

BÀI

03

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG

A

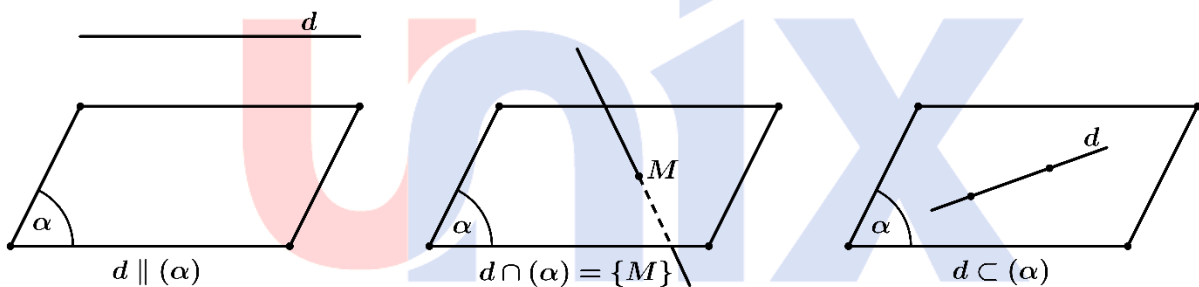
LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Đường thẳng song song với mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) . Nếu d và (α) không có điểm chung thì ta nói d song song với (α) hay (α) song song với d và kí hiệu là $d \parallel (\alpha)$ hay $(\alpha) \parallel d$.

Ngoài ra:

- Nếu d và (α) có một điểm chung duy nhất M thì ta nói d và (α) cắt nhau tại điểm M và kí hiệu $d \cap (\alpha) = \{M\}$ hay $d \cap (\alpha) = M$.
- Nếu d và (α) có nhiều hơn một điểm chung thì ta nói d nằm trong (α) hay (α) chứa d và kí hiệu $d \subset (\alpha)$ hay $(\alpha) \supset d$.



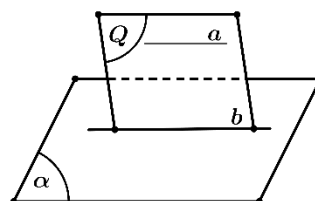
Nhận xét:

- Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng đồng phẳng và không có điểm chung.
- Có đúng một mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song.
- Hai đường thẳng không có điểm chung thì có thể song song hoặc chéo nhau.

2 Điều kiện và tính chất của đường thẳng song song với mặt phẳng

Tính chất 1: Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nằm trong (P) thì a song song với (P) .

Kí hiệu: $\begin{cases} a \parallel d \\ d \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P)$

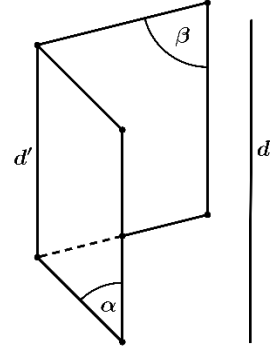


Tính chất 2: Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) . Nếu mặt phẳng (Q) chứa a và cắt (P) theo giao tuyến b thì b song song với a .

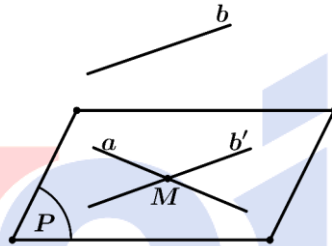
Kí hiệu:
$$\begin{cases} a // (P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \end{cases} \Rightarrow a // b$$

Chú ý 1: Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng cũng song song với đường thẳng đó.

Kí hiệu:
$$\begin{cases} d // (\alpha) \\ d // (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d' \end{cases} \Rightarrow d // d'$$



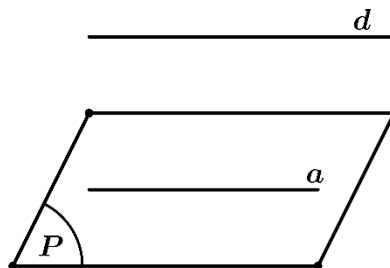
Chú ý 2: Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.



B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Nhận biết và chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Phương pháp: Để chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) ta chứng minh d không nằm trong (P) và song song với một đường thẳng a nào đó nằm trong (P) .



BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Chứng minh rằng $AB // (SCD)$

Lời giải

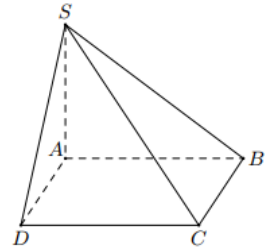
Tư vấn hướng nghiệp cho học sinh bằng phân tích nhân tướng học – xem chỉ tay – tử vi

Nếu đường thẳng AB và mặt phẳng (SCD) có điểm chung là M thì điểm M nằm trên cả hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SCD) suy ra điểm M nằm trên CD .

Do đó M là điểm chung của hai đường thẳng AB và CD .

Điều này không xảy ra vì $AB \parallel CD$.

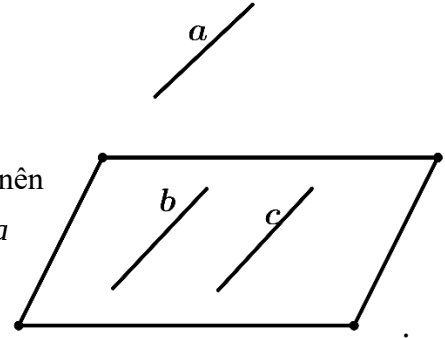
Vậy $AB \parallel (SCD)$.



Bài tập 2: Cho ba đường thẳng a, b, c đôi một song song với nhau và không cùng nằm trong một mặt phẳng. Chứng minh rằng đường thẳng a song song với mặt phẳng (b, c) .

Lời giải

Ba đường thẳng a, b, c không cùng nằm trong một mặt phẳng nên đường thẳng a không nằm trong $mp(b, c)$. Vì đường thẳng a song song với đường thẳng b và đường thẳng b nằm trong $mp(b, c)$ nên đường thẳng a song song với mặt phẳng (b, c) .



Bài tập 3: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABMN$ không đồng phẳng. Xác định vị trí tương đối của mặt phẳng $(ABCD)$ lần lượt với các đường thẳng CD, BD và BN .

Lời giải

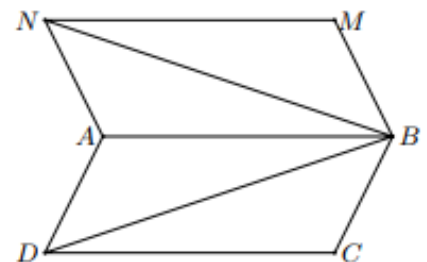
Nếu CD có điểm chung O với $(ABMN)$ thì O thuộc giao tuyến AB của hai mp $(ABCD)$ và $(ABMN)$ suy ra CD cắt AB (mâu thuẫn với giả thiết $ABCD$ là hình bình hành).

