 \cdot q^{24} = 3 \cdot (-2)^{24} = 3 \cdot 2^{24}$

c) Sai: Tổng số hạng đầu của cấp số nhân đó là $S_{101} = \frac{u_1(1 - q^{101})}{1 - q} = \frac{3 \cdot [1 - (-2)^{101}]}{1 - (-2)} = 1 + 2^{101}$

d) Sai: $\sqrt{u_{54} \cdot u_{56}} = \sqrt{\frac{u_{55}}{q} \cdot u_{55} \cdot q} = \sqrt{(u_{55})^2} = |u_{55}| = u_{55} (u_{55} = u_1 \cdot q^{54} > 0)$

Câu 7: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = 6$ và $u_3 = 18$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Công bội của cấp số nhân là $q = 3$.

b) $u_{k-1} + u_{k+1} = u_k^2, 2 \leq k \in \mathbb{N}$

c) Số hạng đầu của cấp số nhân là $u_1 = 1$

d) Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho $S_{10} = 59048$.

Lời giải

a) Đúng : Công bội của cấp số nhân là $q = \frac{u_2}{u_1} = 3$

b) Sai : Do (u_n) là cấp số nhân $u_{k-1} \cdot u_{k+1} = u_k^2, 2 \leq k \in \mathbb{N}$

c) Sai: Số hạng đầu của cấp số nhân là $u_1 = \frac{u_2}{q} = 2$

d) Đúng: Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho $S_{10} = 2 \frac{1-(3)^{10}}{1-(3)} = 59048$

Câu 8: Cho dãy số (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 4u_n - 1 \end{cases}$ (với $n \in \mathbb{N}$). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số hạng thứ năm của dãy số là 685.

b) Đặt $v_n = u_n - \frac{1}{3}$ thì (v_n) là cấp số nhân

c) Số hạng tổng quát $u_n = \frac{8}{3} \cdot 4^{n-1} + \frac{1}{3}$.

d) Ta có $S_8 = 58256$

Lời giải

a) Sai: Cho dãy số (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 4u_n - 1 \end{cases}$ (với $n \in \mathbb{N}$). Số hạng thứ năm của dãy số là 683

Ta có: $u_2 = 4u_1 - 1 = 4 \cdot 3 - 1 = 12 - 1 = 11$. $u_3 = 4u_2 - 1 = 4 \cdot 11 - 1 = 44 - 1 = 43$.

$u_4 = 4u_3 - 1 = 4 \cdot 43 - 1 = 172 - 1 = 171$. $u_5 = 4u_4 - 1 = 4 \cdot 171 - 1 = 684 - 1 = 683$.

Vậy số hạng thứ năm của dãy số là $u_5 = 683$.

b) Đúng: Ta có $u_{n+1} = 4u_n - 1 \Leftrightarrow u_{n+1} - \frac{1}{3} = 4\left(u_n - \frac{1}{3}\right)$

Đặt $v_n = u_n - \frac{1}{3}$. Ta có $v_{n+1} = 4v_n$. Suy ra (v_n) là cấp số nhân

c) Đúng: Ta có: $v_{n+1} = 4v_n$. Suy ra (v_n) là cấp số nhân với $\begin{cases} q = 4 \\ v_1 = u_1 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \end{cases}$

Suy ra: $v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = \frac{8}{3} \cdot 4^{n-1} \Rightarrow u_n = \frac{8}{3} \cdot 4^{n-1} + \frac{1}{3}$.

d) Đúng: Ta có $S_8 = u_1 + u_2 + \dots + u_8 = \frac{8}{3} \cdot (1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^7) + \frac{1}{3} \cdot 8 = 58256$.

