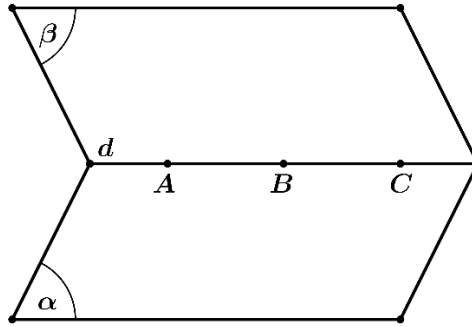


Dạng 4: Ba điểm thẳng hàng và ba đường thẳng đồng quy

Phương pháp: Để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng ta cần chứng minh ba điểm này lần lượt thuộc hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) . Nghĩa là chúng cùng thuộc giao tuyến d của hai mặt phẳng (α) và (β) nên chúng thẳng hàng.

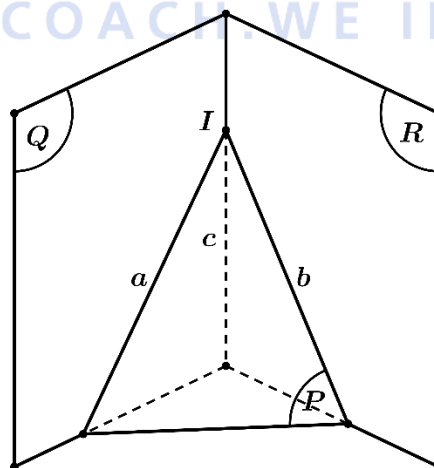


Để chứng minh ba đường thẳng a, b, c đồng quy ta làm theo các bước sau:

- Chọn mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a và b .
- Tìm mặt phẳng (Q) chứa a và (R) chứa b sao cho $(Q) \cap (R) = c \Rightarrow I \in c$.

Suy ra ba đường thẳng a, b, c đồng quy tại I .

- Nghĩa là:
$$\begin{cases} a \subset (P), b \subset (P), I = a \cap b \\ a = (P) \cap (Q) \\ b = (P) \cap (R) \\ c = (Q) \cap (R) \end{cases} \Rightarrow a, b, c \text{ đồng quy tại } I.$$



BÀI TẬP TỰ LUẬN

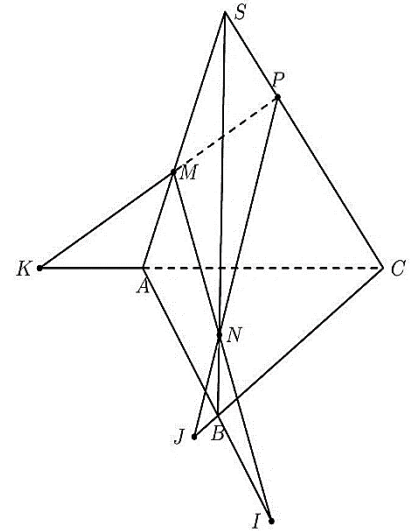
Bài tập 1: Cho tứ diện $S.ABC$. Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho MN cắt AB tại I , NP cắt BC tại J và MP cắt AC tại K . Chứng minh rằng ba điểm I, J, K thẳng hàng

Lời giải

Tư vấn hướng nghiệp cho học sinh bằng phân tích nhân tướng học – xem chỉ tay – tử vi

Gọi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ABC) .

Ta có



$$K = MP \cap AC \Rightarrow \begin{cases} K \in MP, MP \subset (MNP) \Rightarrow K \in (MNP) \\ K \in AC, AC \subset (ABC) \Rightarrow K \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow K \in d \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } I = MN \cap AB \Rightarrow \begin{cases} I \in MN, MN \subset (MNP) \Rightarrow I \in (MNP) \\ I \in AB, AB \subset (ABC) \Rightarrow I \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow I \in d \quad (2)$$

$$\text{Lại có: } J = NP \cap BC \Rightarrow \begin{cases} J \in NP, NP \subset (MNP) \Rightarrow J \in (MNP) \\ J \in BC, BC \subset (ABC) \Rightarrow J \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow J \in d \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra I, J, K cùng thuộc $d \Rightarrow$ ba điểm I, J, K thẳng hàng (đpcm).

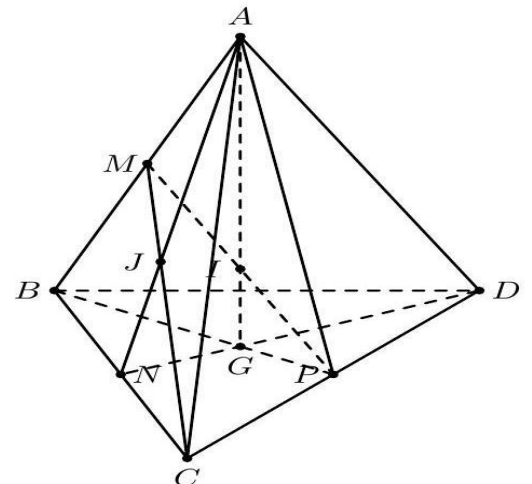
Bài tập 2: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD .

a) Xác định giao tuyến của (ADN) và (ABP) .

b) Gọi $I = AG \cap MP$ và $J = CM \cap AN$. Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \begin{cases} A \in (ADN) \\ A \in (ABP) \end{cases} \Rightarrow A \in (ADN) \cap (ABP) \quad (1)$$



Tương tự:

$$G = BP \cap DN \Rightarrow \begin{cases} G \in DN, DN \subset (ADN) \Rightarrow G \in (ADN) \\ G \in BP, BP \subset (ABP) \Rightarrow G \in (ABP) \end{cases} \Rightarrow G \in (ADN) \cap (ABP) \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $(ADN) \cap (ABP) = AG$.

b) Gọi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (DCM) và (ADN) .

$$\text{Ta có } \begin{cases} D \in (DCM) \\ D \in (ADN) \end{cases} \Rightarrow D \in d \quad (3)$$

$$\text{Tương tự: } I = AG \cap MP \Rightarrow \begin{cases} I \in AG, AG \subset (ADN) \Rightarrow I \in (ADN) \\ I \in MP, MP \subset (DCM) \Rightarrow I \in (DCM) \end{cases} \Rightarrow I \in d \quad (4)$$

$$\text{Lại có: } J = CM \cap AN \Rightarrow \begin{cases} J \in CM, CM \subset (DCM) \Rightarrow J \in (DCM) \\ J \in AN, AN \subset (ADN) \Rightarrow J \in (ADN) \end{cases} \Rightarrow J \in d \quad (5)$$

Từ (3), (4), (5) suy ra D, I, J cùng thuộc $d \Rightarrow$ ba điểm D, I, J thẳng hàng (đpcm).

Bài tập 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD , điểm P thuộc SC và không là trung điểm của SC .

a) Tìm giao điểm của SO với (MNP) .

b) Tìm giao điểm Q của SA với mặt phẳng (MNP) .

c) Gọi F, G, H lần lượt là giao điểm của QM và AB , QP và AC , QN và AD . Chứng minh ba điểm F, G, H thẳng hàng.

