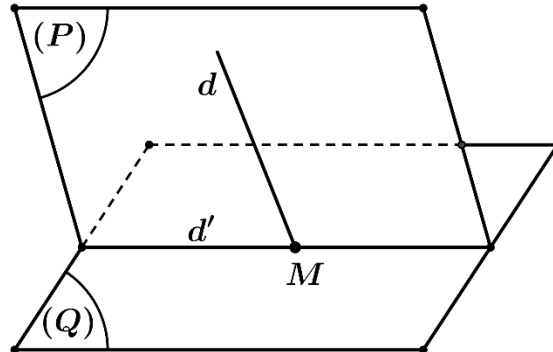


Dạng 2: Xác định giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp: Để tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) ta cần lưu ý một số trường hợp sau:



Trường hợp 1: Nếu trong (P) có sẵn một đường thẳng d' cắt d tại M , khi đó:

$$\begin{cases} M \in d \\ M \in d' \subset (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M \in d \\ M \in (P) \end{cases} \Rightarrow M = d \cap (P)$$

Trường hợp 2: Nếu trong (P) chưa có sẵn d' cắt d thì ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1:** Chọn một mặt phẳng (Q) chứa d
- **Bước 2:** Tìm giao tuyến $\Delta = (P) \cap (Q)$
- **Bước 3:** Trong (Q) gọi $M = d \cap \Delta$ thì M chính là giao điểm của $d \cap (P)$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho tứ giác $ABCD$ (không có cặp cạnh đối nào song song) nằm trong mặt phẳng (α) . S là điểm không nằm trên (α) .

- Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng: (SAC) và (SBD) , (SAB) và (SCD) .
- Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SC và SD . Tìm giao điểm P của đường thẳng BN với mặt phẳng (SAC) .
- Gọi Q và R lần lượt là trung điểm của SA và SB . Chứng minh rằng bốn điểm M, N, Q, R đồng phẳng.

Lời giải

- Giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và (SBD) : Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD .

Ta có:
$$\begin{cases} S \in (SAC) \\ S \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow S \in (SAC) \cap (SBD) \quad (1)$$

Từ (1) suy ra S là điểm chung thứ nhất của (SAC) và (SBD)

$$\left. \begin{array}{l} O \in AC \\ AC \subset (SAC) \end{array} \right\} \Rightarrow O \in (SAC) \quad \left. \begin{array}{l} O \in BD \\ BD \subset (SBD) \end{array} \right\} \Rightarrow O \in (SBD) \quad \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD) \quad (2)$$

Từ (2) suy ra O là điểm chung thứ hai của (SAC) và (SBD) .

Vậy $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

Giao tuyến của (SAB) và (SCD) : Gọi E là giao điểm của AB và CD . Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} S \in (SAB) \\ S \in (SCD) \end{array} \right\} \Rightarrow S \in (SAB) \cap (SCD) \quad (3)$$

Từ (3) suy ra S là điểm chung thứ nhất của (SAB) và (SCD) .

$$\left. \begin{array}{l} E \in AB \\ AB \subset (SAB) \end{array} \right\} \Rightarrow E \in (SAB) \quad \left. \begin{array}{l} E \in CD \\ CD \subset (SCD) \end{array} \right\} \Rightarrow E \in (SCD) \quad \Rightarrow E \in (SAB) \cap (SCD) \quad (4)$$

Từ (4) suy ra E là điểm chung thứ hai của (SAB) và (SCD) .

Vậy $SE = (SAB) \cap (SCD)$.

b) Trong (SBD) , hai đường thẳng SO, BN cắt nhau tại P , ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} P \in BN \\ P \in SO \subset (SAC) \end{array} \right\} \Rightarrow P \in (SAC) \Rightarrow P \text{ là giao điểm của } BN \text{ và } (SAC).$$

Vậy P là giao điểm cần tìm.

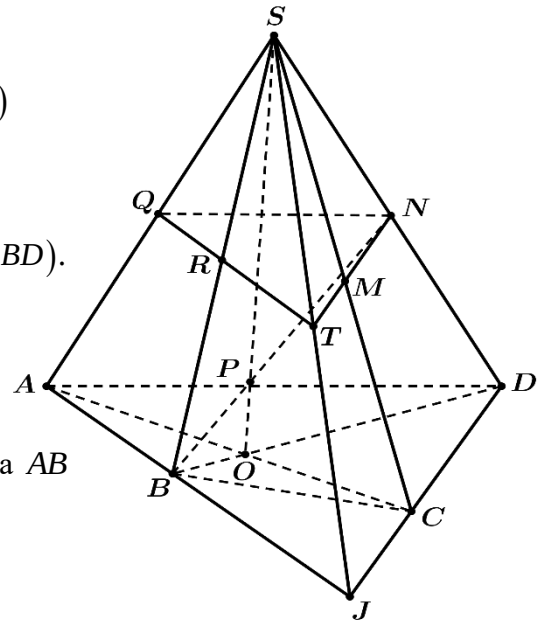
c) Chứng minh bốn điểm M, N, Q, R đồng phẳng:

Trong (SCD) , gọi T là giao điểm của MN và SE . Ta có MN là đường trung bình của tam giác SCD nên $MN \parallel CD$. Xét tam giác SDE , ta có:

$$\left. \begin{array}{l} M \parallel CD \\ N \text{ là trung điểm của } SD \end{array} \right\} \Rightarrow T \text{ là trung điểm của } SE.$$

Tương tự, QR là đường trung bình của tam giác SAB nên $QR \parallel AB$. Xét tam giác SAE , ta có:

$$\left. \begin{array}{l} QR \parallel AB \\ Q \text{ là trung điểm của } SA \end{array} \right\} \Rightarrow QR \text{ đi qua trung điểm } T \text{ của } SE.$$



Tư vấn hướng nghiệp cho học sinh bằng phân tích nhân tướng học – xem chỉ tay – tử vi

Như vậy, bốn điểm M, N, Q, R nằm trong mặt phẳng tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau TN và TQ nên chúng đồng phẳng.

Bài tập 2: Trong mặt phẳng (α) , cho tứ giác $ABCD$. Gọi S là điểm không thuộc (α) , M là điểm nằm trong tam giác SCD .

- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAM) và (SBD) .
- Xác định giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD) .

Lời giải

- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAM) và (SBD) :

Gọi N là giao điểm của SM và CD , gọi E là giao điểm của AN và BD .

Rõ ràng $(SAM) \equiv (SAN)$. Ta có:

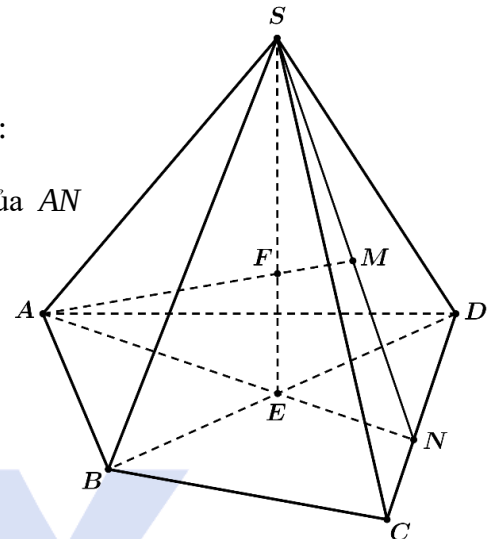
$$\left. \begin{array}{l} E \in AN \Rightarrow E \in (SAM) \\ E \in BD \Rightarrow E \in (SBD) \end{array} \right\} \Rightarrow E \in (SAM) \cap (SBD) \quad (1)$$

Mặt khác: $S \in (SAM) \cap (SBD) \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $SE = (SAM) \cap (SBD)$.