BD có một điểm chung duy nhất B với $(ABMN)$ suy ra

BD cắt $(ABMN)$ tại B

BN có hai điểm chung B và N với $(ABMN)$ suy ra

$BN \subset (ABMN)$.



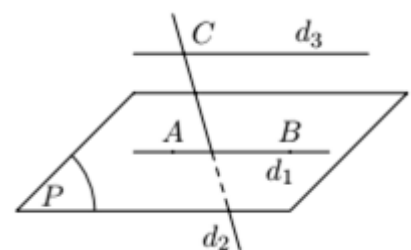
Bài tập 4: Cho hai điểm A, B cùng thuộc mặt phẳng (P) và một điểm C không thuộc (P) . Vẽ đường thẳng d_1 đi qua A, B ; d_2 đi qua C và song song AB . Tìm số điểm chung của mỗi đường thẳng vừa vẽ với (P) . Xét vị trí tương đối của mặt phẳng (P) lần lượt đối với các đường thẳng d_1, d_2, d_3 .

Lời giải

Đường thẳng d_1 chứa hai điểm A, B thuộc (P) , vậy $d_1 \subset (P)$.

Đường thẳng d_2 không nằm trong (P) , vì có chứa điểm C không thuộc (P) . Mặt khác, d_2 lại có điểm A chung với (P) , suy ra d_2 cắt (P) tại A .

Đường thẳng d_3 không nằm trong (P) và song song với đường thẳng d_1 nằm trong (P) , suy ra $d_3 \parallel (P)$.



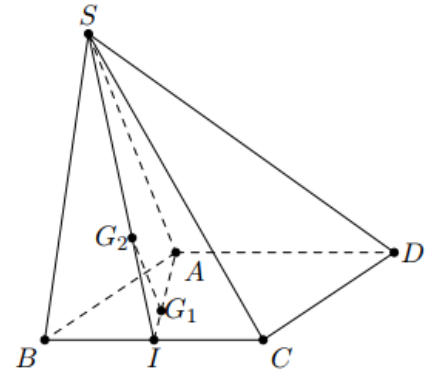
Bài tập 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và SBC . Chứng minh $G_1G_2 \parallel (SAB)$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm BC .

Xét tam giác SIA ta có: $\frac{IG_1}{IA} = \frac{IG_2}{IS} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 \parallel SA$

$$\text{Do đó } \begin{cases} G_1G_2 \not\subset (SAB) \\ G_1G_2 \parallel SA \\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow G_1G_2 \parallel (SAB).$$

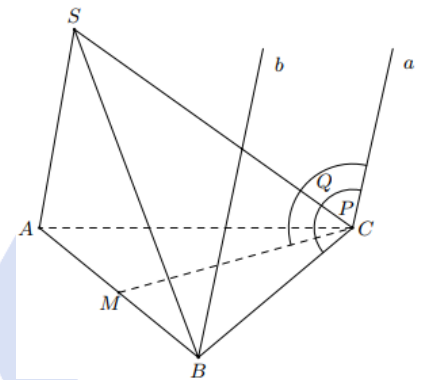


Bài tập 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có M là trung điểm của AB . Gọi (P) là mặt phẳng chứa CB và song song với SA , (Q) là mặt phẳng chứa CM và song song với SA .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) .
- Vẽ đường thẳng b qua B và $b \parallel SA$. Chứng minh $b \subset (P)$.

Lời giải

- Ta có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng có điểm chung C và cùng song song với SA , suy ra giao tuyến của (P) và (Q) là đường thẳng a đi qua C và $a \parallel SA$.
- Ta có: $SA \parallel (P)$ và $B \in (P)$, b là đường thẳng đi qua B và $b \parallel SA$ suy ra $b \subset (P)$.



Bài tập 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên các cạnh SB và AD lần lượt lấy các điểm N, P sao cho $\frac{SN}{SB} = \frac{PD}{AD}$. Chứng minh $NP \parallel (SCD)$

Lời giải

Trong mặt phẳng (SBC) kẻ $NR \parallel BC$ với $R \in SC$ và kẻ $RQ \parallel SB$ với $Q \in BC$ thì ta có:

$$\frac{SN}{SB} = \frac{SR}{SC} \text{ và } \frac{SR}{SC} = \frac{BQ}{BC}.$$

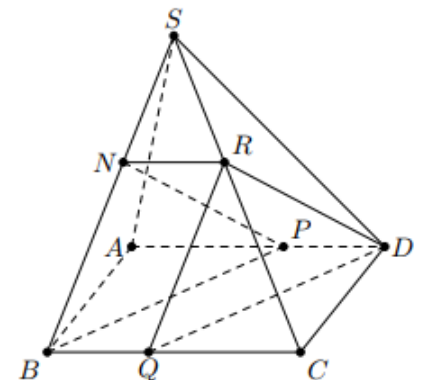
Kết hợp với giả thiết $\frac{SN}{SB} = \frac{PD}{AD}$ ta được $\frac{BQ}{BC} = \frac{PD}{AD}$ suy ra

$$BQ = PD \text{ do } BC = AD.$$

Lại có $NR = BQ$ suy ra $NR = PD$. Hơn nữa ta có $\begin{cases} NR \parallel BQ \\ PD \parallel BQ \end{cases}$ suy

ra $NR \parallel PD$.

Do đó $PDRN$ là hình bình hành nên $NP \parallel DR$. Ta có: $\begin{cases} NP \not\subset (SCD) \\ NP \parallel DR \\ DR \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow NP \parallel (SCD)$



Bài tập 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N, E lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD, SA (hình dưới). Chứng minh rằng

- MN song song với hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) .
- SB và SC song song với mặt phẳng (MNE) .

Lời giải

a) Do M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD suy ra $MN \parallel BC, MN \parallel AD$.

Ta có MN không nằm trong (SBC) và song song với BC nằm trong (SBC)

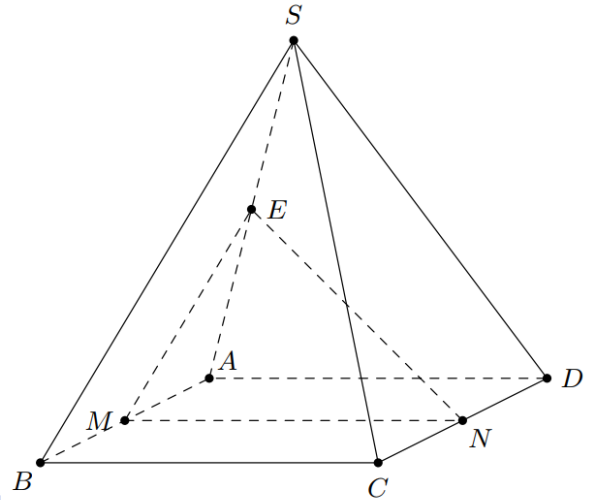
Suy ra $MN \parallel (SBC)$ và chứng minh tương tự $MN \parallel (SAD)$.

b) Do M, E lần lượt là trung điểm của AB, SA suy ra ME là đường trung bình tam giác SAB hay $ME \parallel SB$.