Lời giải

a) Trong (SBD) ta có

$$\begin{cases} SO \cap MN = \{I\} \\ MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow SO \cap (MNP) = \{I\}.$$

b) Chọn mặt phẳng (SAC) chứa SA . Ta có

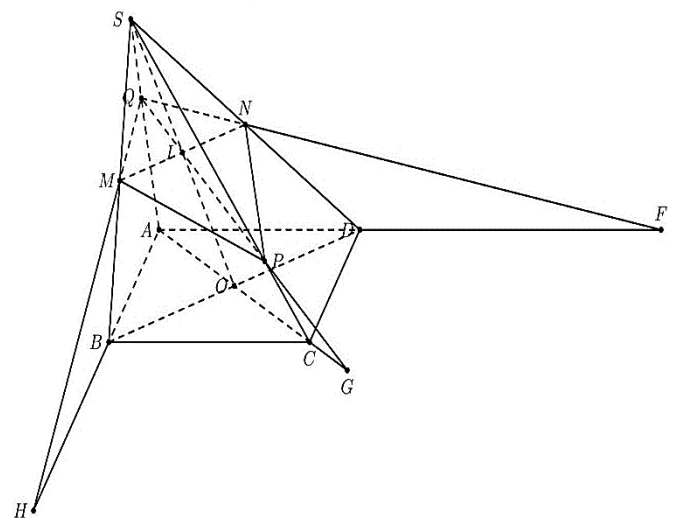
$$(SAC) \cap (MNP) = PI.$$

Kẻ

$$PI \cap SA = \{Q\}.$$

Suy ra $SA \cap (MNP) = \{Q\}.$

c) Gọi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(MNPQ)$ và $(ABCD)$. Ta có



$$F = QM \cap AB \Rightarrow \begin{cases} F \in QM, QM \subset (MNPQ) \Rightarrow F \in (MNPQ) \\ F \in AB, AB \subset (ABCD) \Rightarrow F \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow F \in d \quad (1)$$

$$G = PQ \cap AC \Rightarrow \begin{cases} G \in PQ, PQ \subset (MNPQ) \Rightarrow G \in (MNPQ) \\ G \in AC, AC \subset (ABCD) \Rightarrow G \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow G \in d \quad (2)$$

$$H = NQ \cap AD \Rightarrow \begin{cases} H \in NQ, NQ \subset (MNPQ) \Rightarrow H \in (MNPQ) \\ H \in AD, AD \subset (ABCD) \Rightarrow H \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow H \in d \quad (3)$$

Từ (1),(2),(3) suy ra F, G, H cùng thuộc $d \Rightarrow$ ba điểm F, G, H thẳng hàng (đpcm).

Bài tập 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với BC . Lấy M thuộc SB và O là giao điểm AC với BD .

a) Tìm giao điểm N của SC với (ADM) .

b) Gọi $I = AN \cap DM$. Chứng minh S, I, O thẳng hàng.

Lời giải

a) Chọn mặt phẳng (SBC) chứa SC . Gọi $H = AD \cap BC$.

Ta có $(SBC) \cap (ADM) = MH$. Kẻ $MH \cap SC = N$. Suy ra $SC \cap (ADM) = N$.

b) Gọi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

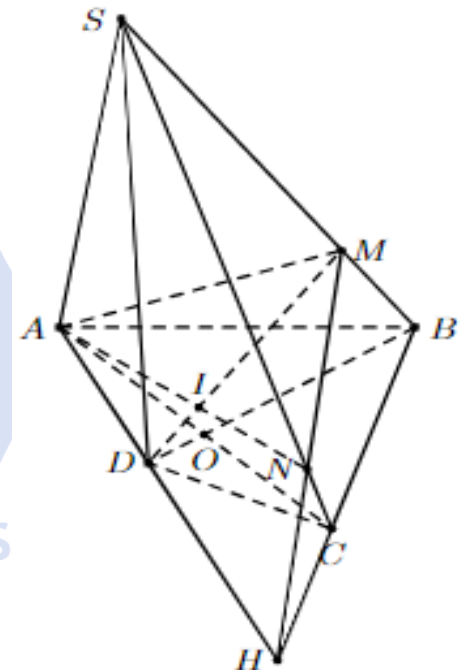
$$\text{Ta có } \begin{cases} S \in (SAC) \\ S \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow S \in d \quad (1)$$

Tương tự:

$$I = AN \cap SO \Rightarrow \begin{cases} I \in AN, AN \subset (SAC) \Rightarrow I \in (SAC) \\ I \in SO, SO \subset (SBD) \Rightarrow I \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in d \quad (2)$$

$$O = AC \cap BD \Rightarrow \begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in BD, BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in d \quad (3)$$

Từ (1),(2),(3) suy ra S, I, O cùng thuộc $d \Rightarrow$ ba điểm S, I, O thẳng hàng (đpcm).



Bài tập 5: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD .

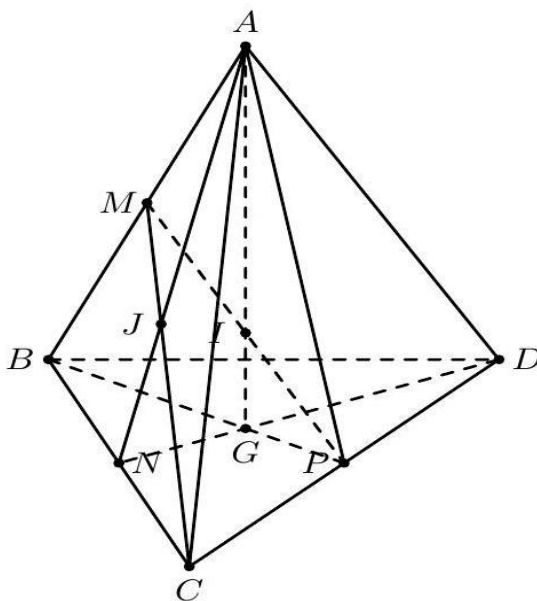
a) Tìm giao tuyến của (ADN) và (ABP) .

b) Gọi $I = AG \cap MP$ và $J = CM \cap AN$. Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

Lời giải

Tương tự:

Tùr (1),(2) $\Rightarrow (ADN) \cap (ABP) = AG$.

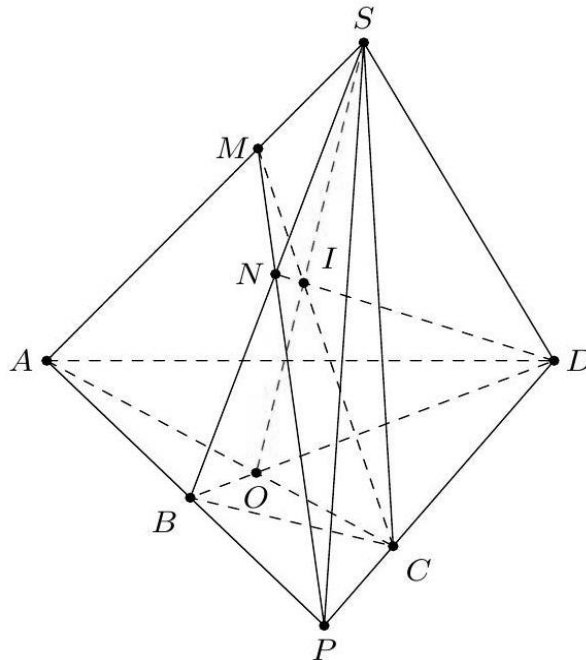

$$\text{Ta có } \begin{cases} D \in (DMC) \\ D \in (ADN) \end{cases} \Rightarrow D \in d \quad (3)$$

$$J = CM \cap AN \Rightarrow \begin{cases} J \in CM, CM \subset (DMC) \Rightarrow J \in (DMC) \\ J \in AN, AN \subset (ADN) \Rightarrow J \in (ADN) \end{cases} \Rightarrow J \in d \quad (5)$$

Bài tập 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có AC cắt BD tại O và AB cắt CD tại P . Điểm M thuộc cạnh SA (M khác S, M khác A). Gọi N là giao điểm của MP và SB, I là giao điểm của MC và DN . Chứng minh rằng S, O, I thẳng hàng.

Ta có $\begin{cases} S \in (SAC) \cap (SDB) \\ O \in (SAC) \cap (SDB) \end{cases}$ suy ra $SO = (SAC) \cap (SDB)$.

$$\text{Xét } (MPD), I \in MC \cap DN \Rightarrow \begin{cases} I \in MC, MC \subset (SAC) \\ I \in DN, DN \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD) \text{ hay } I \in SO.$$



Vậy S, O, I thẳng hàng.

Bài tập 7: Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm cạnh CD . Gọi M, N lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA .

- Chứng minh rằng các điểm M, N thuộc mặt phẳng (ABI) .
- Gọi G là giao điểm của AM và BN . Chứng minh rằng: $\frac{GM}{GA} = \frac{GN}{GB} = \frac{1}{3}$.
- Gọi P, Q lần lượt là trọng tâm các tam giác DAB, ABC . Chứng minh rằng các đường thẳng CP, DQ cùng đi qua điểm G và $\frac{GP}{GC} = \frac{GQ}{GD} = \frac{1}{3}$.