Câu 9: Tương truyền rằng nhà vua Ấn Độ cho phép người phát minh ra bàn cờ vua được lựa chọn phần thưởng tùy theo sở thích. Người đó xin nhà vua: “Bàn cờ có 64 ô, với ô thứ nhất thần xin nhận 1 hạt thóc, ô thứ hai thì gấp đôi ô đầu, ô thứ ba thì lại gấp đôi ô thứ hai, ... cứ như vậy ô sau nhận

Tư vấn hướng nghiệp cho học sinh bằng phân tích nhân tướng học – xem chỉ tay – tử vi

số hạt thóc gấp đôi phần thưởng dành cho ô liền trước và thần xin nhận tổng số các hạt thóc ở 64 ô”. Biết rằng khối lượng của 100 hạt thóc là 20 gam. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Số hạt thóc ở 64 ô là một cấp số nhân có $u_1 = 1; q = 2$.
- b) Số hạt thóc ở ô thứ tám là 2^8 .
- c) Tổng khối lượng thóc của 64 ô trên bàn cờ là 364 tỉ tấn.
- d) Giả sử người đó muốn chở số thóc ở trên 32 ô đầu tiên về bằng tàu thủy, biết rằng mỗi chuyến tàu chở tối đa 10 tấn hàng hóa. Khi đó, người đó cần tối thiểu 85 chuyến tàu để chở hết số thóc đó.

Lời giải

Số hạt thóc ở 64 ô là một cấp số nhân có $u_1 = 1; q = 2$, khi đó số hạt thóc ở ô thứ 8 là $u_8 = u_1 q^7 = 2^7$.

Tổng số hạt thóc của 64 ô là: $S_{64} = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1$ hạt thóc, do đó tổng khối lượng thóc trên 64 ô trên bàn cờ là: $(2^{64} - 1) \cdot \frac{20}{100} \approx 3.69 \times 10^8 (g) = 369$ (tỉ tấn).

Tương tự, ta có khối lượng thóc của 32 ô đầu tiên là $(2^{32} - 1) \cdot \frac{20}{100} = 858993459 \approx 859$ (tấn)

- a) Đúng: Số hạt thóc ở 64 ô là một cấp số nhân có $u_1 = 1; q = 2$.
- b) Sai: Số hạt thóc ở ô thứ tám là 2^7 .
- c) Sai: Tổng khối lượng thóc của 64 ô trên bàn cờ là 369 tỉ tấn.
- d) Sai:

Câu 10: Anh Bình là nhân viên của một công ty A. Từ ngày 1/2/2024 anh Bình được nâng lương lên bậc 4, mức lương anh hiện hưởng là 11.718.750 đồng mỗi tháng (chưa trừ thuế và bảo hiểm). Theo quy định của công ty, nếu không bị kỉ luật, không có khen thưởng đặc biệt thì cứ sau 3 năm anh Bình sẽ được nâng một bậc lương, tăng thêm 25% so với bậc lương trước, tối đa là bậc 7. Khi hết bậc 7 sẽ chuyển sang vượt khung. Lương vượt khung năm sau cao hơn năm trước 1% và vẫn nhận hàng tháng. Lương bậc 1 sẽ được tính sau khi hết đúng 1 năm tập sự. Anh Bình là người rất nghiêm túc, không vi phạm kỉ luật. Anh dự định sẽ làm việc 30 năm ở công ty này rồi nghỉ hưu. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau? (làm tròn đến đồng)

- a) Lương bậc 5 của anh Bình sẽ là 14.500.000 đồng.
- b) Lương bậc 1 của anh Bình là 6.000.000 đồng.
- c) Lương bậc 7 anh Bình là 23.250.000.
- d) Tổng tiền lương anh Bình nhận được kể từ khi hết tập sự đến khi nghỉ hưu là $= 5.554.357.709$

Lời giải

- a) Sai: Gọi u_n là lương bậc n của anh Bình hàng tháng.

Ta có $u_{n+1} = u_n + 25\%u_n = u_n \cdot 1,25$ ($n \leq 7$)

u_n là cấp số nhân có công bội $q = 1,25$.