Ta có SB không nằm trong (MNE) và song song với ME nằm trong $(MNE) \Rightarrow SB \parallel (MNE)$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD do $ABCD$ là hình bình hành nên O là trung điểm của AC mà E là trung điểm của SA nên OE là đường trung bình của tam giác $SAC \Rightarrow OE \parallel SC$

Ta có SC không nằm trong (MNE) và song song với OE nằm trong $(MNE) \Rightarrow SC \parallel (MNE)$.



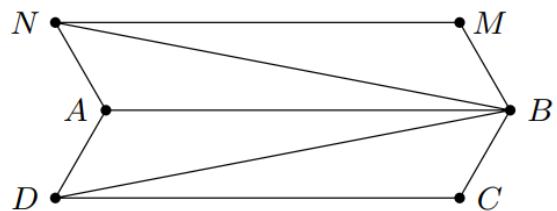
Bài tập 9: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABMN$ không đồng phẳng, xác định vị trí tương đối của mặt phẳng $(ABMN)$ với các đường thẳng CD, BD và BN .

Lời giải

Nếu CD có điểm chung O với mặt phẳng $(ABMN)$ thì O thuộc giao tuyến AB của hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(ABMN)$, suy ra AB cắt CD (Mâu thuẫn với giả thiết $ABCD$ là hình bình hành). Vậy $CD \parallel (ABMN)$

Đường thẳng BD có một điểm chung duy nhất B với $(ABMN) \Rightarrow BD$ cắt $(ABMN)$ tại B .

Đường thẳng BN có hai điểm chung với $(ABMN)$ nên $BN \subset (ABMN)$.



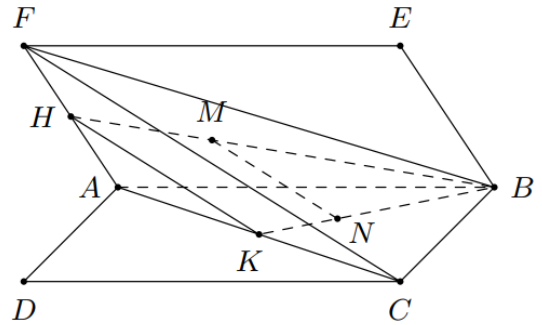
Bài tập 10: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABMN$ không cùng nằm trong một phẳng. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABF và ABC . Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với mặt phẳng (ACF) .

Lời giải

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AF, AC

$$\text{Ta có } \frac{BM}{BH} = \frac{BN}{BK} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN \parallel HK$$

Mà $HK \subset (ACF)$ và $MN \not\subset (ACF)$ nên suy ra $MN \parallel (ACF)$.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối của a và (P) ?

- A. 2. **B. 3.** C. 1. D. 4.

Lời giải

Có 3 vị trí tương đối: a nằm trong (P) , a song song với (P) và a cắt (P) .

Câu 2: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a \parallel b$, $b \parallel (\alpha)$. Khi đó:

- A. $a \parallel (\alpha)$. B. $a \subset (\alpha)$. C. a cắt (α) . **D. $a \parallel (\alpha)$ hoặc $a \subset (\alpha)$.**

Lời giải

Ta có: $a \parallel (\alpha)$ hoặc $a \subset (\alpha)$.

Câu 3: Cho $d \parallel (\alpha)$, mặt phẳng (β) qua d cắt (α) theo giao tuyến d' . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $d \parallel d'$.** B. d cắt d' . C. d và d' chéo nhau. D. $d \equiv d'$.

Lời giải

Ta có: $d' = (\alpha) \cap (\beta)$. Do d và d' cùng thuộc (β) nên d cắt d' hoặc $d \parallel d'$.

Nếu d cắt d' . Khi đó, d cắt (α) . Vậy $d \parallel d'$.

Câu 4: Có bao nhiêu mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng chéo nhau?

- A. 1. B. 2. C. 3. **D. Vô số.**

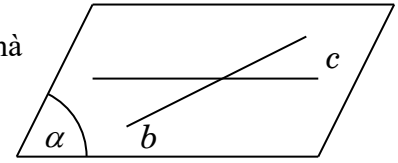
Lời giải

Gọi a và b là 2 đường thẳng chéo nhau, c là đường thẳng song song với a và cắt b .

Gọi $(\alpha) \equiv (b, c)$ do $a \parallel c \Rightarrow a \parallel (\alpha)$. Giả sử $(\beta) \parallel (\alpha)$ mà $b \in (\alpha) \Rightarrow b \parallel (\beta)$.

Mặt khác: $a \parallel (\alpha) \Rightarrow a \parallel (\beta)$.

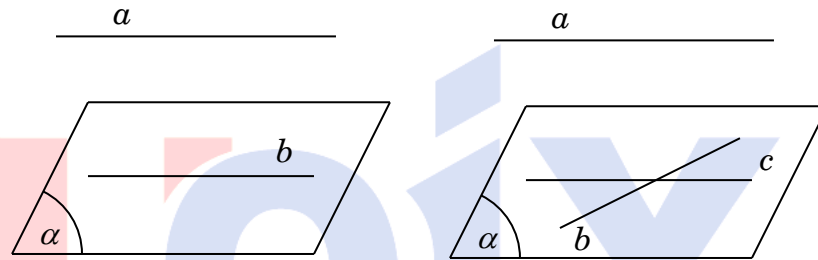
Có vô số mặt phẳng $(\beta) \parallel (\alpha)$. Vậy có vô số mặt phẳng song song với 2 đường thẳng chéo nhau.



Câu 5: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a \parallel (\alpha)$, $b \subset (\alpha)$. Khi đó:

- A. $a \parallel b$. B. a, b chéo nhau.
C. $a \parallel b$ hoặc a, b chéo nhau. D. a, b cắt nhau.

Lời giải.



Vì $a \parallel (\alpha)$ nên tồn tại đường thẳng $c \subset (\alpha)$ thỏa mãn $a \parallel c$. Suy ra b, c đồng phẳng và xảy ra các trường hợp sau:

Nếu b song song hoặc trùng với c thì $a \parallel b$.

Nếu b cắt c thì b cắt $(\beta) \equiv (a, c)$ nên a, b không đồng phẳng. Do đó a, b chéo nhau.

Câu 6: Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) . Giả sử $b \not\subset (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$. B. Nếu b cắt (α) thì b cắt a . C. Nếu $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.
D. Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt cả a và b .

Lời giải

A sai: Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$ hoặc a, b chéo nhau.

B sai: Nếu b cắt (α) thì b cắt a hoặc a, b chéo nhau.