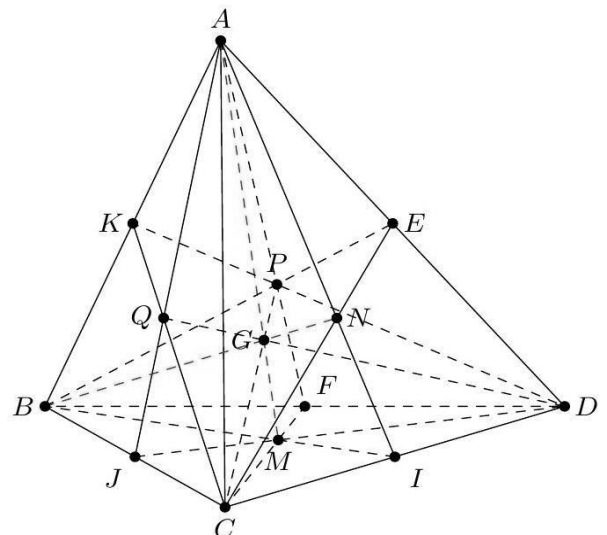
Lời giải

- Xét tam giác BCD có BI là đường trung tuyến và M là trọng tâm nên $M \in BI$.

Xét tam giác CDA có AI là đường trung tuyến và N là trọng tâm nên $N \in AI$.

Từ (1) và (2) suy ra $M, N \in (ABI)$.

- Xét $\triangle ABI$ có $\frac{IN}{IA} = \frac{IM}{IB} = \frac{1}{3}$ (vì M, N lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA) suy



ra $MN // AB$ (định lý Ta-let đảo). Do đó $\frac{GM}{GA} = \frac{GN}{GB} = \frac{1}{3}$ (định lý Ta-let).

c) Xét ΔAJD có $\frac{JQ}{JA} = \frac{JM}{JD} = \frac{1}{3}$ (vì Q, M lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD) suy ra $QM // AD$ (định lý Ta-let đảo).

Xét (AJD) gọi $G' = AM \cap DQ$. Ta có $\frac{G'M}{G'A} = \frac{QM}{AD} = \frac{JM}{JD} = \frac{1}{3}$ suy ra $G' \equiv G$.

Do đó DQ đi qua G .

Xét ΔEBC có $\frac{EP}{EB} = \frac{EN}{EC} = \frac{1}{3}$ (vì P, N lần lượt là trọng tâm các tam giác ABD, ACD) suy ra $PN // BC$ (định lý Ta-let đảo).

Xét (EBC) gọi $G'' = CP \cap BN$. Ta có $\frac{G''N}{G''B} = \frac{PN}{BC} = \frac{EN}{EC} = \frac{1}{3}$ suy ra $G'' \equiv G$.

Do đó CP đi qua G .

Từ (3) và (4) suy ra CP, DQ cùng đi qua điểm G .

Xét ΔKCD có $\frac{GP}{GC} = \frac{GQ}{GD} = \frac{PQ}{CD} = \frac{KQ}{KD} = \frac{1}{3}$ (vì P, Q lần lượt là trọng tâm các $\Delta ABD, \Delta ABC$).

Bài tập 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có AB không song song CD . Gọi M là trung điểm SC và O là giao điểm AC với BD .

- Tìm giao điểm N của SD với (MAB) .
- Chứng minh ba đường thẳng SO, AM, BN đồng quy.

Lời giải

a) Tìm giao điểm N của SD với (MAB) . Chọn mặt phẳng phụ (SCD) chứa SD .

Xét (SCD) và (MAB)

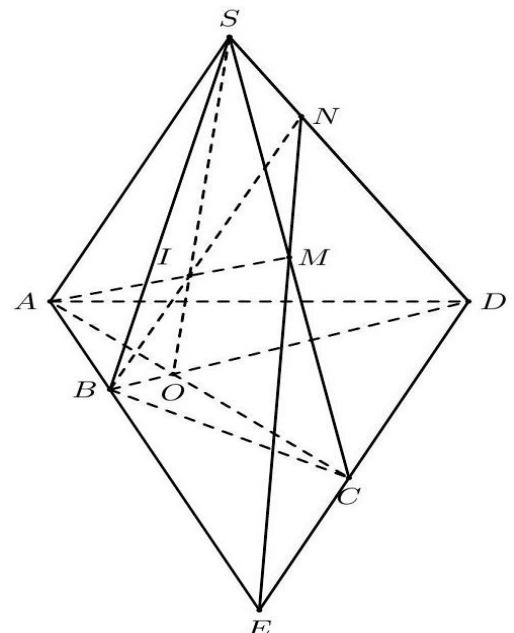
Tong $(ABCD)$ gọi $E = AB \cap CD$ thì ta có:

$$\begin{cases} E \in AB, AB \subset (ABM) \Rightarrow E \in (ABM) \\ E \in CD, CD \subset (SCD) \Rightarrow E \in (SCD) \end{cases} \\ \Rightarrow E \in (ABM) \cap (SCD) \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} M \in (ABM) \\ M \in SC, SC \subset (SCD) \Rightarrow M \in (SCD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow M \in (ABM) \cap (SCD) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow (ABM) \cap (SCD) = EM.$$



Trong (SCD) gọi $N = SD \cap EM$ khi đó $\begin{cases} N \in SD \\ N \in EM, EM \subset (ABM) \end{cases} \Rightarrow N = SD \cap (ABM).$

b) Chứng minh ba đường thẳng SO, AM, BN đồng quy.

Nhận xét: $AM \subset (SAC), BN \subset (SBD)$ nên ta quan tâm đến hai mặt phẳng này.

Xét (SAC) và (SBD) có $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (3)

Ta có: $\begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in BD, BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$ (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$.

Mặt khác, trong (ABM) gọi $I = AM \cap BN$

$\Rightarrow \begin{cases} I \in AM \subset (SAC) \\ I \in BN \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD) \Rightarrow I \in SO$ do đó SO, AM, BN đồng quy.

Bài tập 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Lấy M trên cạnh SC . Gọi N là giao điểm của SB và (ADM) . Gọi O là giao điểm AC và BD . Chứng minh rằng SO, AM, DN đồng quy.

Lời giải

Tìm N là giao điểm của SB và (ADM) .

Chọn mặt phẳng phụ (SBC) chứa SB .

Xét (SBC) và (ADM) :

Trong $(ABCD)$, gọi $E = AD \cap BC$ thì ta có:

$\begin{cases} E \in BC, BC \subset (SBC) \Rightarrow E \in (SBC) \\ E \in AD, AD \subset (ADM) \Rightarrow E \in (ADM) \end{cases}$

$\Rightarrow E \in (SBC) \cap (ADM)$ (1)

Mặt khác:

$\begin{cases} M \in (ADM) \\ M \in SC, SC \subset (SBC) \Rightarrow M \in (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow M \in (SBC) \cap (ADM)$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow (SBC) \cap (ADM) = EM$.

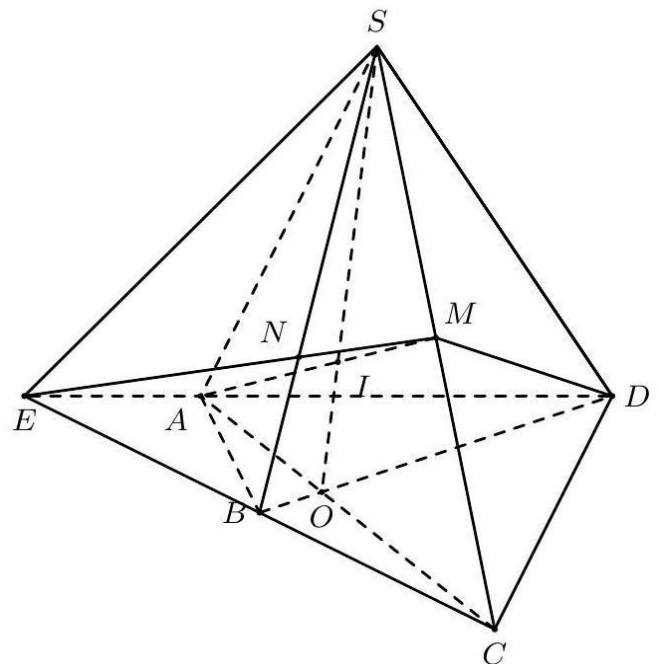
Trong (SBC) gọi $N = SB \cap EM$ khi đó: $\begin{cases} N \in SB \\ N \in EM, EM \subset (ADM) \end{cases} \Rightarrow N = SB \cap (ADM).$

Chứng minh rằng SO, AM, DN đồng quy.