Ta có $u_4 = 11.718.750$ nên $u_5 = u_4 \times 1,25 = 14.648.437,5$ đồng

b) Đúng: $u_4 = u_1 \times q^3 \Leftrightarrow u_1 = \frac{u_4}{q^3} = 6.000.000$

c) Sai: $u_7 = u_1 \times q^6 = 6.000.000 \times 1,25^6 = 22.888.184$ đồng

d) Đúng: Khi vượt khung, lương mỗi khung %, là cấp số nhân v_n , ($1 \leq n \leq 8$) có số hạng đầu là $v_1 = u_7 + 1\%u_7 = 1,01u_7$, công bội là $q' = 1,01$.

Anh Bình làm việc 30 năm liên tục, trong đó 1 năm tập sự, 21 năm lương theo bậc, 8 năm vượt khung. Mỗi bậc lương anh Bình nhận 36 tháng, lương vượt khung mỗi khung % anh nhận 12 tháng. Tổng lương anh Bình nhận được kể từ khi hết tập sự đến khi nghỉ hưu là

$$S = 36u_1 \cdot \frac{q^7 - 1}{q - 1} + 12v_1 \frac{q'^8 - 1}{q' - 1} = 5.554.357.709 \text{ đồng.}$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Cho năm số a, b, c, d, e tạo thành một cấp số nhân theo thứ tự đó và các số đều khác 0, biết $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = 10$ và tổng của chúng bằng 40. Tính giá trị $|S|$ với $S = abcde$.

Lời giải

Gọi q ($q \neq 0$) là công bội của cấp số nhân a, b, c, d, e . Khi đó $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \frac{1}{e}$ là cấp số nhân có công bội $\frac{1}{q}$.

Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases} a + b + c + d + e = 40 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot \frac{1 - q^5}{1 - q} = 40 \\ \frac{1}{a} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{q}\right)^5}{1 - \frac{1}{q}} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot \frac{1 - q^5}{1 - q} = 40 \\ \frac{1}{a} \cdot \frac{q^5 - 1}{q^4(q - 1)} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 q^4 = 4.$$

Ta có $S = abcde = a \cdot aq \cdot aq^2 \cdot aq^3 \cdot aq^4 = a^5 q^{10}$ nên $S^2 = (a^5 q^{10})^2 = (a^2 q^4)^5 = 4^5$.

Suy ra $|S| = \sqrt{4^5} = 32$.

Câu 2: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} 5u_1 + \sqrt{5u_1 - u_2} = u_2 + 6 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n \geq 2.3^{2018}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\begin{cases} 5u_1 + \sqrt{5u_1 - u_2} = u_2 + 6 \quad (1) \\ u_{n+1} = 3u_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{Từ (1) có } 5u_1 + \sqrt{5u_1 - u_2} = u_2 + 6 \Leftrightarrow \left(\sqrt{5u_1 - u_2}\right)^2 + \sqrt{5u_1 - u_2} - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5u_1 - u_2} = 2 \Leftrightarrow 5u_1 - u_2 = 4.$$

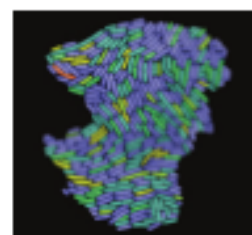
$$\text{Từ (2) có } u_{n+1} = 3u_n \Rightarrow u_2 = 3u_1. \text{ Giải hệ } \begin{cases} 5u_1 - u_2 = 4 \\ u_2 = 3u_1 \end{cases} \text{ được } u_1 = 2.$$

Dãy (u_n) là cấp số nhân với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ q = 3 \end{cases}$ có số hạng tổng quát: $u_n = 2.3^{n-1}$ với $n \in \mathbb{N}$

$$u_n \geq 2.3^{2018} \Leftrightarrow 2.3^{n-1} \geq 2.3^{2018} \Leftrightarrow n-1 \geq 2018 \Leftrightarrow n \geq 2019.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất thỏa mãn là 2019.

Câu 3: Một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong ống nghiệm, cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Nếu ban đầu có 200 vi khuẩn, tính số lượng vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 2 giờ.



Lời giải

Ta có: 2 giờ = 120 phút = 6.20 phút. Do đó sau 2 giờ vi khuẩn phân đôi 6 lần.