D sai: Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt a hoặc song song với a .

Câu 7: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. a và b không có điểm chung.

Tư vấn hướng nghiệp cho học sinh bằng phân tích nhân tướng học – xem chỉ tay – tử vi

- B. a và b hoặc song song hoặc chéo nhau.
- C. a và b hoặc song song hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau.
- D. a và b chéo nhau.

Lời giải

Ta có: a và b hoặc song song hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau.

Câu 8: Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng song song a và b . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Nếu (P) song song với a thì (P) cũng song song với b .
- B. Nếu (P) cắt a thì (P) cũng cắt b .
- C. Nếu (P) chứa a thì (P) cũng chứa b .
- D. Các khẳng định A, B, C đều sai.

Lời giải.

Gọi $(Q) \equiv (a, b)$.

A sai: Khi $b = (P) \cap (Q) \Rightarrow b \subset (P)$.

C sai: Khi $(P) \neq (Q) \Rightarrow b // (P)$.

Xét khẳng định B, giả sử (P) không cắt b khi đó $b \subset (P)$ hoặc $b // (P)$. Khi đó, vì $b // a$ nên $a \subset (P)$ hoặc a cắt (P) .

Câu 9: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Có duy nhất một mặt phẳng song song với a và b .
- B. Có duy nhất một mặt phẳng qua a và song song với b .
- C. Có duy nhất một mặt phẳng qua điểm M , song song với a và b .
- D. Có vô số đường thẳng song song với a và cắt b .

Lời giải.

Có có vô số mặt phẳng song song với 2 đường thẳng chéo nhau.

Câu 10: Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau a, b, c . Gọi (P) là mặt phẳng qua a , (Q) là mặt phẳng qua b sao cho giao tuyến của (P) và (Q) song song với c . Có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng (P) và (Q) thỏa mãn yêu cầu trên?

- A. Một mặt phẳng (P) , một mặt phẳng (Q) .
- B. Một mặt phẳng (P) , vô số mặt phẳng (Q) .
- C. Một mặt phẳng (Q) , vô số mặt phẳng (P) .
- D. Vô số mặt phẳng (P) và (Q) .

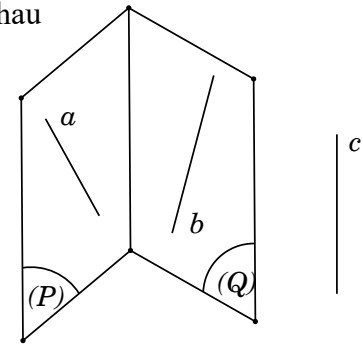
Lời giải.

Vì c song song với giao tuyến của (P) và (Q) nên $c // (P)$ và $c // (Q)$

Khi đó, (P) là mặt phẳng chứa a và song song với c , mà a và c chéo nhau nên chỉ có một mặt phẳng như vậy.

Tương tự cũng chỉ có một mặt phẳng (Q) chứa b và song song với c .

Vậy có nhiều nhất một mặt phẳng (P) và một mặt phẳng (Q) thỏa yêu cầu bài toán.



Câu 11: Cho $d \parallel (\alpha)$, mặt phẳng (β) qua d cắt (α) theo giao tuyến d' . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. d cắt d' . **B.** $d \parallel d'$. C. d và d' chéo nhau. **D.** $d \equiv d'$.

Lời giải

Ta có $d' = (\alpha) \cap (\beta)$. Do d và d' cùng thuộc (β) nên d cắt d' hoặc $d \parallel d'$.

Nếu d cắt d' thì d cắt (α) (mâu thuẫn với giả thiết).

Vậy $d \parallel d'$.

Câu 12: Trong không gian, cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) . Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** Nếu a và (P) có điểm chung thì a không song song với (P) .
B. Nếu a và (P) có điểm chung thì a và (P) cắt nhau.
C. Nếu a song song với b và b nằm trong (P) thì a song song với (P) .
D. Nếu a và b song song với (P) thì a song song với b .

Lời giải

Mệnh đề “Nếu a và (P) có điểm chung thì a không song song với (P) ” đúng.

Mệnh đề “Nếu a và (P) có điểm chung thì a và (P) cắt nhau” sai.

Mệnh đề “Nếu a song song với b và b nằm trong (P) thì a song song với (P) ” sai vì a và b có thể cùng thuộc (P) .

Mệnh đề “Nếu a và b song song với (P) thì a song song với b ” sai.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đường thẳng AD song song với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng dưới đây?

- A.** (SBC) . **B.** $(ABCD)$. **C.** (SAC) . **D.** (SAB) .

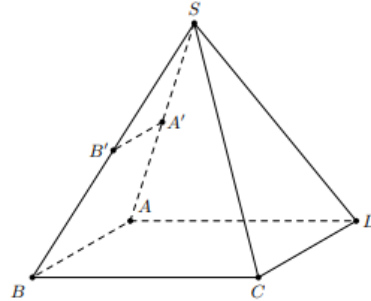
Lời giải

Do $AD \parallel BC, AD \not\subset (SBC), BC \subset (SBC)$ nên $AD \parallel (SBC)$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi A', B' lần lượt là trung điểm của SA, SB . Đường thẳng $A'B'$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

- A. (SAB) . B. (SBC) . C. (SCD) . D. (SAD) .

Lời giải



Vì $A'B'$ song song với AB và AB song song với CD nên $A'B'$ song song với CD .

Hơn nữa, $A'B'$ không chứa trong (SCD) nên $A'B'$ song song với (SCD) .

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác BCD và ACD . Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $G_1G_2 \parallel (SAB)$. B. $G_1G_2 = \frac{2}{3} AB$.
C. $G_1G_2 \parallel (ABC)$. D. Ba đường BG_1, AG_2, CD đồng quy.

Lời giải

Gọi M là trung điểm của CD .

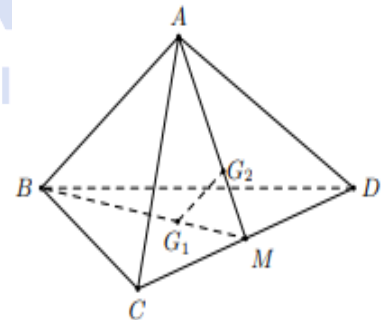
Do G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác BCD và ACD nên ta có

$$\frac{MG_1}{MB} = \frac{MG_2}{MC} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 \parallel AB, \frac{G_1G_2}{AB} = \frac{1}{3}$$

Do $G_1G_2 \parallel AB \Rightarrow G_1G_2 \parallel (ABD)$ và $G_1G_2 \parallel (ABC)$.

Dễ thấy, ba đường BG_1, AG_2, CD đồng quy tại M . Vậy mệnh đề

" $G_1G_2 = \frac{2}{3} AB$ " là mệnh đề sai.