- Xác định giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD) . Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (SAM) \supset AM \\ (SAM) \cap (SBD) = SE \\ F \in AM \cap SE \subset (SAM) \end{array} \right\} \Rightarrow F = AM \cap (SBD)$$



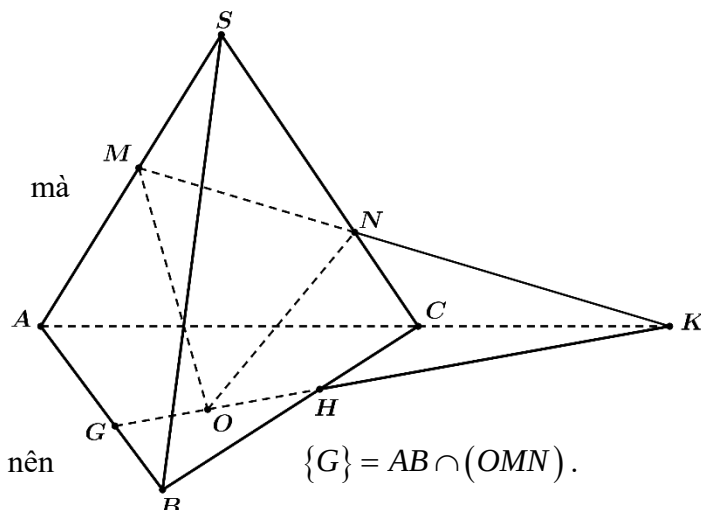
Bài tập 3: Cho tứ diện $SABC$. Trên cạnh SA lấy điểm M , trên cạnh SC lấy điểm N , sao cho MN không song song với AC . Cho điểm O nằm trong tam giác ABC . Tìm giao điểm của mặt phẳng (OMN) với các đường thẳng AC, BC và AB .

Lời giải

Trong mặt phẳng (SAC) : $MN \cap AC = \{K\}$ mà $MN \subset (OMN)$ nên $\{K\} = AC \cap (OMN)$.

Trong mặt phẳng (ABC) : $OK \cap BC = \{H\}$, mà $OK \subset (OMN)$ nên $\{H\} = BC \cap (OMN)$.

Ta có: $OK \cap AB = \{G\}$, mà $OK \subset (OMN)$ nên $\{G\} = AB \cap (OMN)$.



Bài tập 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$. Gọi E và F là hai điểm lần lượt nằm trên hai cạnh SB và CD .

- Tìm giao điểm của EF với mặt phẳng (SAC) .
- Tìm giao điểm của mặt phẳng (AEF) với các đường thẳng BC và SC .

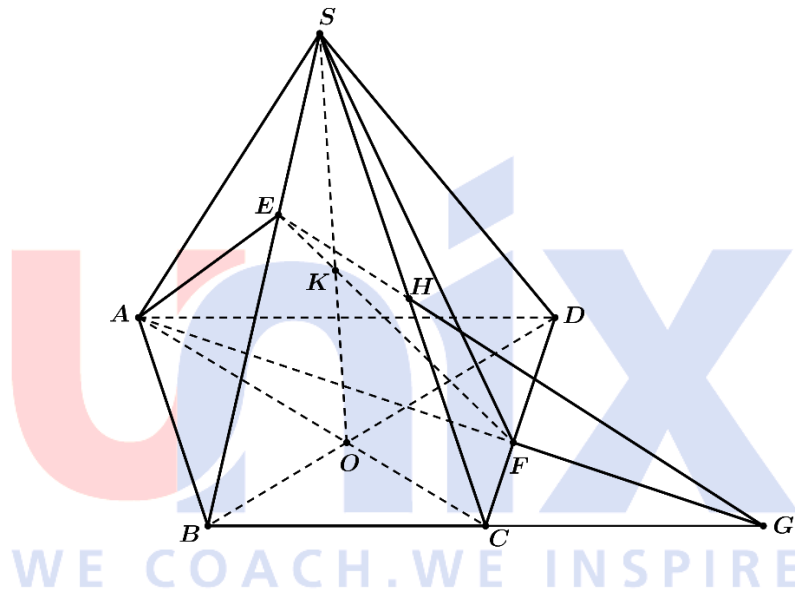
Lời giải

- a) Ta có $EF \subset (SBF)$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$: $BF \cap AC = \{O\}$ suy ra $(SAC) \cap (SBF) = SO$.

Trong mặt phẳng (SBF) $EF \cap SO = \{K\}$ mà $SO \subset (SAC)$ suy ra $\{K\} = EF \cap (SAC)$.

- b) Trong mặt phẳng $(ABCD)$: $AF \cap BC = \{G\}$ mà $AF \subset (AEF)$ suy ra $\{G\} = BC \cap (AEF)$.



Khi đó: $(AEF) \equiv (AEG)$.

Trong mặt phẳng (SBC) : $EG \cap SC = \{H\}$ mà $EG \subset (AEF)$ suy ra $\{H\} = SC \cap (AEF)$.

Bài tập 5: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ có AD và BC không song song với nhau. Lấy I thuộc SA sao cho $SA = 3IA$, J thuộc SC và M là trung điểm của SB .

- Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC)
- Tìm giao điểm E của AB và (IJM)
- Tìm giao điểm F của BC và (IJM)
- Tìm giao điểm N của SD và (IJM)
- Gọi H là giao điểm của MN và BD . Chứng minh rằng H, E, F thẳng hàng.

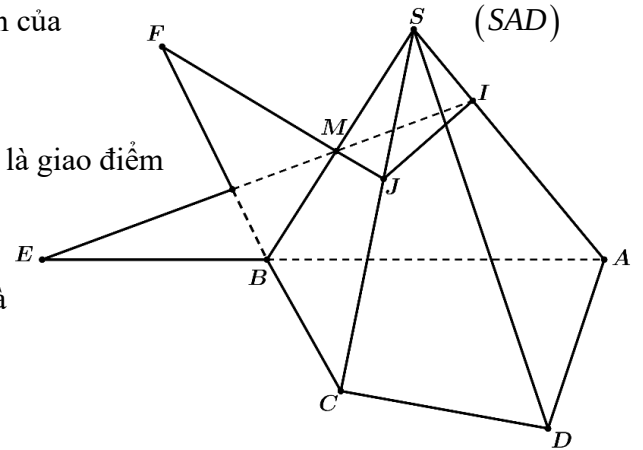
Lời giải

a) O là giao điểm của SA và BC nên SO là giao tuyến của (SAB) và (SBC) .

b) Trong (SAB) kẻ IM giao với AB tại E nên E là giao điểm của AB và (IJM) .

c) Trong (SBC) : MJ giao với BC tại F nên F là giao điểm của BC và (IJM) .

d) Trong $(ABCD)$: EF giao với AD tại P .



Trong (SAD) : IP giao với SD tại N nên N là giao điểm của SD và (IJM) .

e) H là giao điểm của MN và BD . Dễ thấy 3 điểm H, E, F đồng thời nằm trên hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (IJM) nên 3 điểm này thuộc giao tuyến của 2 mặt phẳng trên hay 3 điểm đó thẳng hàng. $S.ABCD$

Bài tập 6: Cho hình chóp, có đáy là hình thang, cạnh đáy lớn AB . Gọi I, J, K là ba điểm lần lượt trên SA, AB, BC .

a) Tìm giao điểm của IK và (SBD) .

b) Tìm giao điểm của mặt phẳng (IJK) với SD và SC .