Nhận xét: $AM \subset (SAC), DN \subset (SBD)$ nên ta quan tâm đến hai mặt phẳng này.

Xét (SAC) và (SBD) có: $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (3)

Ta có: $\begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in BD, BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$ (4)



Từ (3), (4) $\Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$.

Mặt khác, trong (ADM) , gọi $I = AM \cap DN$.

$$\begin{cases} I \in AM \subset (SAC) \\ I \in DN \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD) \Rightarrow I \in SO \text{ do đó } SO, AM, DN \text{ đồng quy.}$$

Bài tập 10: Cho tứ diện $ABCD$. Lấy M, N, P lần lượt trên các cạnh AB, AC, BD sao cho MN cắt BC tại I, MP cắt AD tại J . Chứng minh: PI, NJ, CD đồng quy.

Lời giải

Trong (BCD) gọi $K = CD \cap IP$ khi đó:

$$\begin{cases} K \in CD \subset (ACD) \\ K \in PI \subset (MNP) \end{cases}$$

$$\Rightarrow K \in (ACD) \cap (MNP) \quad (1)$$

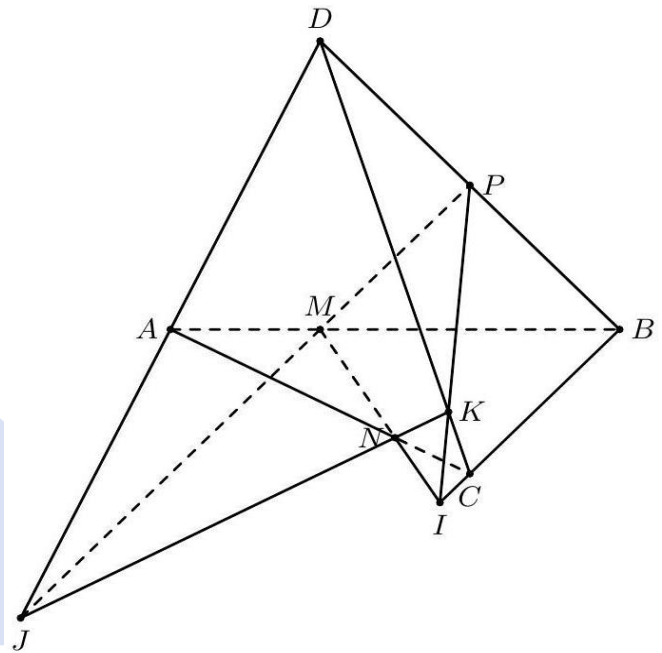
Lại có: $\begin{cases} N \in AC \subset (ACD) \\ N \in (MNP) \end{cases}$

$$\Rightarrow K \in (ACD) \cap (MNP) \quad (2)$$

Mặt khác: $\begin{cases} J \in AD \subset (ACD) \\ J \in MP \subset (MNP) \end{cases}$

$$\Rightarrow J \in (ACD) \cap (MNP) \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra J, N, K thẳng hàng hay ba đường thẳng PI, NJ, CD đồng quy.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Mặt phẳng (α) qua MN cắt AD, BC lần lượt tại P và Q . Biết MP cắt NQ tại I . Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

A. I, A, C .

B. I, B, D .

C. I, A, B .

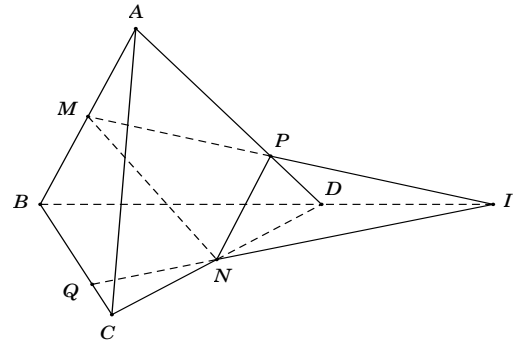
D. I, C, D .

Lời giải

Ta có $(ABD) \cap (BCD) = BD$.

Lại có $\begin{cases} I \in MP \subset (ABD) \\ I \in NQ \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow I$ thuộc giao tuyến của (ABD) và (BCD)

$\Rightarrow I \in BD \Rightarrow I, B, D$ thẳng hàng.



Câu 2: Cho tứ diện $SABC$. Gọi L, M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB và AC sao cho LM không song song với AB , LN không song song với SC . Mặt phẳng (LMN) cắt các cạnh AB, BC, SC lần lượt tại K, I, J . Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

- A. K, I, J . B. M, I, J . C. N, I, J . D. M, K, J .

Lời giải

Ta có: $M \in SB$ suy M là điểm chung của (LMN) và (SBC) .

I là điểm chung của (LMN) và (SBC) .

J là điểm chung của (LMN) và (SBC) .

Vậy M, I, J thẳng hàng vì cùng thuộc giao tuyến của (LMN) và (SBC) .

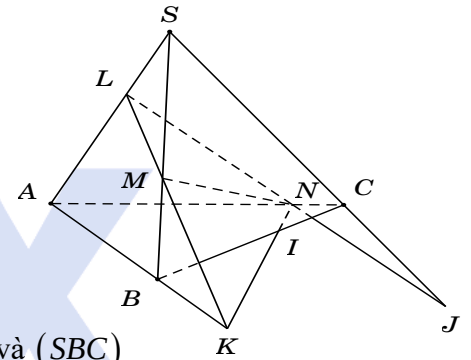
.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD , M là trung điểm CD , I là điểm ở trên đoạn thẳng AG , BI cắt mặt phẳng (ACD) tại J . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $AM = (ACD) \cap (ABG)$. B. A, J, M thẳng hàng.
C. J là trung điểm của AM . D. $DJ = (ACD) \cap (BDJ)$.

Lời giải

Ta có A là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (ACD) và (GAB) .



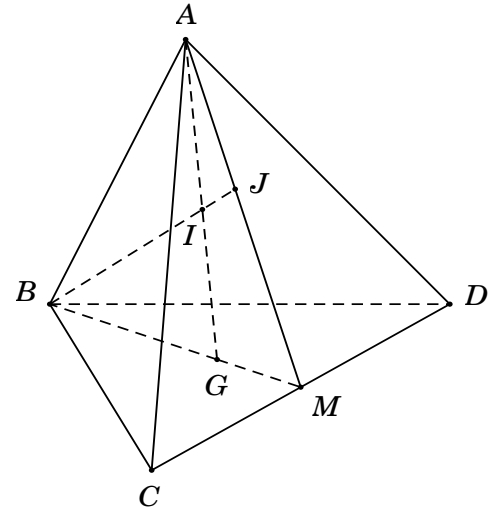
Do $BG \cap CD = M \Rightarrow \begin{cases} M \in BG \subset (ABG) \Rightarrow M \in (ABG) \\ M \in CD \subset (ACD) \Rightarrow M \in (ACD) \end{cases} \Rightarrow M$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (ACD) và (GAB) .

$$\Rightarrow (ABG) \cap (ACD) = AM$$

Ta có $\begin{cases} BI \subset (ABG) \\ AM \subset (ABM) \\ (ABG) \equiv (ABM) \end{cases} \Rightarrow AM, BI \text{ đồng phẳng.}$

$$\Rightarrow J = BI \cap AM \Rightarrow A, J, M \text{ thẳng hàng}$$

Ta có $\begin{cases} DJ \subset (ACD) \\ DJ \subset (BDJ) \end{cases} \Rightarrow DJ = (ACD) \cap (BDJ)$

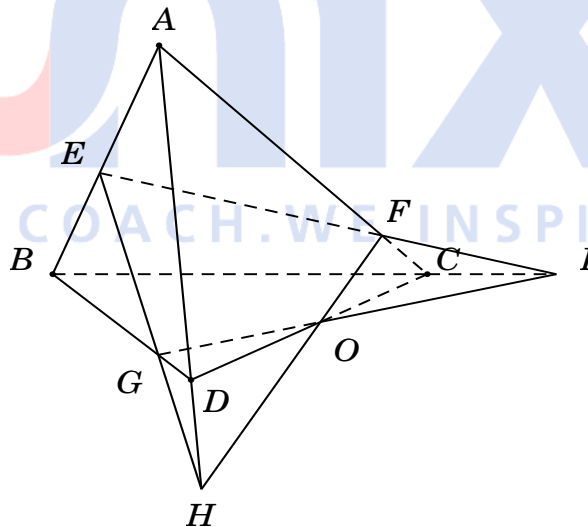


Điểm I di động trên AG nên J có thể không phải là trung điểm của AM

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F, G là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I , EG cắt AD tại H . Ba đường thẳng nào sau đây đồng quy?