Câu 16: Cho hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ cắt nhau và cùng song song với đường thẳng d . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Giao tuyến của $(\alpha), (\beta)$ trùng với d .
B. Giao tuyến của $(\alpha), (\beta)$ song song hoặc trùng với d .
C. Giao tuyến của $(\alpha), (\beta)$ cắt d .
D. Giao tuyến của $(\alpha), (\beta)$ song song với d .

Lời giải

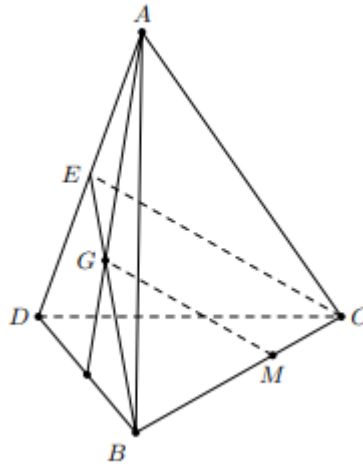
Do d không nằm trên mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ nên giao tuyến không thể trùng với d .

Theo tính chất giao tuyến, ta có giao tuyến song song với d .

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD . M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Khi đó đường thẳng MG song song với mặt phẳng nào dưới đây?

- A. (ACD) . B. (BCD) . C. (ABD) . D. (ABC) .

Lời giải



Gọi E là trung điểm AD . Xét tam giác BCE có $\frac{BG}{BE} = \frac{BM}{BC} = \frac{2}{3}$ nên suy ra $MG \parallel (ACD)$.

Câu 18: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $AM = 3MC$. Lấy N trên cạnh $C'D$ sao cho $C'N = xC'D$. Với giá trị nào của x thì $MN \parallel BD'$.

- A. $x = \frac{2}{3}$. B. $x = \frac{1}{3}$. C. $x = \frac{1}{4}$. D. $x = \frac{1}{2}$.

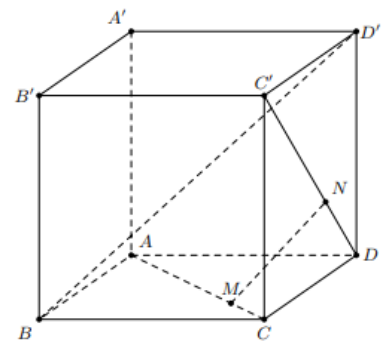
Lời giải

Từ giả thiết, ta có M là trọng tâm tam giác BCD .

Gọi O, I lần lượt là trung điểm của AC và DD' . Khi đó, ta có $BD' \parallel (IAC)$.

Trong $(CDD'C')$ gọi $N' = CI \cap C'D$ khi đó N' là trọng tâm tam giác CDD' .

Do đó $\frac{CM}{CO} = \frac{2}{3} = \frac{CN'}{CI} \Rightarrow MN' \parallel OI$ mà $OI \parallel BD'$ nên $MN \parallel BD'$. Vậy $N' \equiv N$ và $x = \frac{2}{3}$.



Câu 19: Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau a, b, c . Gọi (P) là mặt phẳng qua a , (Q) là mặt phẳng qua b sao cho giao tuyến của (P) và (Q) song song với c . Có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng (P) và (Q) thỏa mãn yêu cầu trên?

- A. Một mặt phẳng (P) , một mặt phẳng (Q) . B. Một mặt phẳng (P) , vô số mặt phẳng (Q) .

C. Một mặt phẳng (Q) , vô số mặt phẳng (P) . D. Vô số mặt phẳng (P) và (Q) .

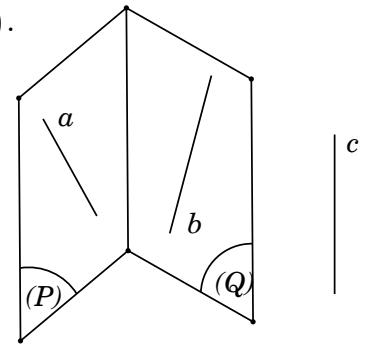
Lời giải

Vì c song song với giao tuyến của (P) và (Q) nên $c \parallel (P)$ và $c \parallel (Q)$.

Khi đó (P) là mặt phẳng chứa a và song song với c , mà a và c chéo nhau nên chỉ có một mặt phẳng như vậy.

Tương tự cũng chỉ có một mặt phẳng (Q) chứa b và song song với c .

Vậy có nhiều nhất một mặt phẳng (P) và một mặt phẳng (Q) thỏa yêu cầu bài toán.



Câu 20: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $MN \parallel (ABCD)$. B. $MN \parallel (SAB)$. C. $MN \parallel (SCD)$. D. $MN \parallel (SBC)$.

Lời giải

Xét tam giác SAC có M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC .

Suy ra $MN \parallel AC$ mà $AC \subset (ABCD) \Rightarrow MN \parallel (ABCD)$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M và N là hai điểm trên SA, SB

sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{1}{3}$. Vị trí tương đối giữa MN và $(ABCD)$ là:

A. MN nằm trên $(ABCD)$. B. MN cắt $(ABCD)$.
C. MN song song $(ABCD)$. D. MN và $(ABCD)$ chéo nhau.

Lời giải

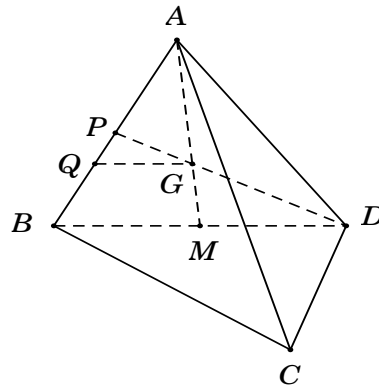
Theo định lý Talet, ta có $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB}$ suy ra MN song song với AB .

Mà AB nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ suy ra $MN \parallel (ABCD)$.

Câu 22: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD , Q thuộc cạnh AB sao cho $AQ = 2QB$, P là trung điểm của AB . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $MN \parallel (BCD)$. B. $GQ \parallel (BCD)$.
C. MN cắt (BCD) . D. Q thuộc mặt phẳng (CDP) .

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BD . Vì G là trọng tâm tam giác $ABD \Rightarrow \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$.

Điểm $Q \in AB$ sao cho $AQ = 2QB \Leftrightarrow \frac{AQ}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AG}{AM} = \frac{AQ}{AB} \Rightarrow GQ \parallel BD$.

Mặt khác BD nằm trong mặt phẳng (BCD) suy ra $GQ \parallel (BCD)$.

Câu 23: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O, O_1 lần lượt là tâm của $ABCD, ABEF$. M là trung điểm của CD . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $OO_1 \parallel (BEC)$.