Lời giải

a) Trong $(ABCD)$ có BD giao AK tại M .

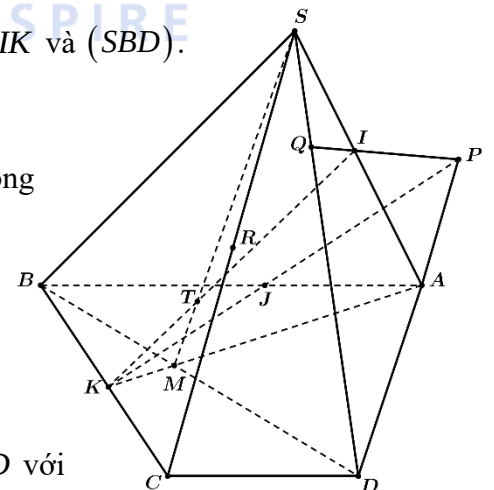
Trong (SAK) có SM giao IK tại $T \Rightarrow T$ là giao điểm của IK và (SBD) .

b) Lấy R là trung điểm của SC .

Dễ dàng chứng minh được RK và IJ song song với nhau (song song và bằng $\frac{BD}{2}$) nên $R \in (IKJ) \Rightarrow R$ là giao điểm của SC với mp (IJK) .

Trong $(ABCD)$ có KJ cắt AD tại P .

Trong (SAD) có IP cắt SD tại $Q \Rightarrow Q$ là giao điểm của SD với mp (IJK) .



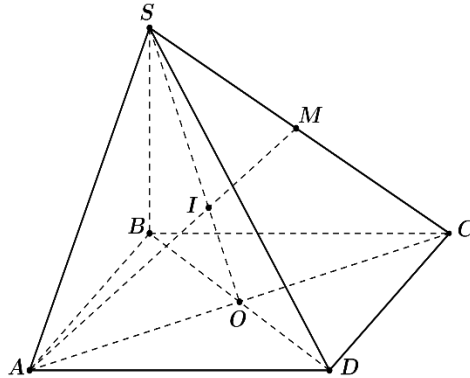
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, giao điểm của BD và AC là O . Gọi M là trung điểm của SC . Gọi I là giao điểm của AM với mặt phẳng (SBD) . Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A.** $I \in SO$. **B.** $I \in SC$. **C.** $I \in (SBD)$. **D.** $I \in (SAC)$.

Lời giải



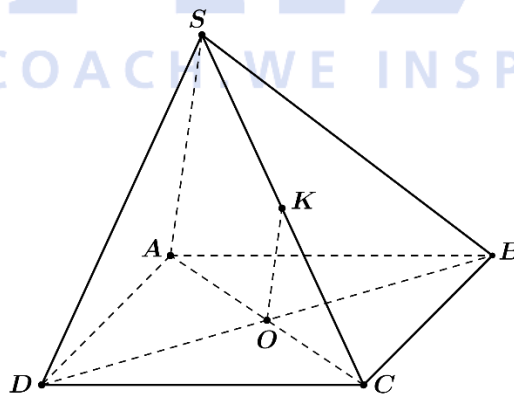
Trong (SAC) , gọi $I = AM \cap SO$, mà $SO \subset (SBD) \Rightarrow I = AM \cap (SBD)$.

Vậy I là giao điểm của AM với mặt phẳng $(SBD) \Rightarrow I \in SO$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (α) qua BD và song song với SA , mặt phẳng (α) cắt SC tại K . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A.** $SK = 3KC$. **B.** $SK = KC$. **C.** $SK = \frac{1}{2}KC$. **D.** $SK = 2KC$.

Lời giải



Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$, khi đó O là một điểm chung của mặt phẳng (α) và mặt phẳng (SAC) .

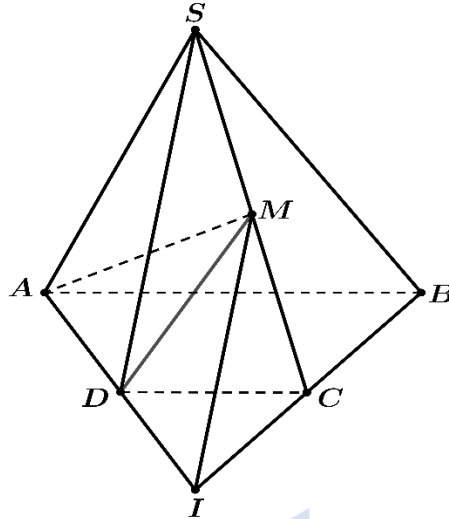
Mặt khác SA song song với mặt phẳng (α) nên giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt phẳng (SAC) là đường thẳng d đi qua O và song song với SA .

Trong mặt phẳng (SAC) : d song song với SA và cắt SC tại K , suy ra OK là đường trung bình của tam giác SAC nên K là trung điểm của SC . Vậy $SK = KC$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có đáy lớn AB . Gọi M là trung điểm của SC . Giao điểm của BC với mặt phẳng (ADM) là:

- A.** Giao điểm của BC và AD . **B.** Giao điểm của BC và SD .
C. Giao điểm của BC và AM . **D.** Giao điểm của BC và DM

Lời giải



Gọi I là giao điểm của AD và BC . Khi đó: $\begin{cases} I \in AD \\ AD \subset (ADM) \end{cases} \Rightarrow I \in (ADM)$

Vậy $I = BC \cap (ADM)$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC . M là điểm thuộc cạnh AD sao cho $\frac{AM}{AD} = \frac{3}{4}$. Gọi E là trung điểm của cạnh SA , F là giao điểm của MN và BD . Tìm giao điểm của đường thẳng MG và (BDE) .

- A.** Giao điểm của MG và HF **B.** Giao điểm của BC và SD .
C. Giao điểm của BG và AM . **D.** Giao điểm của BC và DM

Lời giải

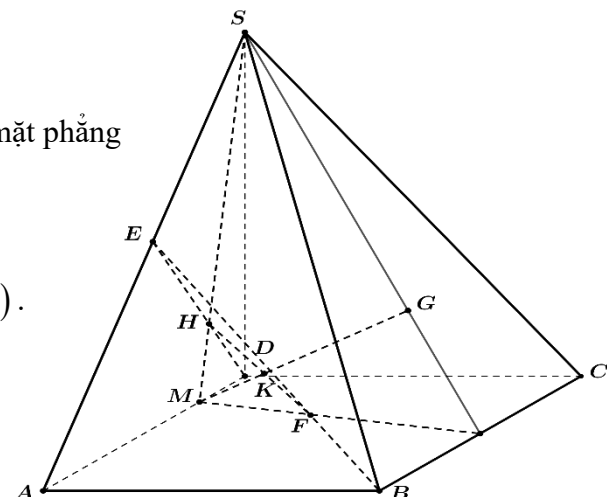
Gọi N là trung điểm của BC .

Trong mặt phẳng (SAD) gọi $H = SM \cap ED$ và trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $F = MN \cap BD$.

Ta có: $\begin{cases} H \in SM \subset (SMN) \\ H \in ED \subset (BDE) \end{cases} \Rightarrow H \in (SMN) \cap (BDE) \quad (1).$

$\begin{cases} F \in MN \subset (SMN) \\ F \in BD \subset (BDE) \end{cases} \Rightarrow F \in (SMN) \cap (BDE) \quad (2).$

Từ (1) và (2) ta có $HF = (SMN) \cap (BDE)$.



Trong mặt phẳng (SMN) gọi $K = MG \cap HF$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} K \in MG \\ K \in HF \subset (BDE) \end{cases} \Rightarrow K = MG \cap (BDE).$$

Vậy K là giao điểm của đường thẳng MG và (BDE) .