Gọi u_n là số lượng vi khuẩn có trong ống nghiệm sau lần phân đôi thứ $n-1$.

Khi đó, dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_1 = 200$ và $q = 2$.

Ta có $u_7 = u_1.q^6 = 200.2^6 = 12800$. Vậy sau 2 giờ, trong ống nghiệm có 12800 vi khuẩn.

Câu 4: Một khay nước có nhiệt độ 20°C được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Cho biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước đã giảm đi 25%. Tính nhiệt độ khay nước đó sau 4 giờ.

Lời giải

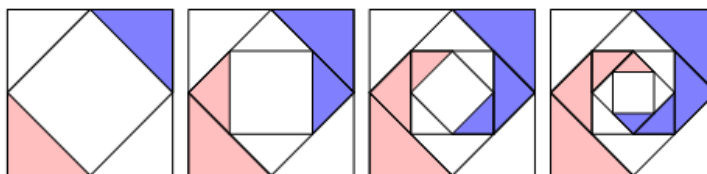
Ta có: $u_5 = u_1.q^4 = 20.0.75^4 \approx 6,33^\circ\text{C}$.

Câu 5: Một tháp 10 tầng có diện tích sàn của tầng dưới cùng là 6144m^2 . Tính diện tích mặt sàn tầng trên cùng biết rằng diện tích mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt sàn tầng ngay bên dưới.

Lời giải

Ta có: $u_{10} = u_1.q^9 = 6144.\left(\frac{1}{2}\right)^9 = 12(\text{m}^2)$.

Câu 6: Các cạnh của hình vuông ban đầu có chiều dài 16 cm. Một hình vuông nhỏ được hình thành bằng cách nối các điểm giữa của các cạnh của hình vuông ban đầu và hai trong số các hình tam giác kết quả được tô màu (hình vẽ dưới). Nếu quá trình này được lặp lại năm lần nữa, hãy xác định tổng diện tích của vùng được tô màu.



Lời giải

Tư vấn hướng nghiệp cho học sinh bằng phân tích nhân tướng học – xem chỉ tay – tử vi

Gọi u_n là diện tích hai tam giác được tô màu ở lần thực hiện thứ n . Gọi a là độ dài cạnh của hình vuông ban đầu.

Ở lần 1 thì độ dài cạnh tam giác vuông cân là $\frac{a}{2}$ nên $u_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}$

và độ dài cạnh hình vuông sau đó là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ở lần 2 thì độ dài cạnh tam giác vuông cân là $\frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $u_2 = \frac{a^2}{2^3}$.

Ở lần 3 thì độ dài cạnh tam giác vuông cân là $\frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $u_3 = \frac{a^2}{2^4}$.

Như vậy, dãy số (u_n) là cấp số nhân với $u_1 = \frac{a^2}{4}$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Vậy tổng diện tích sau năm lần thực hiện là $S_5 = u_1 \frac{1-q^5}{1-q} = 124 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Câu 7: Mặt sàn tầng một (tầng trệt) của một ngôi nhà cao hơn mặt sân 0,5 m. Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai gồm 25 bậc, mỗi bậc cao 16 cm. Viết công thức để tìm độ cao của bậc cầu thang thứ n so với mặt sân và tính độ cao của sàn tầng hai so với mặt sân.

Lời giải

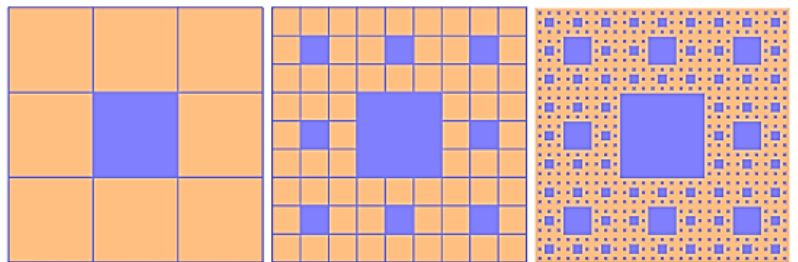
Mỗi bậc thang cao 16 cm = 0,16 m $\Rightarrow n$ bậc thang cao 0,16n(m)

Vì mặt bằng sàn cao hơn mặt sân 0,5 m nên công thức tính độ cao của bậc n so với mặt sân sẽ là: $h_n = (0,5 + 0,16n)(\text{m})$.