- A. CD, EF, EG . **B. CD, IG, HF .** C. AB, IG, HF . D. AC, IG, BD .

Lời giải



Phương pháp: Để chứng minh ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy ta chứng minh giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β) ; đồng thời d_3 là giao tuyến (α) và (β) .

Gọi $O = HF \cap IG$ ta có $O \in HF$ mà $HF \subset (ACD)$ suy ra $O \in (ACD)$.

Mà $O \in IG$ mà $IG \subset (BCD)$ suy ra $O \in (BCD)$ do đó $O \in (ACD) \cap (BCD)$. (1)

Mặt khác: $(ACD) \cap (BCD) = CD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $O \in CD$. Vậy ba đường thẳng CD, IG, HF đồng quy.

- Câu 5:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ không phải là hình thang. Trên cạnh SC lấy điểm M . Gọi N là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMB) . Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. Ba đường thẳng AB, CD, MN đôi một song song.
B. Ba đường thẳng AB, CD, MN đôi một cắt nhau.
C. Ba đường thẳng AB, CD, MN đồng quy.
D. Ba đường thẳng AB, CD, MN cùng thuộc một mặt phẳng.

Lời giải

Gọi $I = AD \cap BC$. Trong mặt phẳng (SBC) , gọi $K = BM \cap SI$. Trong mặt phẳng (SAD) , gọi $N = AK \cap SD$.

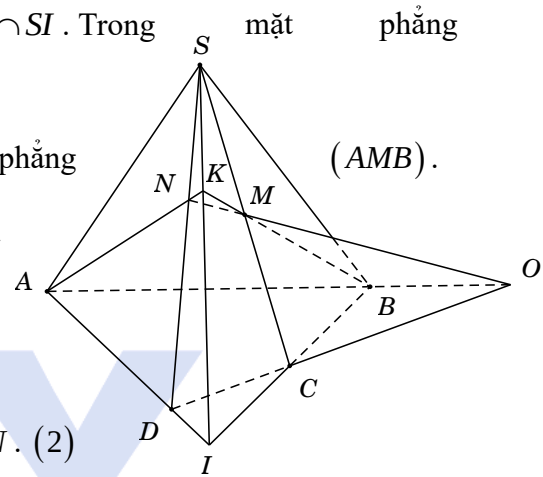
Khi đó N là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng

Gọi $O = AB \cap CD$ ta có $O \in AB$ mà $AB \subset (AMB)$ suy ra $O \in (AMB)$.

Mà $O \in CD$ mà $CD \subset (SCD)$ suy ra $O \in (SCD)$.

Do đó $O \in (AMB) \cap (SCD)$ (1) mà $(AMB) \cap (SCD) = MN$ (2)

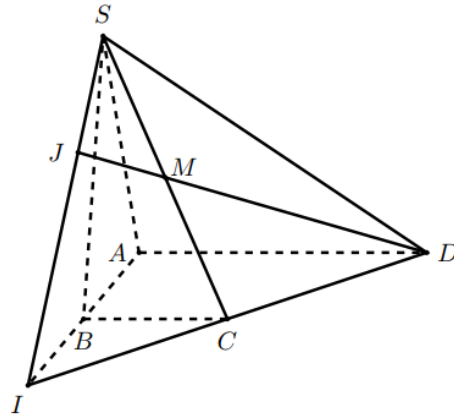
Từ (1) và (2), suy ra $O \in MN$. Vậy ba đường thẳng AB, CD, MN đồng quy.



- Câu 6:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AD \parallel BC, AD > BC$). Gọi I là giao điểm của AB và DC , M là trung điểm của SC và DM cắt (SAB) tại J . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Ba điểm S, I, J thẳng hàng.
B. Đường thẳng JM thuộc mặt phẳng (SAB) .
C. Đường thẳng SI là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .
D. Đường thẳng DM thuộc mặt phẳng (SCI) .

Lời giải



Trong (SCD) $DM \cap SI = J$ khi đó $J = DM \cap (SAB)$.

Câu 7: Cho hình tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, BD . Các điểm G, H lần lượt trên cạnh AC, CD sao cho NH cắt MG tại I . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. A, C, I thẳng hàng

B. B, C, I thẳng hàng.

C. N, G, H thẳng hàng.

D. B, G, H thẳng hàng.

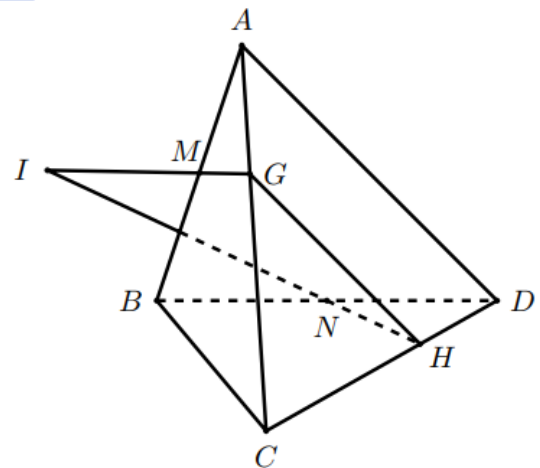
Lời giải

Do NH cắt MG tại I nên bốn điểm M, N, H, G cùng thuộc mặt phẳng (α) .

Xét ba mặt phẳng $(ABC), (BCD), (\alpha)$ phân biệt

$$\text{đồng thời } \begin{cases} (\alpha) \cap (ABC) = MG \\ (\alpha) \cap (BCD) = NH \\ (ABC) \cap (BCD) = BC \end{cases}$$

Mà $MG \cap NH = I$ suy ra MG, NH, BC đồng quy tại I nên B, C, I thẳng hàng.



Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AD \parallel BC, AD > BC$). Gọi I là giao điểm của AB và DC ; M là trung điểm của SC và DM cắt mặt phẳng (SAB) tại J . Khẳng định nào sau đây sai?

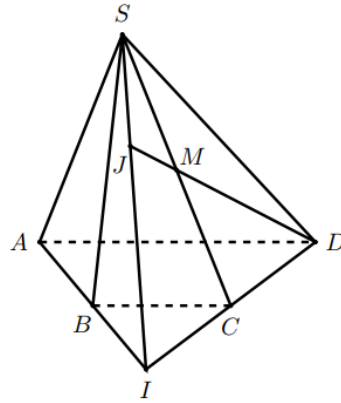
A. Đường thẳng SI là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

B. Đường thẳng JM thuộc mặt phẳng (SAB) .

C. Ba điểm S, I, J thẳng hàng.

D. Đường thẳng DM thuộc mặt phẳng (SCI) .

Lời giải



Ta có $M \notin (SAB)$ nên đường thẳng JM không thuộc mặt phẳng (SAB) .

Câu 9: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD tương ứng tại các điểm M, N, P, Q . Khẳng định nào sau đây đúng?

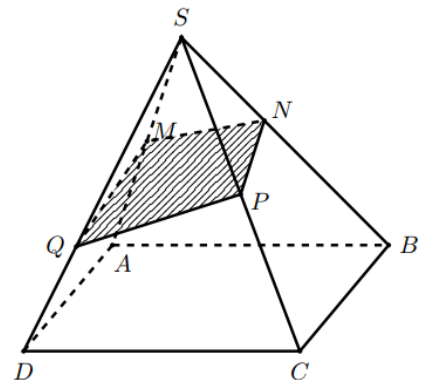
- A. Các đường thẳng MP, NQ, SO đồng qui.
- B. Các đường thẳng MP, NQ, SO chéo nhau.
- C. Các đường thẳng MP, NQ, SO đôi một song song.
- D. Các đường thẳng MP, NQ, SO trùng nhau.