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm trên các đoạn SA, SB, SC sao cho $SA = 5SM, SB = 3SN, 2SC = 3SP$. Mặt phẳng (MNP) cắt đoạn SD tại điểm Q . Khi đó tỉ số $\frac{SD}{SQ}$ bằng

A. $\frac{7}{2}$.

B. $\frac{13}{2}$.

C. $\frac{15}{8}$.

D. $\frac{8}{15}$.

Lời giải

Gọi O là trung điểm của AC và $SO \cap MP$ tại I . Ta kẻ $\begin{cases} AE \parallel MP \\ CH \parallel MP \end{cases}$

Hai tam giác $\triangle OEA = \triangle OHC$ (g.c.g) $\Rightarrow OE = OH$

Theo định lí Talet ta có: $\frac{SM}{SA} = \frac{SI}{SE} = \frac{SI}{SO + OE}$;

$$\frac{SP}{SC} = \frac{SI}{SH} = \frac{SI}{SO - OH}$$

$$\text{Suy ra } \frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SP} = \frac{SO}{SI} + \frac{OE}{SI} + \frac{SO}{SI} - \frac{OH}{SI} = 2 \frac{SO}{SI} \quad (1)$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có: } \frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SQ} = 2 \frac{SO}{SI} \quad (2)$$

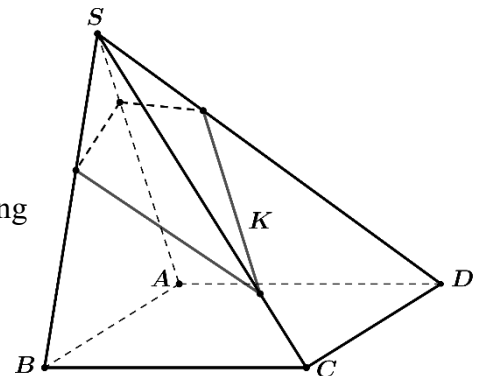
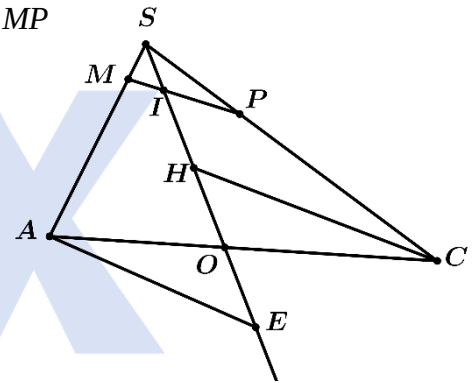
$$\text{Từ (1) và (2) ta được: } \frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SP} = \frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SQ}$$

$$\text{Từ giả thiết ta có: } \frac{SA}{SM} = 5; \frac{SB}{SN} = 3; \frac{SC}{SP} = \frac{3}{2}.$$

4 điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng, nên ta có đẳng

$$\text{thức: } \frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SP} = \frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SQ}$$

$$\Leftrightarrow \frac{SD}{SQ} = \frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SP} - \frac{SB}{SN} = 5 + \frac{3}{2} - 3 = \frac{7}{2}.$$



Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm thuộc đoạn SD , N là trọng tâm $\triangle SAB$. Đường thẳng MN cắt mặt phẳng $(ABCD)$ tại điểm I sao cho $\frac{IN}{IM} = \frac{2}{3}$.

Tính tỉ số $\frac{SM}{MD}$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{3}{4}$.

C. 1.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Gọi K là trung điểm của AB . Theo tính chất trọng tâm tam giác SAB ta có:

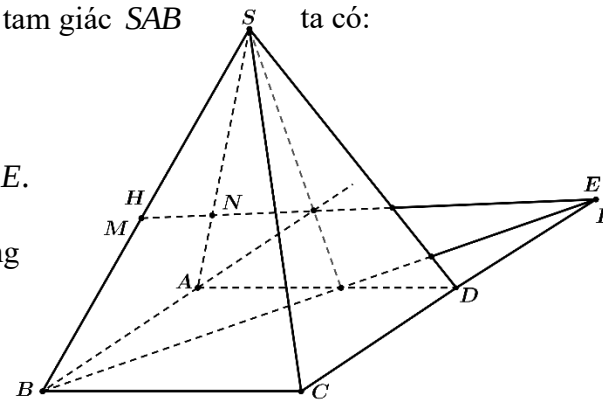
$$\frac{SN}{SK} = \frac{2}{3} \quad (1).$$

Trong mặt phẳng (SDK) , kéo dài DK cắt BC tại điểm E .

Xét tam giác $\triangle SDE$ ta có: EH và SK là hai đường trung tuyến của tam giác (2) .

Từ (1) và (2) ta suy ra N là trọng tâm tam giác $\triangle SDE \Rightarrow H, N, E$ thẳng hàng.

Mặt khác: $\frac{IN}{IM} = \frac{2}{3} \Rightarrow M \equiv H$ và $I \equiv E \Rightarrow M$ là trung điểm $SD \Rightarrow \frac{SM}{MD} = 1$.



Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD ; P là điểm trên cạnh AD sao cho $AP = \frac{1}{4}AD$. Biết mặt phẳng (MNP) cắt BD tại I . Tỉ số $\frac{IB}{ID}$ bằng:

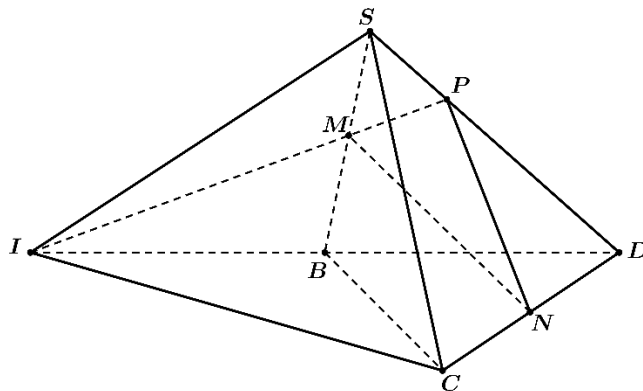
A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{3}{10}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{2}{5}$.

Lời giải



Theo định lý Menelaus ta có: $\frac{PA}{PD} \cdot \frac{ID}{IB} \cdot \frac{MB}{MA} = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{ID}{IB} \cdot \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \frac{ID}{IB} = 3 \Rightarrow \frac{IB}{ID} = \frac{1}{3}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SB . P là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SP = 2DP$. Mặt phẳng (AMP) cắt SC tại N . Tỉ số $\frac{CN}{SN}$ bằng

- A.** $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{8}{5}$. **D.** $\frac{7}{5}$.

Lời giải

Gọi $O = AC \cap BD$; $I = SO \cap MP$; $N = AI \cap SC$ suy ra $N = (AMP) \cap SC$.