Khi đó độ cao của sàn tầng hai so với mặt sân ứng với $n = 25$ là:

$$h_{25} = 0,5 + 0,16 \cdot 25 = 4,5 \text{ (m)}$$

Câu 8: Một hình vuông màu vàng có cạnh 1 đơn vị dài được chia thành chín hình vuông nhỏ hơn và hình vuông ở chính giữa được tô màu xanh như hình dưới đây. Mỗi hình vuông màu vàng nhỏ hơn lại được chia thành chín hình vuông con, và mỗi hình vuông con ở chính giữa lại được tô màu xanh. Nếu quá trình này được tiếp tục lặp lại năm lần, thì tổng diện tích các hình vuông được tô màu xanh bao nhiêu?



Lời giải

Diện tích ô vuông màu xanh sau lần phân chia thứ nhất là: $\frac{1}{9}$, số ô vuông màu xanh được tạo thêm là 8^0 .

Diện tích ô vuông màu xanh sau lần phân chia thứ hai là: $\frac{1}{9^2}$, số ô vuông màu xanh được tạo thêm là 8^1 .

Diện tích ô vuông màu xanh sau lần phân chia thứ năm là: $\frac{1}{9^5}$, số ô vuông màu xanh được tạo thêm là 8^4 .

Tổng diện tích các ô vuông màu xanh là: $\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} \cdot 8^1 + \dots + \frac{1}{9^5} \cdot 8^4 = 0,445$

Câu 9: Một cây đàn organ có tần số âm thanh các phím liên tiếp tạo thành một cấp số nhân. Cho biết tần số phím La Trung là 400 Hz và tần số của phím LaCao cao hơn 12 phím là 800 Hz. Tìm công bội của cấp số nhân nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Lời giải

Ta có: $q^{12} = \frac{800}{400} = 2$ suy ra: $q = 1,06$.

Câu 10: Dân số Việt Nam năm 2020 là khoảng 97,6 triệu người. Nếu trung bình mỗi năm tăng 1,14% thì ước tính dân số Việt Nam năm 2040 là khoảng bao nhiêu người (làm tròn kết quả đến hàng trăm nghìn)?

Lời giải

Ước tính dân số Việt Nam năm 2040 là: $97,6 \cdot (1 + 0,0114)^{20} = 122,4$ (triệu người).

Câu 11: Để tích lũy tiền cho việc học đại học của con gái, cô Hoa quyết định hằng tháng bỏ ra 500 nghìn đồng vào tài khoản tiết kiệm, được trả lãi 0,5% cộng dồn hằng tháng. Có bắt đầu chương trình tích lũy này khi con gái cô tròn 3 tuổi. Cô ấy sẽ tích lũy được bao nhiêu tiền vào thời điểm gửi khoản tiền thứ 180? Lúc này con gái cô Hoa bao nhiêu tuổi?

Lời giải

Gọi u_n là số triệu đồng mà cô Hoa có trong chương trình tích lũy ở lần gửi thứ n (vào đầu tháng thứ n).

Kí hiệu $a = 0,5$ triệu đồng, $r = 0,5\%$.

Số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng 1 là $u_1 = a$.

Số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng 2 là $u_2 = u_1(1+r) + a$.

Số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng 3 là

$$u_3 = u_2(1+r) + a = a(1+r)^2 + a(1+r) + a.$$

Tương tự cho các tháng tiếp theo, suy ra số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng n

$$\text{là: } u_n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \dots + a(1+r) + a = a \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} = a \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Vào thời điểm gửi khoản tiền thứ 180, cô ấy sẽ tích lũy được $u_{180} = a \frac{(1+r)^{180} - 1}{r} = 145,41$ (triệu đồng). Khi đó, tuổi của con gái cô Hoa là $3 + 180 : 12 = 18$ tuổi.