Lời giải

Ta có M, N, P, Q đồng phẳng và tạo thành tứ giác $MNPQ$ nên hai đường MP và NQ cắt nhau.

$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} (MNPQ) \cap (SAC) = MP \\ (MNPQ) \cap (SBD) = NQ \\ (SAC) \cap (SBD) = SO \end{cases}$$

Từ đó suy ra các đường thẳng MP, NQ, SO đồng qui.



Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$. Một mặt phẳng (P) bất kì cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại $A'; B'; C'; D'$. Gọi I là giao điểm của AC và BD . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây?

- A. Các đường thẳng $AB, CD, C'D'$ đồng quy
- B. Các đường thẳng $AB, CD, A'B'$ đồng quy
- C. Các đường thẳng $A'C', B'D', SI$ đồng quy.
- D. Các đường thẳng $SB, AD, B'C'$ đồng quy

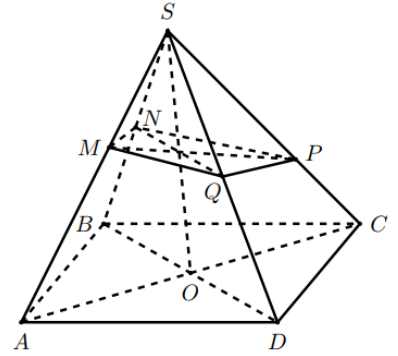
Lời giải

Hai mặt phẳng (P) và (SAC) cắt nhau theo giao tuyến $A'C'$.

Hai mặt phẳng (P) và (SBD) cắt nhau theo giao tuyến $B'D'$.

Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cắt nhau theo giao tuyến SI .

Vậy ba đường thẳng $A'C', B'D', SI$ đồng quy.



Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của cạnh AB, BC . Mặt phẳng (P) đi qua EF cắt AD, CD lần lượt tại H và G . Biết EH cắt FG tại I . Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

A. I, A, B .

B. I, C, B .

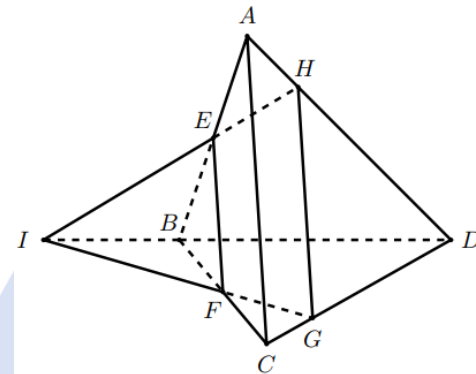
C. I, D, B .

D. I, C, D .

Lời giải

$$I = EH \cap FG \Rightarrow \left. \begin{array}{l} I \in EH \subset (ABD) \\ I \in FG \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow I \in (ABD) \cap (ABC) = BD. \text{ Vậy}$$

I, D, B thẳng hàng



Câu 12: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD . Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD tương ứng tại các điểm M, N, P, Q . Khẳng định nào **đúng**?

A. Các đường thẳng MN, PQ, SO đồng quy.

B. Các đường thẳng MP, NQ, SO đồng quy.

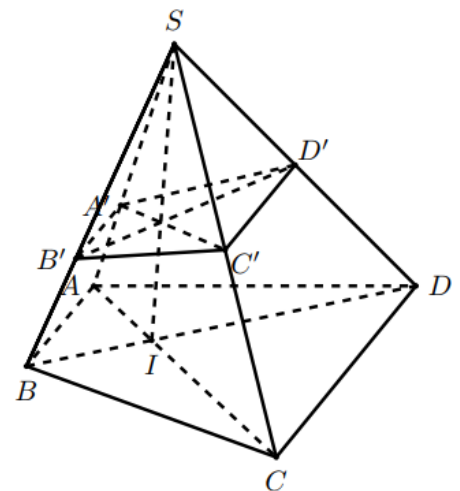
C. Các đường thẳng MQ, PN, SO đồng quy.

D. Các đường thẳng MQ, PQ, SO đồng quy.

Lời giải

Ta có: $MP \subset (SAC); NQ \subset (SBD)$ và
 $(SAC) \cap (SBD) = SO$

Gọi $I = MP \cap NQ$ thì khi đó $I \in SO$ nên MP, NQ, SO đồng quy.



PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AB \cap CD = E$ và $AD \cap BC = K$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC .

Tư vấn hướng nghiệp cho học sinh bằng phân tích nhân tướng học – xem chỉ tay – tử vi

- a) Giao tuyến của (SAC) và (SBD) cũng là giao điểm của hai đường thẳng AC và BD .
- b) Giao điểm của đường thẳng SD và mặt phẳng (MNP) cũng là giao điểm của hai đường thẳng SD và NJ .
- c) Gọi $H = MN \cap PQ$. Khi đó ba điểm S, H, E thẳng hàng.
- e) Ba đường thẳng SK, QM, NP đồng quy tại một điểm

Lời giải

- a) Đúng: Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD) .

Ta có: $S \in (SBD) \cap (SAC)$

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi

$$I = AC \cap BD$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in BD \subset (SBD) \\ I \in AC \subset (SAC) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I \in (SBD) \cap (SAC)$$

- b) Đúng: Từ (1) và (2) suy ra

$$(SBD) \cap (SAC) = SI$$

Trong mặt phẳng (SAC) gọi

$$J = MP \cap SI$$

Tìm giao điểm của Q của SD và (MNP) . Trong mặt phẳng (SBD) ,

$$\text{gọi } Q = SD \cap NJ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q \in SD \\ Q \in NJ \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow Q = SD \cap (MNP)$$

- c) Đúng: Gọi $H = MN \cap PQ$. Ta có $SE = (SAB) \cap (SCD)$. Theo giả thuyết có $H = MN \cap PQ$

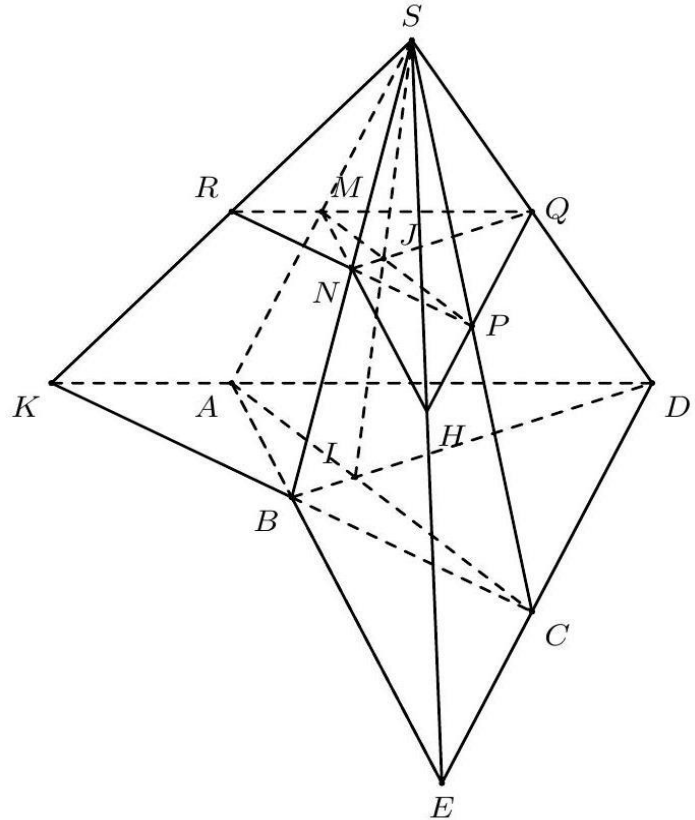
$$\Rightarrow \begin{cases} H \in MN \subset (SAB) \\ H \in PQ \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow H \in (SAB) \cap (SCD) \Rightarrow H \in SE$$

Suy ra ba điểm S, H, E thẳng hàng.

- d) Đúng: Có $SK = (SAD) \cap (SBC)$

$$\text{Theo giả thuyết có } R = MQ \cap NP \Rightarrow \begin{cases} R \in MQ \subset (SAD) \\ R \in NP \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow R \in (SAD) \cap (SBC) \Rightarrow R \in SK$$

Suy ra ba đường thẳng SK, MQ, NP đồng quy tại điểm R .