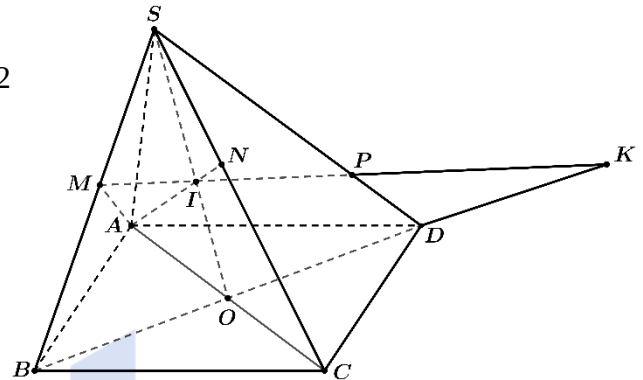
Gọi $K = BD \cap MP$. Xét tam giác SBK có
 $\frac{MS}{MB} \cdot \frac{KB}{KD} \cdot \frac{PD}{PS} = 1 \Leftrightarrow 1 \cdot \frac{KB}{KD} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{KB}{KD} = 2$

Và

$$\frac{IS}{IO} \cdot \frac{KO}{KB} \cdot \frac{MB}{MS} = 1 \Leftrightarrow \frac{IS}{IO} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1} = 1 \Leftrightarrow \frac{IS}{IO} = \frac{4}{3}$$

Xét tam giác SAC có

$$\frac{NC}{NS} \cdot \frac{IS}{IO} \cdot \frac{AO}{AC} = 1 \Leftrightarrow \frac{NC}{NS} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{NC}{NS} = \frac{3}{2}$$



Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC và G là trung điểm của đoạn MN . Gọi O là giao điểm của SG và (ABC) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
B. O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .
C. O là trực tâm tam giác ABC .
D. O là trọng tâm tam giác ABC .

Lời giải

Mặt phẳng (SAN) cắt mặt phẳng (ABC) theo giao tuyến AN .

Mà $SG \subset (SAN)$ suy ra SG cắt AN tại điểm O .

Qua M dựng $MI \parallel SO$ với $M \in AN$.

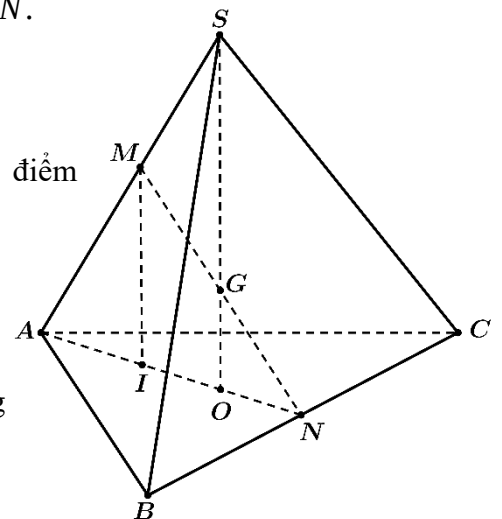
Có M là trung điểm của SA suy ra I là trung điểm $AO \Rightarrow AI = IO$ (1).

Tam giác MNI có $MI \parallel GO$ và G là trung điểm của MN .

Suy ra, O là trung điểm của $IN \Rightarrow IO = NO$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $AI = IO_1 = ON \Rightarrow \frac{AO}{AN} = \frac{2}{3}$ mà N là trung điểm của BC .

Do đó, O là trọng tâm của tam giác ABC .



Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm của SB

Tư vấn hướng nghiệp cho học sinh bằng phân tích nhân tướng học – xem chỉ tay – tử vi

. Đường thẳng DM cắt mặt phẳng (SAC) tại N . Mặt phẳng (CDM) cắt SA tại K . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Ba điểm S, N, O thẳng hàng.

B. Ba điểm C, N, K thẳng hàng.

C. $KM // CD$.

D. N là trung điểm của đoạn thẳng CK .

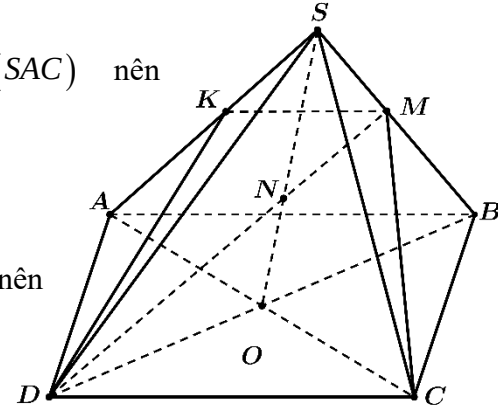
Lời giải

Trong mặt phẳng (SBD) , $DM \cap SO = N$ mà $SO \subset (SAC)$ nên $DM \cap (SAC) = N$.

Vậy ba điểm S, N, O thẳng hàng.

Trong mp (SAC) , $CN \cap SA = K$. Mà $CN \subset (CDM)$ nên $SA \cap (CDM) = K$.

Vậy ba điểm C, N, K thẳng hàng.



Ta có N là trọng tâm $\triangle SBD$ nên $\frac{SN}{SO} = \frac{2}{3}$. Mà $\triangle SAC$ có đường trung tuyến SO và $\frac{SN}{SO} = \frac{2}{3}$ nên N là trọng tâm $\triangle SAC$.

Vậy K là trung điểm của SA do đó $KM // AB // CD$.

Vì N là trọng tâm $\triangle SAC$ nên $\frac{CN}{CK} = \frac{2}{3}$. Do đó N không phải là trung điểm của đoạn thẳng CK .

Ngoài ra, ta có thể lập luận giao tuyến của (CDM) và (SAB) là đường thẳng đi qua M và song song với AB, CD , đường thẳng này cắt SA tại K .

Do đó suy ra $KM // AB // CD$ và K là trung điểm của SA .

Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm tam giác BCD , M là trung điểm CD , I là điểm trên đoạn thẳng AG , BI cắt mặt phẳng (ACD) tại J . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. J là trung điểm AM .

B. $AJ = (ABG) \cap (ACD)$.

C. $DJ = (BDJ) \cap (ACD)$.

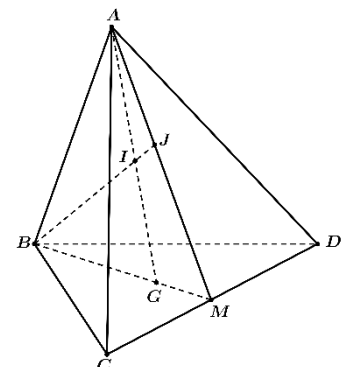
D. A, J, M thẳng hàng.

Lời giải

Vì I di chuyển trên AG nên J cũng di chuyển trên AM .

Ta có: A là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (ACD) và (GAB) .

Do $BG \cap CD = \{M\} \Rightarrow \begin{cases} M \in BG \subset (ABG) \Rightarrow M \in (ABG) \\ M \in CD \subset (ACD) \Rightarrow M \in (ACD) \end{cases}$



$\Rightarrow M$ là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (ACD) và (GAB) .

$\Rightarrow AM = (ACD) \cap (GAB)$ hay $AJ = (ABG) \cap (ACD)$.

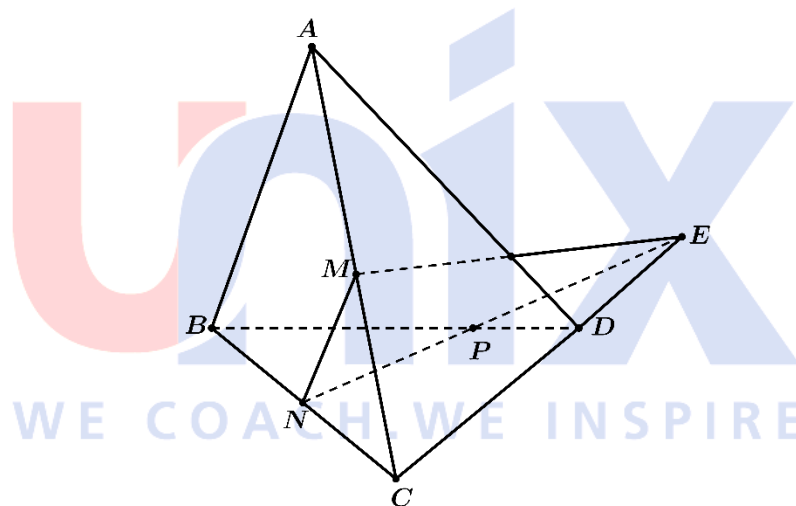
$\begin{cases} DJ \subset (ACD) \\ DJ \subset (BDJ) \end{cases} \Rightarrow DJ = (BDJ) \cap (ACD)$.