Câu 12: Một loại thuốc được dùng mỗi ngày một lần. Lúc đầu nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân tăng nhanh, nhưng mỗi liều kế tiếp có tác dụng ít hơn liều trước đó. Lượng thuốc trong máu ở ngày thứ nhất là 50mg, và mỗi ngày sau đó giảm chỉ còn một nửa so với ngày kế trước đó. Tính tổng lượng thuốc (tính bằng mg) trong máu của bệnh nhân sau khi dùng thuốc 10 ngày liên tiếp.

Lời giải

Lượng thuốc trong máu mỗi ngày của bệnh nhân lập thành cấp số nhân với số hạng đầu là 50 và công bội $q = 0.5$

Tổng lượng thuốc trong máu 10 ngày liên tiếp chính là tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân

này và bằng:
$$S_n = \frac{50[1 - (0.5)^{10}]}{1 - 0.5} = 99.902(\text{mg})$$

Câu 13: Ban đầu, một quả lắc đồng hồ dao động theo một cung tròn dài 46 cm (H. 2.1). Sau mỗi lần đu liên tiếp, độ dài của cung tròn bằng 0,98 độ dài cung tròn ở ngay lần trước đó. Sau 15 lần dao động, quả lắc sẽ đi được quãng đường tổng cộng là bao nhiêu? (Kết quả tính theo centimét và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

Gọi u_n là độ dài cung tròn ở lần thứ n khi con lắc dao động. Do lần một, quả lắc đồng hồ dao động theo một cung tròn dài 46 cm, sau mỗi lần dao động liên tiếp, độ dài của cung tròn bằng 0,98 độ dài cung tròn ở ngay lần trước đó nên dãy số (u_n) lập thành cấp số nhân có $u_1 = 46$ và công bội $q = 0,98$.

Sau 15 lần dao động, quả lắc sẽ đi được quãng đường tổng cộng là

$$S_{15} = u_1 \frac{1 - q^{15}}{1 - q} = 46 \cdot \frac{1 - 0,98^{15}}{1 - 0,98} \approx 601,29(\text{ cm}).$$

Câu 14: Từ độ cao 55,8m của tháp nghiêng Pisa nước Italia người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt trước đó. Tổng độ dài hành trình của quả bóng được thả từ lúc ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

Lời giải

Gọi h_n là độ dài đường đi của quả bóng ở lần rơi xuống thứ $n (n \in \mathbb{N}^+)$.

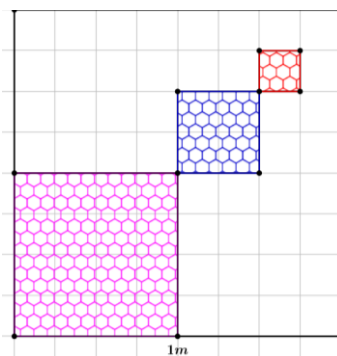
Gọi l_n là độ dài đường đi của quả bóng ở lần nảy lên thứ $n (n \in \mathbb{N}^+)$.

Theo bài ra ta có $h_1 = 55,8$, $l_1 = \frac{1}{10} \cdot 55,8 = 5,58$ và các dãy số (h_n) , (l_n) là các cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{10}$.

Từ đó ta suy ra tổng độ dài đường đi của quả bóng là:

$$S = \frac{h_1}{1 - \frac{1}{10}} + \frac{l_1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}(h_1 + l_1) = 68,2(m).$$

Câu 15: Để trang trí cho quán trà sữa sắp mở cửa của mình, bạn Việt quyết định tô màu một mảng tường hình vuông cạnh bằng 1m. Phần tô màu dự kiến là các hình vuông nhỏ được đánh số lần lượt là $1, 2, 3, \dots, n, \dots$, trong đó cạnh của hình vuông kế tiếp bằng một nửa cạnh hình vuông trước đó. Giả sử quá trình tô màu của Việt có thể diễn ra nhiều giờ. Hỏi bạn Việt tô màu đến hình vuông thứ mấy thì diện tích của hình vuông được tô bắt đầu nhỏ hơn $\frac{1}{1000} (m^2)$?