Câu 2: Cho tứ diện $SABC$ với I trung điểm của SA , J là trung điểm của BC . Gọi M là điểm di động trên IJ và N là điểm di động trên SC .

- Giao điểm của đường thẳng MC và mặt phẳng (SAB) cũng là giao điểm của hai đường thẳng CM và BI
- Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMP) và (ABC) là điểm H với H là giao điểm của hai đường thẳng SP và AD .
- Giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (ABC) cũng là giao điểm của MN và CJ
- Gọi $F = IN \cap AC$ thì khi đó đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di động.

Lời giải

a) Đúng: Xác định giao điểm P của MC và (SAB) .

Chọn mặt phẳng (BCI) chứa MC

có $IB = (SAB) \cap (BCI)$

Trong mặt phẳng (BCI) , gọi

$$P = CM \cap BI \Rightarrow \begin{cases} P \in CM \\ P \in BI \subset (SAB) \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = CM \cap (SAB).$$

b) Sai: Tìm giao tuyến của (SMP)

và (ABC) ta có:

$$\begin{cases} C \in (ABC) \\ C \in PM \subset (SMP) \end{cases} \quad (1)$$

Trong mặt phẳng (SAB) gọi

$$H = SP \cap AB \Rightarrow \begin{cases} H \in SP \subset (SMP) \\ H \in AB \subset (ABC) \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(ABC) \cap (SMP) = CH$.

c) Sai: Tìm giao điểm E của MN và (ABC) .

$$\text{Trong mặt phẳng } (SHC), \text{ gọi } E = MN \cap CH \Rightarrow \begin{cases} E \in MN \\ E \in CH \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow E = MN \cap (ABC).$$

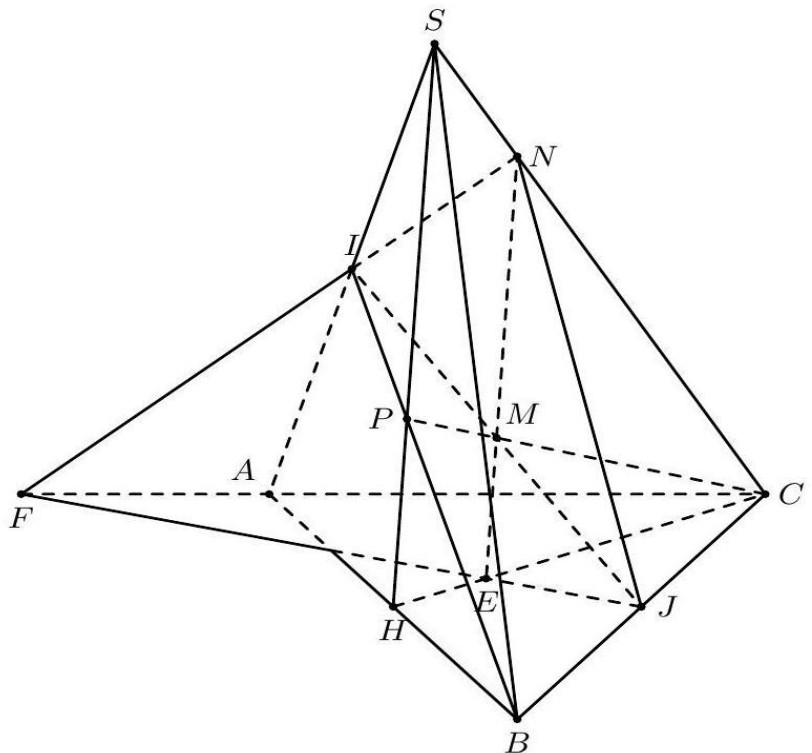
d) Đúng: Ta có: $F = IN \cap AC$ (3)

$$\text{Ta có: } E = MN \cap CH \Rightarrow \begin{cases} E \in MN \subset (IJN) \\ E \in CH \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow E \in (IJN) \cap (ABC) \quad (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra $(IJN) \cap (ABC) = EF$.

Ngoài ra có: $J \in (IJN) \cap (ABC)$ hay $J \in EF$.

Kết luận đường thẳng EF luôn đi qua điểm J cố định khi M, N thay đổi.



Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và K là trung điểm của AB và CD . Gọi J là một điểm trên đoạn AD sao cho $AD = 3JD$. Gọi F là giao điểm của đường thẳng IJ và mặt phẳng (BCD) .

a) Gọi E là giao điểm của mặt phẳng (IJK) và đường thẳng BC . Khi đó $\frac{EB}{EC} = \frac{1}{2}$.

c) Ba đường thẳng AC, KJ, IE đồng quy tại điểm H . Khi đó $\frac{HC}{HA} = 2$.

d) Hai đường thẳng $EJ // HF$ và đường thẳng IK đi qua trung điểm của đoạn HC .

e) Gọi O là trung điểm IK và G là trọng tâm của tam giác BCD . Khi đó ba điểm A, O, G thẳng hàng và tỉ số $\frac{OA}{OG} = 3$.

Lời giải

a) Sai: Tìm giao điểm F của IJ và (BCD) .

Trong mặt phẳng (ABD) , gọi $F = IJ \cap BD$ có $\begin{cases} F \in IJ \\ F \in BD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow F = IJ \cap (BCD)$

Tìm giao điểm E của (IJK) và đường thẳng BC . Tính tỉ số: $\frac{EB}{EC}$.

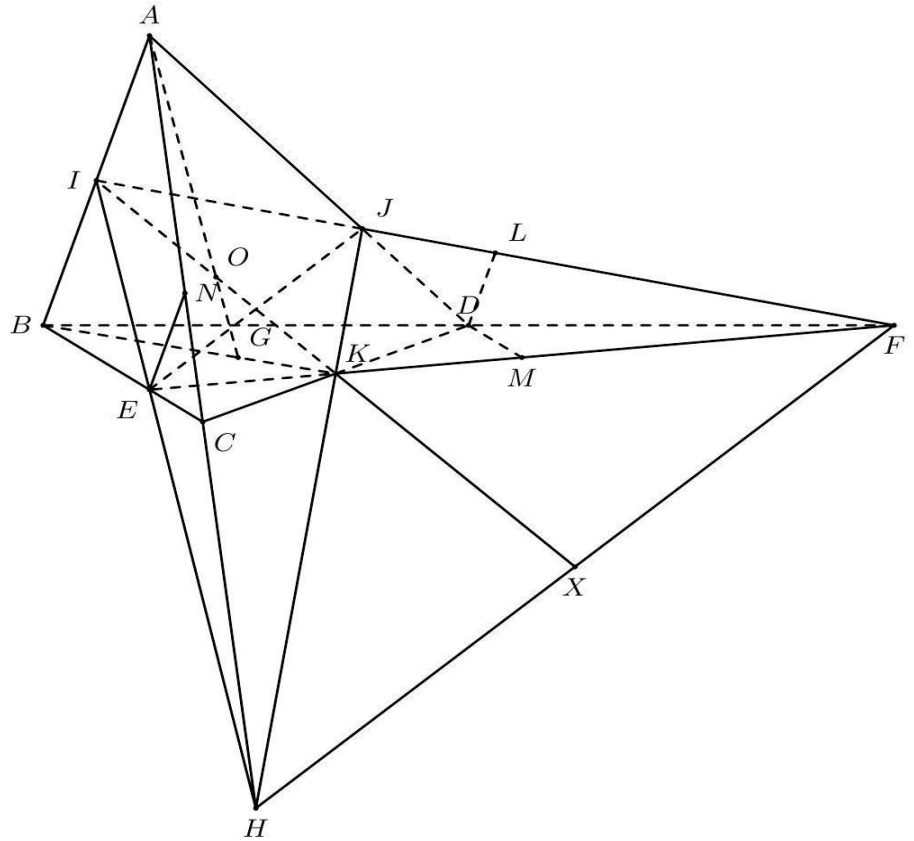
Trong mặt phẳng (BCD) , gọi $E = JK \cap BC$ có $\begin{cases} E \in BC \\ E \in JK \subset (IJK) \end{cases} \Rightarrow E = BC \cap (IJK)$.