B. $OO_1 \parallel (AFD)$.

C. $OO_1 \parallel (EFM)$.

D. MO_1 cắt (BEC) .

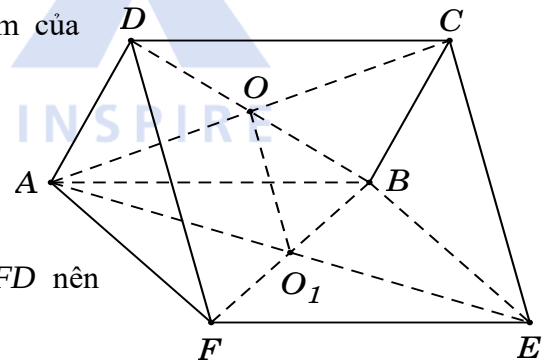
Lời giải

Xét tam giác ACE có O, O_1 lần lượt là trung điểm của AC, AE .

Suy ra OO_1 là đường trung bình trong tam giác $ACE \Rightarrow OO_1 \parallel EC$.

Tương tự, OO_1 là đường trung bình của tam giác BFD nên $OO_1 \parallel FD$.

Vậy $OO_1 \parallel (BEC)$, $OO_1 \parallel (AFD)$ và $OO_1 \parallel (EFC)$. Chú ý rằng: $(EFC) = (EFM)$.



Câu 24: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AC, BD, AB, CD, AD, BC . Bốn điểm nào sau đây không đồng phẳng?

A. P, Q, R, S .

B. M, P, R, S .

C. M, R, S, N .

D. M, N, P, Q .

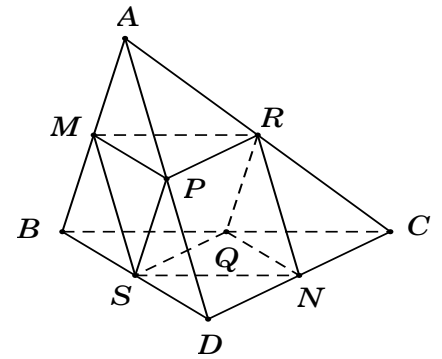
Lời giải

Theo tính chất của đường trung bình của tam giác ta có

$PS \parallel AC \parallel QR$ suy ra P, Q, R, S đồng phẳng

Tương tự, ta có được $PM \parallel BC \parallel NQ$ suy ra P, M, N, Q đồng phẳng.

Và $NR \parallel CD \parallel SN$ suy ra M, R, S, N đồng phẳng.



Câu 25: Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ các tia Ax, By, Cz, Dt song song, cùng hướng nhau và không nằm trong $(ABCD)$. Mặt phẳng (α) song song với AB , và cắt Ax, By, Cz, Dt lần lượt tại các điểm A', B', C', D' . Biết O là tâm hình bình hành $ABCD$, O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

B. $(AA'B'B) \parallel C'D'$.

C. $AA' = CC'$ và $BB' = DD'$.

D. $OO' \parallel AA'$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} \alpha \parallel AB \\ \alpha \cap (ABB'A') = A'B' \end{cases} \Rightarrow A'B' \parallel AB \parallel CD$

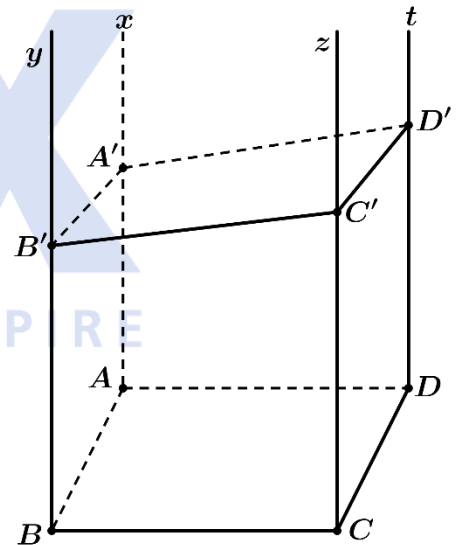
$\Rightarrow \begin{cases} A'B' \parallel CD \\ \alpha \cap (DD'C'C) = C'D' \end{cases} \Rightarrow C'D' \parallel A'B' \Rightarrow C'D' \parallel (AA'B'B)$

Dễ thấy $C'D' \parallel A'B' \parallel AB \parallel CD$ theo câu A mà $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$

$\Rightarrow AA'B'B, CC'D'D, ABCD$ là các hình bình hành

$\Rightarrow A'B' \parallel C'D', A'B' = C'D'$ suy ra $A'B'C'D'$ là hình bình hành

Mặt khác: O, O' lần lượt là trung điểm của $AC, A'C'$ nên OO' là đường trung bình trong hình thang $AA'C'C$ do đó $OO' \parallel AA'$.



PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng song song a và b . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Có vô số mặt phẳng chứa đường thẳng a mà không chứa đường thẳng b

b) Nếu mặt phẳng (P) song song với đường thẳng a thì mặt phẳng (P) cũng song song với đường thẳng b .

c) Nếu mặt phẳng (P) cắt đường thẳng a thì mặt phẳng (P) cũng cắt đường thẳng b .

d) Nếu mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a thì mặt phẳng (P) cũng chứa đường thẳng b .

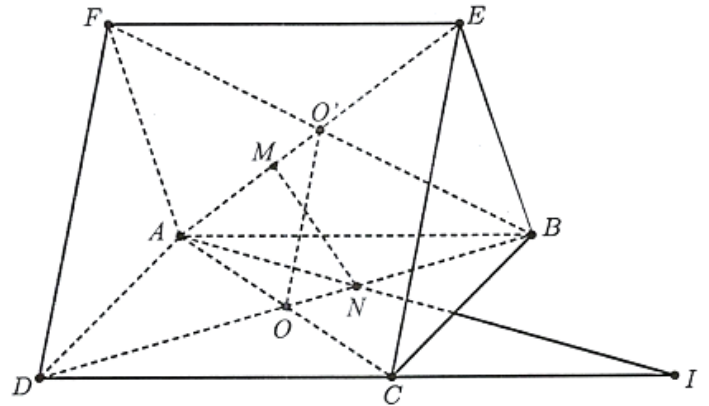
a) Đúng: Ta có OO' là đường trung bình của tam giác BDF nên $OO' \parallel DF$

Mặt khác $DF \subset (ADF)$ suy ra $OO' \parallel (ADF)$

b) Sai: Tương tự OO' là đường trung bình của tam giác ACE nên $OO' \parallel CE$ mà $CE \subset (BCE)$ suy ra $OO' \parallel (BCE)$

c) Sai: Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $I = AN \cap CD$. Do $AB \parallel CD$ nên $\frac{AN}{AI} = \frac{BN}{BD} = \frac{1}{3}$.

d) Đúng: Mặt khác: $\frac{AM}{AE} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AN}{AI} = \frac{AM}{AE} \Rightarrow MN \parallel IE$ mà $IE \subset (CDFE) \Rightarrow MN \parallel (CDFE)$.



Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và SCD ; E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\frac{SJ}{SF} = \frac{2}{3}$

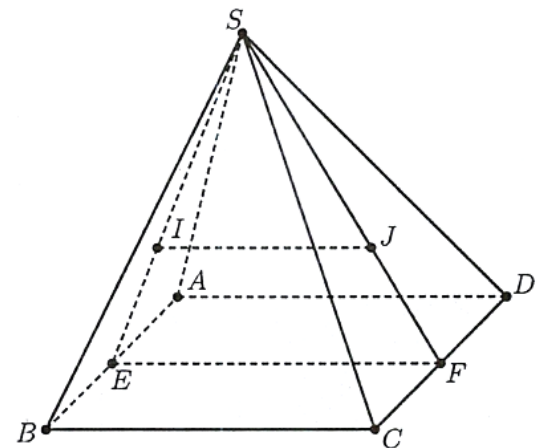
b) $IJ \parallel (ABCD)$.

b) BC song song với các mặt phẳng $(SAD), (SEF)$

d) BC cắt mặt phẳng (AIJ)

Lời giải

a) Đúng: Do I, J lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và SCD nên



$$\frac{SI}{SE} = \frac{SJ}{SF} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ \parallel EF \text{ mà } EF \subset (ABCD) \Rightarrow IJ \parallel (ABCD)$$

b) Đúng: $\frac{SI}{SE} = \frac{SJ}{SF} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ \parallel EF$ mà $EF \subset (ABCD) \Rightarrow IJ \parallel (ABCD)$

c) Đúng: Vì $BC \parallel AD, AD \subset (SAD) \Rightarrow BC \parallel (SAD)$.

d) Sai: Vì EF là đường trung bình của hình bình hành $ABCD$ nên $BC \parallel EF, EF \subset (SEF) \Rightarrow BC \parallel (SEF)$.

Ta có: $IJ \parallel EF, EF \parallel BC \Rightarrow BC \parallel IJ$ mà $IJ \subset (AIJ) \Rightarrow BC \parallel (AIJ)$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD và E là điểm trên cạnh DC sao cho $DC = 3DE, I$ là trung điểm AD . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) OI song song với mặt phẳng (SAB) b) OI song song với mặt phẳng (SCD)
c) IE song song với AC d) $GE \parallel (SBC)$

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\begin{cases} OI \not\subset (SAB), AB \subset (SAB) \\ OI \parallel AB \end{cases} \Rightarrow OI \parallel (SAB)$

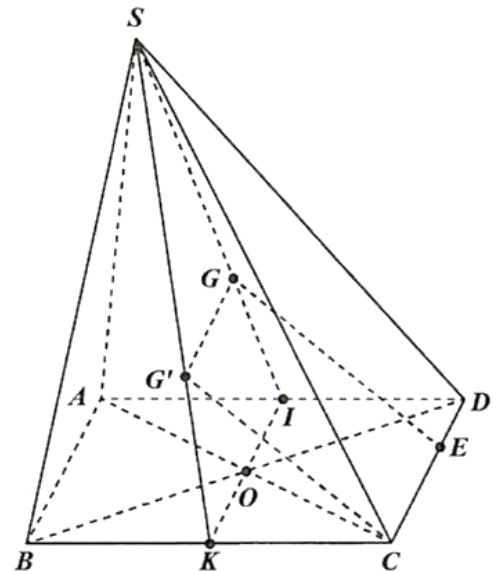
Tương tự $\begin{cases} OI \not\subset (SCD), CD \subset (SCD) \\ OI \parallel CD \end{cases} \Rightarrow OI \parallel (SCD)$.

b) Đúng: Vì $\frac{DI}{DA} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3} = \frac{DE}{DC}$ nên IE không song song với AC . Trong hình chữ nhật $ABCD$ ta gọi $P = IE \cap BC \Rightarrow P = IE \cap (SBC)$.

Gọi K là trung điểm của BC và G' là trọng tâm tam giác SBC .

Khi đó $\frac{SG'}{SK} = \frac{SG}{SI} = \frac{G'G}{KI} = \frac{2}{3}$ suy ra $G'G \parallel KI \parallel CE$
 $\Rightarrow G'G = \frac{2}{3}KI = \frac{2}{3}CD = CE$.

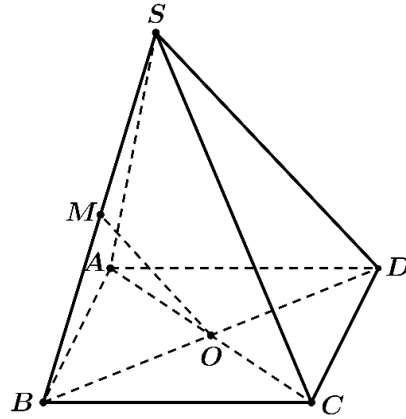
Do đó tứ giác $G'GEC$ là hình bình hành suy ra $CG' \parallel CE \Rightarrow CG \parallel (SBC)$.



PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O . Điểm M thuộc cạnh SB . Biết $OM \parallel (SCD)$. Tính tỉ số của $\frac{SM}{MB}$.

Lời giải



Trong mặt phẳng (SBD) xét hai đường thẳng OM và SD .

Vì $SD \subset (SCD)$ và $OM \parallel (SCD)$ nên $OM \cap SD = \emptyset$ hay $OM \parallel SD$.

Suy ra OM là đường trung bình của tam giác SBD nên M là trung điểm SB hay $\frac{SM}{MB} = 1$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (α) qua BD và song song với SA , mặt phẳng (α) cắt SC tại K . Biết rằng $SK = m.KC$ thì giá trị của m bằng bao nhiêu?

Lời giải

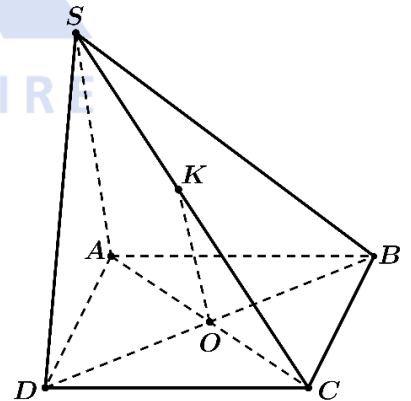
Gọi O là giao điểm của AC và BD . Do mặt phẳng (α) qua BD nên $O \in (\alpha)$.

Trong tam giác SAC kẻ OK song song SA ($K \in SC$).

$$\text{Do } \begin{cases} (\alpha) \parallel SA \\ OK \parallel SA \Rightarrow OK \subset (\alpha) \Rightarrow SC \cap (\alpha) = \{K\}. \\ O \in (\alpha) \end{cases}$$

Trong tam giác SAC ta có $\begin{cases} OK \parallel SA \\ OA = OC \end{cases} \Rightarrow OK$ là đường trung bình của $\triangle SAC$.