$\begin{cases} BI \subset (ABG) \\ AM \subset (ABM) \\ (ABM) \equiv (ABG) \end{cases} \Rightarrow AM, BI \text{ đồng phẳng} \Rightarrow J = BI \cap AM \Rightarrow A, J, M \text{ thẳng hàng}.$

Câu 12: Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của

- A. CD và NP . B. CD và MN . C. CD và MP . D. CD và AP .

Lời giải



Ta có $\begin{cases} N \in BC \\ P \in BD \end{cases} \Rightarrow NP \subset (BCD)$ suy ra NP, CD đồng phẳng

Gọi E là giao điểm của NP và CD mà $NP \subset (MNP) \Rightarrow CD \cap (MNP) = E$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho tứ giác $ABCD$ có AC và BD giao nhau tại O và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn SC lấy một điểm M không trùng với S và $C, K = AM \cap SO$. Khi đó:

- SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (ABC)
- SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD)
- Giao điểm của đường thẳng SO với mặt phẳng (ABM) là điểm K

d) Giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM) là điểm N thuộc đường thẳng AK

Lời giải

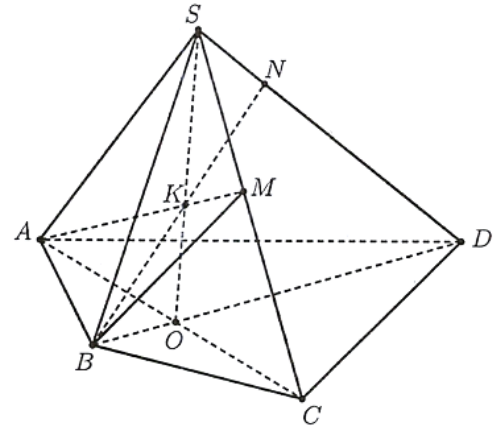
a) Sai: SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC)

và (ABC)

b) Đúng: SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD)

c) Đúng: Tìm giao điểm của SO và (ABM) . Trong mặt phẳng (SAC) gọi $K = AM \cap SO$.

$$\forall \begin{cases} K \in AM, AM \subset (ABM) \\ K \in SO \end{cases} \Rightarrow K = SO \cap (ABM).$$



d) Sai: Tìm giao điểm của SD và (ABM) . Xét mặt phẳng phụ (SBD) chứa SD .

Dễ thấy B là điểm chung của hai mặt phẳng (SBD) và (ABM) .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} K \in AM, AM \subset (ABM) \\ K \in SO, SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow K \in (SBD) \cap (ABM) \text{ do đó } BK = (SBD) \cap (ABM).$$

Trong mặt phẳng (SBD) gọi $N = BK \cap SD$.

$$\text{Do } \begin{cases} N \in SD \\ N \in BK, BK \subset (ABM) \end{cases} \Rightarrow N = SD \cap (ABM).$$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ với M là một điểm trên cạnh SC , N là một điểm trên cạnh BC . Gọi $O = AC \cap BD$ và $K = AN \cap CD$. Khi đó:

a) SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

b) Giao điểm của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD) là điểm nằm trên cạnh SO .

c) KM là giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (SCD) .

d) Giao điểm của đường thẳng SD và mặt phẳng (AMN) là điểm nằm trên cạnh KM

Lời giải

a) Đúng: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) :

Dễ thấy S là điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$.

Vì $\begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \\ O \in BD, BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$. Vậy
 $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

b) Đúng: Tìm giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD) :

Trong mặt phẳng (SAC) , gọi $P = AM \cap SO$.

Ta có: $\begin{cases} P \in AM \\ P \in SO, SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow P = AM \cap (SBD)$.

c) Đúng: Xét mặt phẳng phụ (SCD) chứa SD . Ta tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (SCD) .

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $K = AN \cap CD$.

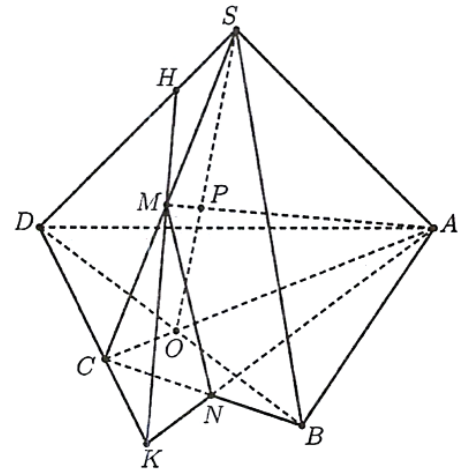
Khi đó: $\begin{cases} K \in AN, AN \subset (AMN) \\ K \in CD, CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow K \in (AMN) \cap (SCD)$.

Mặt khác: $M \in SC, SC \subset (SCD) \Rightarrow M \in (SCD) \Rightarrow M \in (SCD) \cap (AMN)$.

Vậy $KM = (SCD) \cap (AMN)$.

d) Đúng: Trong mặt phẳng (SCD) gọi $H = KM \cap SD$.

Ta có: $\begin{cases} H \in SD \\ H \in KM, KM \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow H = SD \cap (AMN)$.



Câu 3: Cho hình bình hành $ABCD$ và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$, các điểm M, N lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AB, SC . Gọi $O = AC \cap BD$

a) SO giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

b) Giao điểm của I của đường thẳng AN và mặt phẳng (SBD) là điểm nằm trên đường thẳng SO

c) Giao điểm của J của đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) là điểm nằm trên đường thẳng SD

d) Ba điểm I, J, B thẳng hàng.

Lời giải

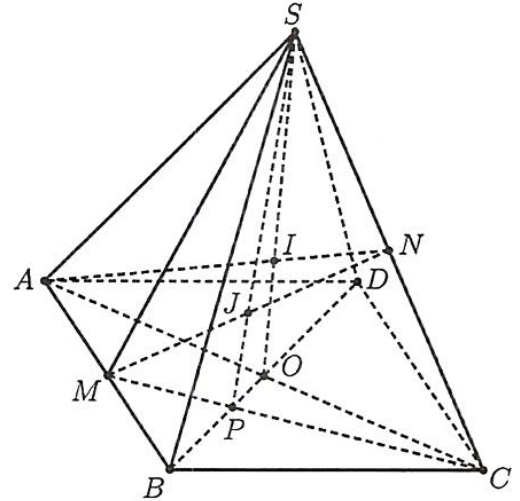
a) Đúng: SO giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

b) Đúng: Tìm giao điểm I của AN và mặt phẳng (SBD) :

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $O = AC \cap BD$;

Trong mặt phẳng (SAC) gọi $I = SO \cap AN$.