Trong mặt phẳng (ABD) dựng $DL // AB, L \in IJ$ ta có $\triangle JAI \sim \triangle JDL$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{AI}{DL} = \frac{JA}{JD} = 2 \Rightarrow AI = 2DL$$

Trong $\triangle BIF$ có $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BI} \Rightarrow D$ trung điểm của BF .

Trong mặt phẳng
(BCD) dựng



$DM \parallel BC, M \in EF \Rightarrow BE = 2DM$.

Ngoài ra có $\triangle KDM = \triangle KCE$ (g-c-g) $\Rightarrow CE = DM$. Vậy $\frac{EB}{EC} = 2$.

b) Sai: Trong mặt phẳng (IJK) gọi $H = JK \cap IE$, có

$$\begin{cases} H \in IE \subset (ABC) \\ H \in JK \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow H \in (ABC) \cap (ACD).$$

Hay H thuộc giao tuyến AC của mặt phẳng (ABC) với mặt phẳng (ACD).

Kết luận 3 đường thẳng AC, JK và IE đồng quy tại điểm H .

Trong mặt phẳng (ABC) dựng $EN \parallel AB, N \in AC$.

Trong $\triangle ABC$ có $\frac{CE}{CB} = \frac{EN}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{EN}{AI} = \frac{2}{3}$.

Trong $\triangle HAI$ có $\frac{HE}{HI} = \frac{EN}{AI} = \frac{2}{3} \Rightarrow E$ là trọng tâm của $\triangle ABH$. Vậy $\frac{HC}{HA} = \frac{1}{2}$.

c) Sai: Trong $\triangle IHF$ có $\frac{IJ}{IE} = \frac{IE}{IH} = \frac{2}{3}$ (tính chất trọng tâm) $\Rightarrow EJ \parallel EH$ (định lý đảo Thalet).

Gọi X là giao điểm của IK và HF . Theo định lý Ceva ta có: $\frac{EI}{EH} \cdot \frac{XH}{XF} \cdot \frac{JF}{JI} = 1 \Rightarrow \frac{XH}{XF} = 1$

Vậy X là trung điểm của HF hay IK qua trung điểm của HF .

d) Đúng: Ta có: $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{BG} = \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BK} = \vec{AB} + \frac{2}{3}(\vec{AK} - \vec{AB}) = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AK}$ (1)

Lại có: $\vec{AO} = \frac{1}{2}(\vec{AI} + \vec{AK})$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AO}$.

Kết luận ba điểm A, O, G thẳng hàng và $\frac{OA}{OG} = 3$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AB, AC, BD lần lượt lấy ba điểm E, F, G sao cho $AB = 3AE; AC = 2AF; DB = 4DG$.

a) Gọi H là giao điểm của đường thẳng CD với (EFG) . Khi đó tỉ số $\frac{HC}{HD} = \frac{3}{2}$.

b) Gọi I là giao điểm của đường thẳng AD và (EFG) . Khi đó tỉ số $\frac{IA}{ID} = \frac{2}{3}$.

c) Ba đường thẳng FI, GM, CD đồng quy tại một điểm

d) Gọi J là trung điểm của BC, AJ cắt EF tại K . Khi đó tỉ số $\frac{AK}{AJ} = \frac{3}{2}$.

Lời giải

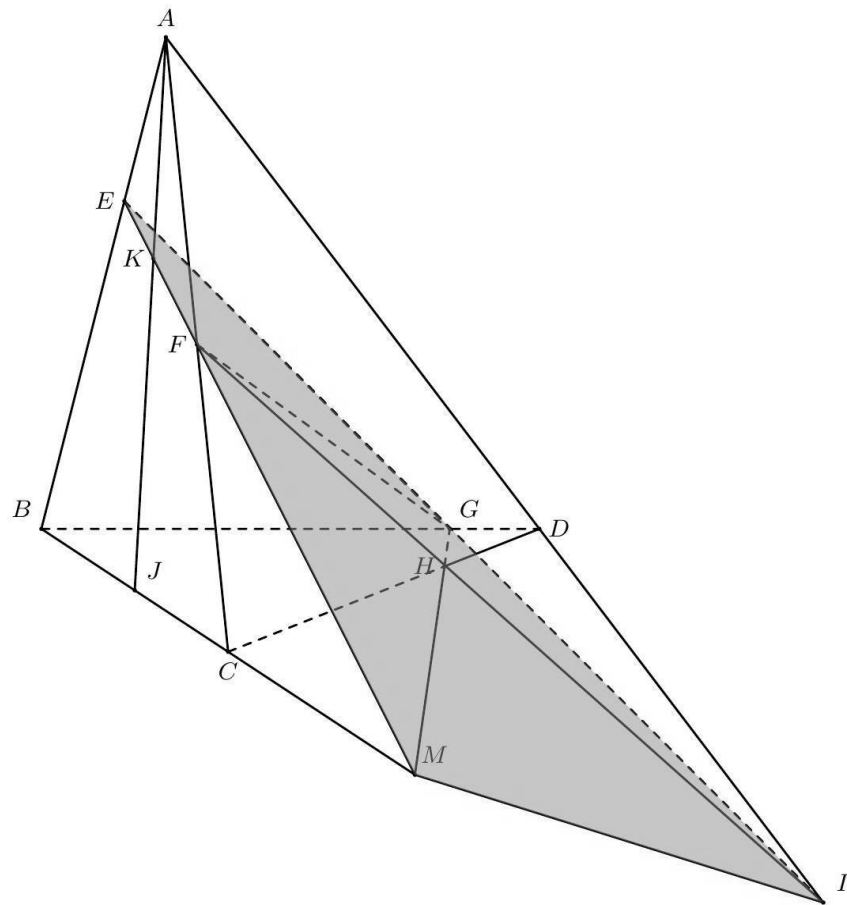
a) Đúng: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (EFG) và (BCD) ta có $G \in (EFG) \cap (BCD)$.

Ta có: $\frac{AE}{AB} \neq \frac{AF}{AC} \Rightarrow EF$ cắt BC

tại $M \Rightarrow M \in (EFG) \cap (BCD)$

Vậy $MG = (EFG) \cap (BCD)$.

Trong (BCD) gọi



$H = MG \cap CD \Rightarrow H = CD \cap (EFG)$.

Áp dụng định lý Menelaus trong $\triangle BCA$ với ba điểm thẳng hàng M, E, F ta có:

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1 \Rightarrow \frac{BM}{MC} = 2.$$

Áp dụng định lý Menelaus trong $\triangle BCD$ với ba điểm thẳng hàng M, H, G ta có:

$$\frac{DG}{DB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CH}{HD} = 1 \Rightarrow \frac{CH}{HD} = \frac{3}{2}.$$

b) Sai: Tìm giao điểm I của đường thẳng AD và (EFG) . Tính tỉ số $\frac{IA}{ID}$.

Ta có $\frac{BE}{BA} \neq \frac{BG}{BD} \Rightarrow EG$ cắt AD tại điểm $I \Rightarrow I = AD \cap (EFG)$.

Áp dụng định lý Menelaus trong $\triangle ABD$ với ba điểm thẳng hàng E, G, I ta có:

$$\frac{BE}{EA} \cdot \frac{AI}{ID} \cdot \frac{DG}{GB} = 1 \Rightarrow \frac{AI}{ID} = \frac{3}{2}.$$

c) Đúng: Chứng minh ba đường thẳng FI, GM, CD đồng quy.

$$F \in (EFG) \cap (ACD); H \in (EFG) \cap (ACD); I \in (EFG) \cap (ACD).$$

Suy ra ba điểm F, H, I thẳng hàng. Vậy ba đường thẳng FI, GM, CD đồng quy.

d) Sai: Gọi J là trung điểm của BC , AJ cắt EF tại K . Tính tỉ số $\frac{AK}{AJ}$.

Áp dụng định lý Menelaus trong $\triangle ABJ$ với ba điểm thẳng hàng E, F, M ta có:

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BM}{MJ} \cdot \frac{JK}{KA} = 1 \Rightarrow \frac{JK}{KA} = \frac{3}{2}. \text{ Vậy } \frac{AK}{AJ} = \frac{2}{3}.$$