Vậy $SK = KC$ nên khi đó $m = 1$.



Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB là đáy lớn. Biết $AB = 5a, CD = 2a$. Gọi E là điểm thuộc cạnh SB thỏa mãn $\frac{ES}{EB} = \frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Biết rằng CE song song với mặt phẳng (SAD) . Giá trị của $2m + 3n$ bằng

Lời giải

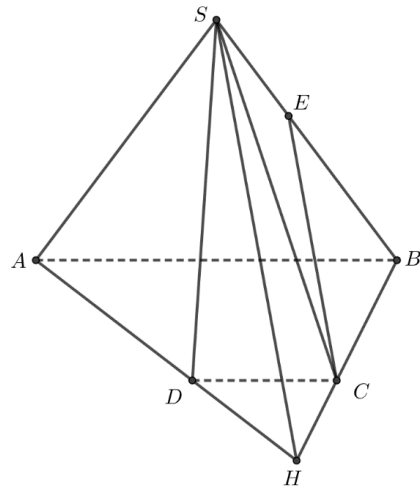
Gọi H là giao điểm của AD và BC trong mặt phẳng $(ABCD)$.

Theo hệ quả Talet ta có: $\frac{HC}{HB} = \frac{CD}{AB} = \frac{2}{5}$

Ta có:
$$\begin{cases} CE \subset (SBH) \\ CE \parallel (SAD) \\ (SBH) \cap (SAD) = SH \end{cases} \Rightarrow CE \parallel SH$$

$$\Rightarrow \frac{SE}{SB} = \frac{HC}{HB} = \frac{2}{5} \Rightarrow SE = \frac{2}{5}SB$$

$$\Rightarrow \frac{ES}{EB} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2m + 3n = 13.$$



Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và E là điểm thuộc cạnh SA thỏa mãn $SE = \frac{m}{n}.SA$ với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Biết rằng GE song song với mặt phẳng (SCD) . Giá trị của $m.n$ bằng

Lời giải

Gọi M là trung điểm của BC , F là giao điểm của AM và CD trong mặt phẳng $(ABCD)$.

Theo định lý Talet, ta có:

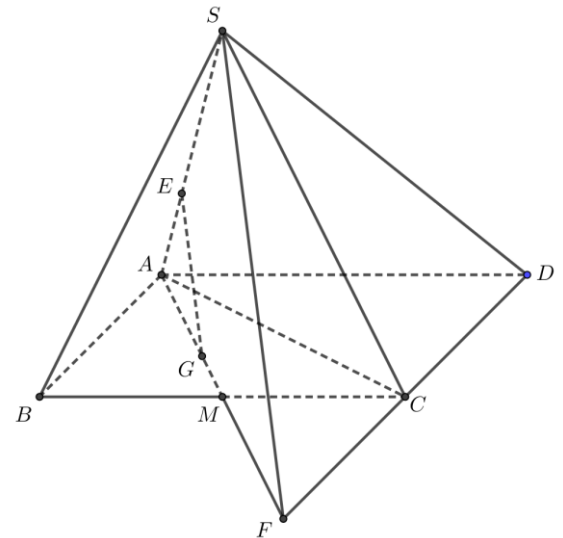
$$\frac{MA}{MF} = \frac{MB}{MC} = 1 \Rightarrow MA = MF \Rightarrow M \text{ là trung điểm của } AF$$

$$\Rightarrow \frac{AG}{AF} = \frac{AM}{AF} = \frac{1}{2}$$

Ta có:
$$\begin{cases} GE \subset (SAF) \\ GE \parallel (SCD) \\ (SAF) \cap (SCD) = SF \end{cases} \Rightarrow GE \parallel SF$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AS} = \frac{AG}{AF} = \frac{1}{2} \Rightarrow AE = \frac{1}{2}AS$$

$$\Rightarrow SE = \frac{1}{2}SA \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{1}{2} \Rightarrow m.n = 1.$$



Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$. Gọi E là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BC = 4BE$. Lấy F thuộc cạnh SA sao cho $FA = k.FS$. Biết rằng EF song song với mặt phẳng (SCD) . Khi đó giá trị của k bằng. (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

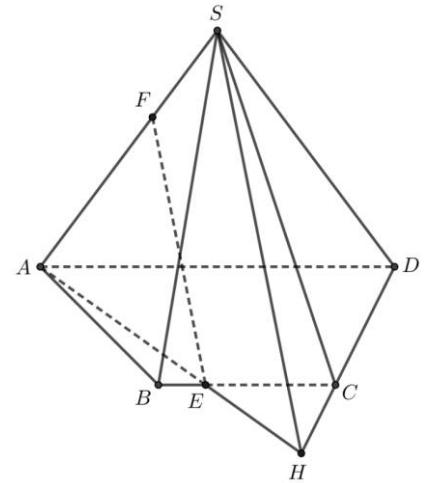
Gọi H là giao điểm của AE và CD trong mặt phẳng $(ABCD)$.

Theo hệ quả Talet, ta có: $\frac{HE}{HA} = \frac{CE}{AD} = \frac{3}{8}$

Ta có: $\begin{cases} EF \subset (SAH) \\ EF \parallel (SCD) \\ (SAH) \cap (SCD) = SH \end{cases} \Rightarrow EF \parallel SH$

$$\Rightarrow \frac{SF}{SA} = \frac{HE}{HA} = \frac{3}{8} \Rightarrow SF = \frac{3}{8} SA$$

$$\Rightarrow FA = \frac{5}{3} FS \Rightarrow k = \frac{5}{3} \approx 1,67$$



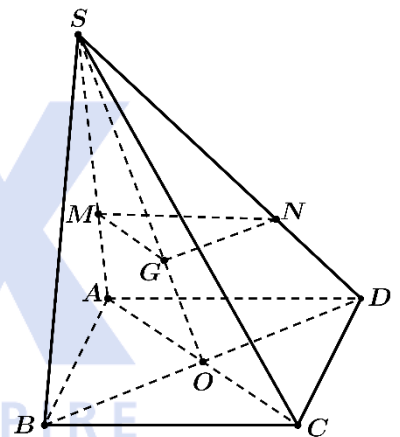
Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAC . Một mặt phẳng song song với AC và BD cắt SA, SB lần lượt tại M và N . Tỉ số $\frac{MN}{AB}$ bằng. (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Do $\begin{cases} (MNG) \parallel AC \\ MG \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow MG \parallel AC \Rightarrow \frac{SM}{SA} = \frac{SG}{SO} = \frac{2}{3}.$

Tương tự do $\begin{cases} (MNG) \parallel BD \\ NG \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow NG \parallel OD \Rightarrow \frac{SN}{SD} = \frac{SG}{SO} = \frac{2}{3}.$

Xét tam giác SAD có $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SD} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN \parallel AD \Rightarrow \frac{MN}{AD} = \frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}.$



-----HẾT-----