Ta có: $\begin{cases} I \in AN \\ I \in SO, SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I = AN \cap (SBD)$.



c) Sai: Tìm giao điểm J của MN và mặt phẳng (SBD) :

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $P = CM \cap BD$;

Trong mặt phẳng (SCM) gọi $J = MN \cap SP$;

Ta có: $\begin{cases} J \in MN \\ J \in SP, SP \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow J = MN \cap (SBD)$.

d) Đúng: Chứng minh I, J, B thẳng hàng:

Dễ thấy $B \in (ABN) \cap (SBD)$ (1)

Ta có: $\begin{cases} I \in AN, AN \subset (ABN) \\ I \in SO, SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in (ABN) \cap (SBD)$ (2)

Tương tự: $\begin{cases} J \in MN, MN \subset (ABN) \\ J \in SP, SP \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow J \in (ABN) \cap (SBD)$ (3)

Từ (1); (2); (3) suy ra B, I, J cùng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (ABN) và (SBD) nên ba điểm này thẳng hàng.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC . Gọi I giao điểm của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD) . Khi đó:

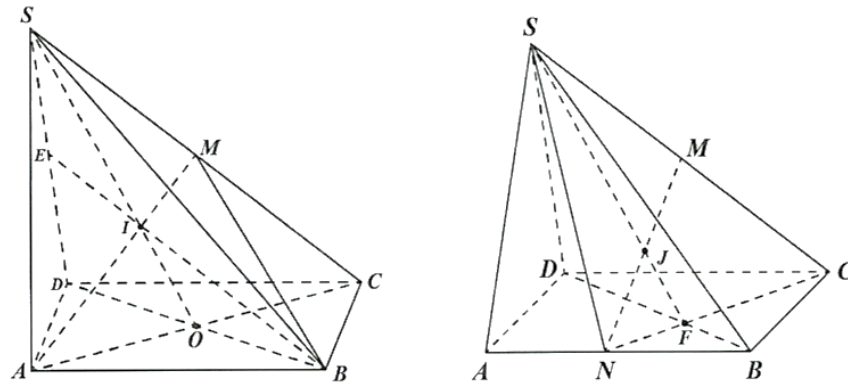
a) $AM \cap SO = I$.

b) $IA = 3IM$.

c) Giao điểm E của đường thẳng SD và mặt phẳng (ABM) là điểm thuộc đường thẳng BI

d) Gọi N là một điểm tùy ý trên cạnh AB . Khi đó giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) là điểm thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (SBD) , (SNC)

Lời giải



a) Đúng: Trong $(SAC): AM \cap SO = I$

b) Sai: Ta có $\begin{cases} I \in AM \\ I \in SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in AM \cap (SBD)$.

Tam giác SAC có hai đường trung tuyến AM và SO cắt nhau tại I suy ra I là trọng tâm của tam giác SAC . Từ đó ta có $IA = 2IM$.

c) Đúng: Trong $(SBD): BI \cap SD = E$. Ta có $\begin{cases} E \in SD \\ E \in BI \subset (ABM) \end{cases} \Rightarrow I \in SD \cap (ABM)$.

d) Trong $(ABCD): CN \cap BD = F$. Trong $(SNC): SF \cap MN = J$.

Ta có $\begin{cases} J \in MN \\ J \in SF \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow J \in MN \cap (SBD)$.

Câu 5: Cho tứ diện $SABC$. Gọi M và N lần lượt là hai điểm trên hai cạnh AB và BC sao cho MN không song song với AC . Khi đó:

a) Đường thẳng MN cắt đường thẳng AC

b) Giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC) là giao điểm của MN và AC .

c) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là đường thẳng đi qua giao điểm của MN và AC .

d) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAN) và (SCM) là đường thẳng đi qua giao điểm của MN và AC .

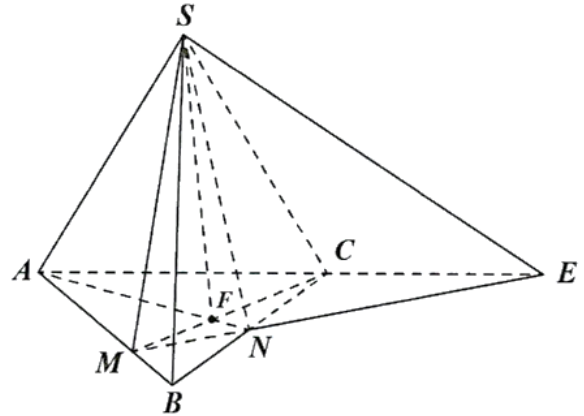
Lời giải

a) Đúng: Đường thẳng MN cắt đường thẳng AC

b) Đúng: Trong mặt phẳng (ABC) vẽ giao điểm E của MN và AC .

Ta có $E \in AC$ suy ra $E \in (SAC)$.

Vậy E là giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC) .



c) Đúng: Ta có S và E là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) .

Suy ra $(SMN) \cap (SAC) = SE$.

d) Sai: Trong mặt phẳng (ABC) , vẽ giao điểm F của AN và MC .

Ta có S và F là hai điểm chung của (SAN) và $(SCM) \Rightarrow (SAN) \cap (SCM) = SF$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của AC và BD ; M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD ; P thuộc đoạn SC và không là trung điểm của SC . Khi đó:

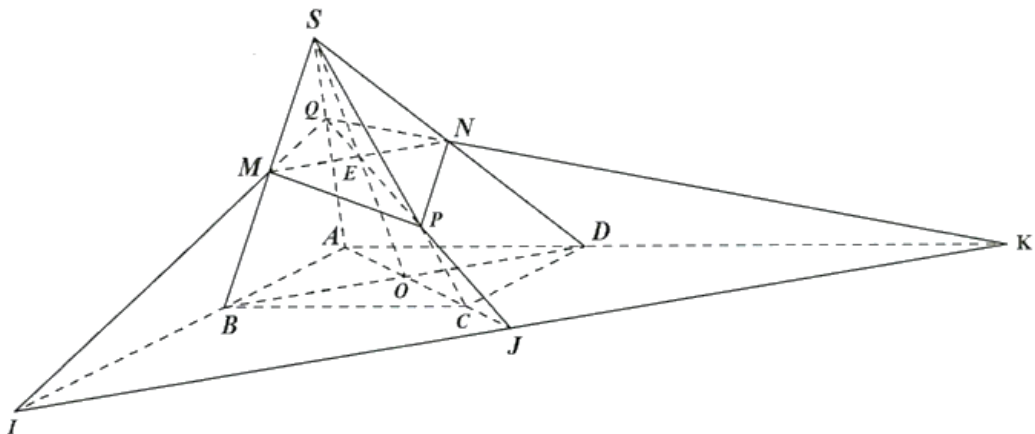
a) Giao điểm E của đường thẳng SO và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của MN và SO .

b) Giao điểm Q đường thẳng SA và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của PE và SO .

c) Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của QM và AB, QP và AC, QN và AD . Vậy I, J, K thẳng hàng.

d) Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của QM và AB, QP và AC, QN và AD . Vậy I, J, K không thẳng hàng.

Lời giải



a) Đúng: Trong (SBD) : $SO \cap MN = E$. Ta có $\begin{cases} E \in SO \\ E \in MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow E \in SO \cap (MNP)$.

b) Sai: Trong (SAC): $PE \cap SA = Q$. Ta có $\begin{cases} Q \in SA \\ Q \in PE \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow Q \in SA \cap (MNP)$.

c) Đúng: Từ giả thiết ta có $\begin{cases} I \in QM \subset (MNP) \\ J \in QP \subset (MNP) \\ K \in QN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow I, J, K \in (MNP) (1)$

Mặt khác $\begin{cases} I \in AB \subset (ABCD) \\ J \in AC \subset (ABCD) \\ K \in AD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow I, J, K \in (ABCD) (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $I, J, K \in (MNP) \cap (ABCD)$. Suy ra I, J, K thẳng hàng.

d) Sai: Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của QM và AB, QP và AC, QN và AD . Vậy I, J, K không thẳng hàng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên cạnh BD lấy điểm P sao cho $BP = 2DP$. Gọi F là giao điểm của AD với mặt phẳng (MNP) . Tính $\frac{FA}{FD}$.