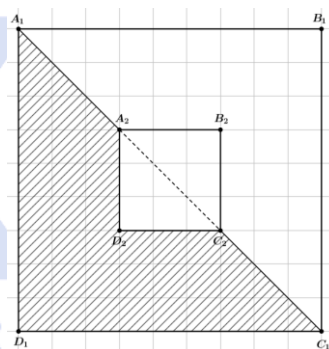
Lời giải

Diện tích của hình vuông lập thành cấp số nhân với số hạng đầu tiên là $u_1 = \frac{1}{4}, q = \frac{1}{4}$.

Do đó số hạng tổng quát là $u_n = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{4^n} (n \geq 1)$. Để diện tích của hình vuông tô màu nhỏ hơn $\frac{1}{1000} \Leftrightarrow \frac{1}{4^n} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow 4^n > 1000 \Rightarrow n \geq 5$.

Vậy tô màu từ hình vuông thứ 5 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 16: Với hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ như hình vẽ bên, cách tô màu như phần gạch sọc được gọi là cách tô màu “đẹp”. Một nhà thiết kế tiến hành tô màu cho một hình vuông như hình bên, theo quy trình sau:



Bước 1: Tô màu “đẹp” cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$.

Bước 2: Tô màu “đẹp” cho hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ thành 9 phần bằng nhau như hình vẽ.

Bước 3: Tô màu “đẹp” cho hình vuông $A_3B_3C_3D_3$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ thành 9 phần bằng nhau. Cứ tiếp tục như vậy. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu bước để tổng diện tích phần được tô màu chiếm 49,99%.

Lời giải

Gọi diện tích được tô màu ở mỗi bước là $u_n, n \in \mathbb{N}^+$. Dễ thấy dãy các giá trị u_n là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = \frac{4}{9}$ và công bội $q = \frac{1}{9}$.

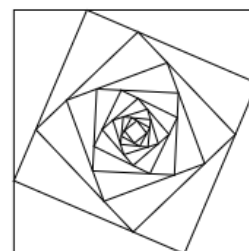
Gọi S_k là tổng của k số hạng đầu trong cấp số nhân đang xét thì $S_k = \frac{u_1(q^k - 1)}{q - 1}$.

Để tổng diện tích phần được tô màu chiếm 49,99% thì $\frac{u_1(q^k - 1)}{q - 1} \geq 0,4999 \Leftrightarrow k \geq 3,8$.

Vậy cần ít nhất 4 bước.

Câu 17: Cho hình vuông (C_1) có cạnh bằng a . Người ta chia mỗi cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông (C_2) .

Từ hình vuông (C_2) lại tiếp tục làm như trên ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$. Gọi S_i là diện tích của hình vuông C_i ($i \in \{1, 2, 3, \dots\}$). Đặt $T = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots$. Biết $T = \frac{32}{3}$. Tính a ?



Lời giải

Cạnh của hình vuông (C_2) là: $a_2 = \sqrt{\left(\frac{3}{4}a\right)^2 + \left(\frac{1}{4}a\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$. Do đó diện tích $S_2 = \frac{5}{8}a^2$
 $= \frac{5}{8}S_1$

Cạnh của hình vuông (C_3) là: $a_3 = \sqrt{\left(\frac{3}{4}a_2\right)^2 + \left(\frac{1}{4}a_2\right)^2} = \frac{a_2\sqrt{10}}{4} = a\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2$. Do đó diện tích

$S_3 = \left(\frac{5}{8}\right)^2 a^2 = \frac{5}{8}S_2$. Lý luận tương tự ta có các $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ tạo thành một dãy cấp số

nhân lùi vô hạn có $u_1 = S_1$ và công bội $q = \frac{5}{8}$.

Khi đó: $T = \frac{S_1}{1-q} = \frac{8a^2}{3}$. Với $T = \frac{32}{3}$ ta có $a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2$.