Lời giải

Trong (BCD) ta có $\frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}; \frac{BP}{BD} = \frac{2}{3}$ suy ra NP không song song với CD .

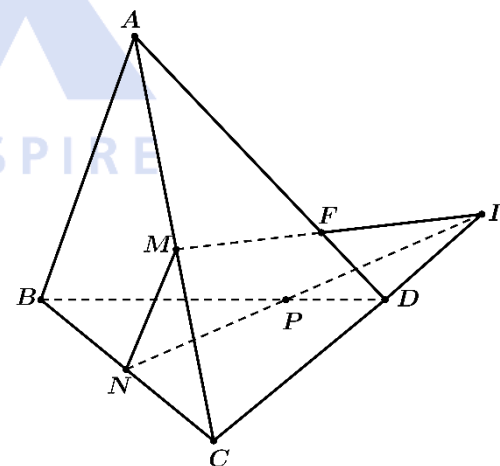
Gọi $I = NP \cap CD$ và $F = MI \cap AD$.

Dễ thấy F là giao điểm của AD với mặt phẳng (MNP) .

Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác BCD có

$$\frac{ID}{IC} \cdot \frac{CN}{CB} \cdot \frac{PB}{PD} = 1 \Rightarrow \frac{ID}{IC} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow \frac{ID}{IC} = 1.$$

Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác ACD có $\frac{FA}{FD} \cdot \frac{ID}{IC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1 \Rightarrow \frac{FA}{FD} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{FA}{FD} = 2$



Câu 2: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, M là một điểm trên cạnh SC , N là trên cạnh BC . Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMN) .

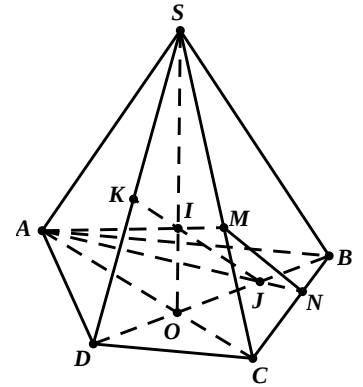
Lời giải

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $O = AC \cap BD, J = AN \cap BD$.

Trong (SAC) gọi $I = SO \cap AM$ và $K = IJ \cap SD$.

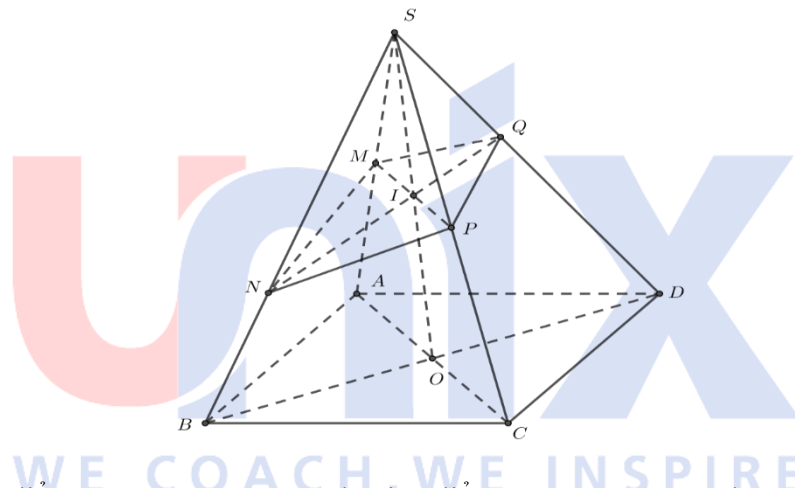
Ta có $I \in AM \subset (AMN), J \in AN \subset (AMN) \Rightarrow IJ \subset (AMN)$.

Do đó $K \in IJ \subset (AMN) \Rightarrow K \in (AMN)$. Vậy $K = SD \cap (AMN)$



Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và SC . Điểm N thuộc cạnh SB sao cho $\frac{SN}{SB} = \frac{2}{3}$. Gọi Q là giao điểm của cạnh SD và mặt phẳng (MNP) . Tính tỷ số $\frac{SQ}{SD}$.

Lời giải



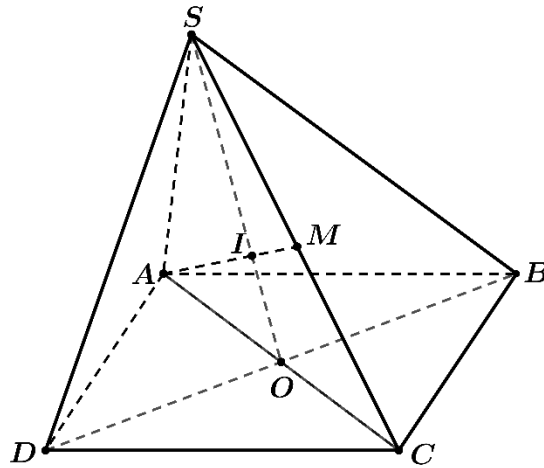
Gọi O là giao điểm của AC và BD , I là giao điểm của MP và SO thì Q là giao điểm của NI với SD . I là trung điểm của SO .

Đặt $\frac{SD}{SQ} = x$. Do $2\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$ nên $4\overrightarrow{SI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{SN} + x\overrightarrow{SQ} \Rightarrow x = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

Vậy $\frac{SQ}{SD} = \frac{2}{5}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. M là trung điểm của SC . Gọi I là giao điểm của đường thẳng AM với mặt phẳng (SBD) . Tính tỷ số $\frac{IA}{IM}$

Lời giải



Gọi $AC \cap BD = O$ thì $(SAC) \cap (SBD) = SO$.

Trong mặt phẳng (SAC) , lấy $AM \cap SO = I \Rightarrow I = AM \cap (SBD)$.

Do trong ΔSAC , AM và SO là hai đường trung tuyến, nên I là trọng tâm ΔSAC .

Vậy $IA = 2IM$ hay $\frac{IA}{IM} = 2$.

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$ có M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, BC . Gọi P là điểm thuộc cạnh CD sao cho $CP = 2PD$ và Q là điểm thuộc cạnh AD sao cho bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng.

Tính tỷ số $\frac{AQ}{DQ}$

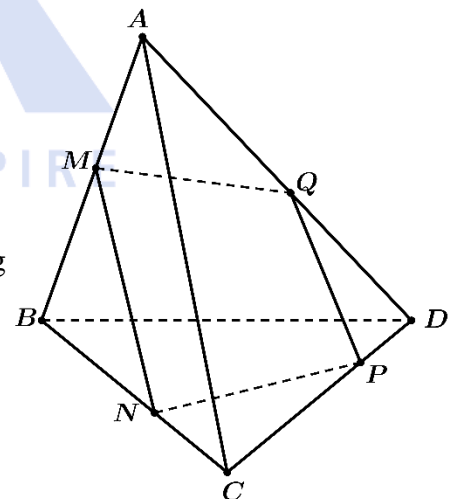
Lời giải

Theo giả thiết, M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, BC nên $MN \parallel AC$.

Hai mặt phẳng (MNP) và (ACD) có $MN \parallel AC$ và P là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng nên giao tuyến của hai mặt phẳng là đường thẳng PQ đi qua P và song song với AC ; cắt AD tại Q .

Mặt khác, trong tam giác ACD có $\begin{cases} CP = 2PD \\ PQ \parallel AC \end{cases}$ nên $AQ = 2DQ$

hay $\frac{AQ}{DQ} = 2$.



-----HẾT-----