

Dạng 3: Xác định thiết diện bằng cách kẻ song song

Phương pháp: Để tìm thiết diện của mặt phẳng (P) qua điểm M và song song với hai cạnh a, b của hình chóp ta làm như sau:

Bước 1: Xét các mặt của hình chóp chứa cạnh a .

Bước 2: Trong mặt phẳng đang xét, từ M vẽ đường thẳng song song với a .

Bước 3: Xét các mặt của hình chóp chứa cạnh b .

Bước 4: Trong mặt phẳng đang xét, từ M vẽ đường thẳng song song với b .

Nối các đoạn giao tuyến lại ta được thiết diện của mặt phẳng (P) với hình chóp.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N là hai điểm trên cạnh AB, CD . Mặt phẳng (P) qua MN và song song với SA . Xác định thiết diện của (P) với hình chóp.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} M \in (P) \cap (SAB) \\ SA \parallel (P) \\ SA \subset (SAB) \end{cases}$ nên giao tuyến của mặt phẳng (P)

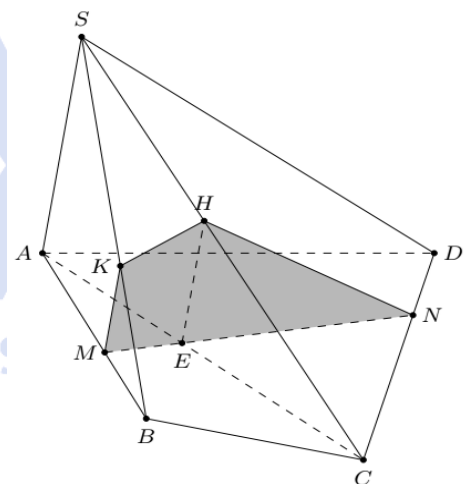
và (SAB) là đường thẳng đi qua M song song với SA và cắt SB tại K .

Trong $(ABCD)$ gọi $E = AC \cap MN \Rightarrow E \in (P)$.

Ta có $\begin{cases} E \in (P) \cap (SAC) \\ SA \parallel (P) \\ SA \subset (SAC) \end{cases}$ nên giao tuyến của mặt phẳng (P)

và (SAC) là đường thẳng đi qua E song song với SA và cắt SC tại H .

Vì $\begin{cases} (P) \cap (ABCD) = MN \\ (P) \cap (SAB) = MK \\ (P) \cap (SBC) = KH \\ (P) \cap (SCD) = HN \end{cases}$ nên thiết diện của hình chóp cắt bởi (P) là tứ giác $MNHK$.



Bài tập 2: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N là hai điểm trên cạnh SB, CD . Mặt phẳng (P) qua MN và song song với SC . Xác định thiết diện của (P) với hình chóp.

Lời giải

Mặt phẳng (SBC) chứa đường thẳng SC song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SBC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với SC .

Kẻ $MK \parallel SC, (K \in BC)$ thì MK là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SBC) .

Mặt phẳng (SCD) chứa đường thẳng SC song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SCD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với SC .

Kẻ $NP \parallel SC, (P \in SD)$ thì NP là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SCD) .

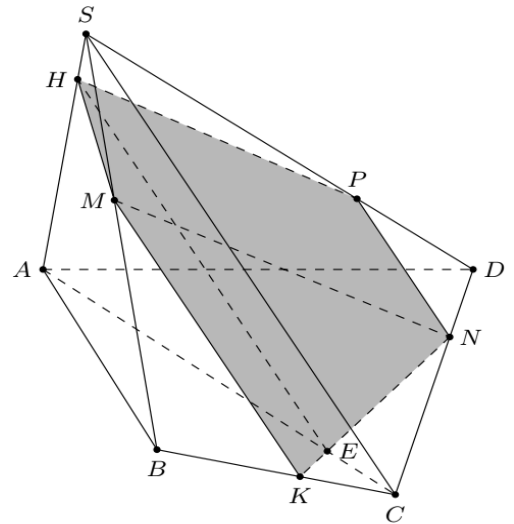
Trong $(ABCD)$ gọi $E = AC \cap NK \Rightarrow E \in (P)$.

Mặt phẳng (SAC) chứa đường thẳng SC song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với SC .

Kẻ $EH \parallel SC, (H \in SA)$ thì EH là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SAC) .

Khi đó giao tuyến của mặt phẳng (SAD) với (P) là PM , giao tuyến của mặt phẳng (SAB) với (P) là HM .

Vậy thiết diện của (P) với hình chóp $S.ABCD$ là ngũ giác $MKNPH$.



Bài tập 3: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi E là điểm nằm giữa A, C . Mặt phẳng (P) qua E và song song với hai đường thẳng AB, CD . Xác định giao tuyến của (P) với các mặt của hình chóp. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?

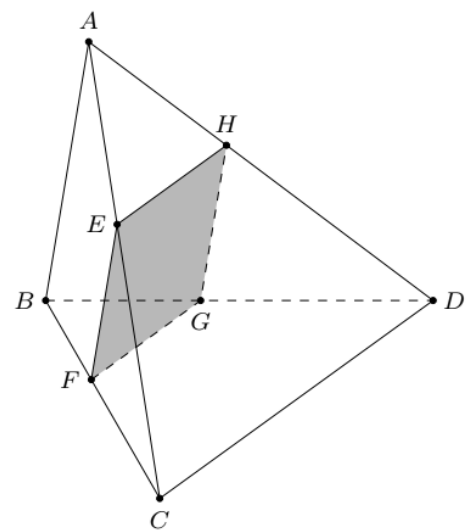
Lời giải

Mặt phẳng (ABC) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ABC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AB .

Kẻ $EF \parallel AB, (F \in BC)$ thì EF là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC) .

Hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) cùng chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD . Kẻ EH, FG lần lượt là giao tuyến của mặt phẳng (P) và hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) . Khi đó GH là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABD) .

Mặt phẳng (ABD) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên $GH \parallel AB$.



Tứ giác $EFGH$ có $EF \parallel GH$ (vì cùng song song với AB) và $EH \parallel FG$ (vì cùng song song với CD) nên nó là hình bình hành.

Bài tập 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD . Mặt phẳng (P) qua điểm M trên đoạn IJ và song song với AB, CD . Xác định thiết diện của (P) với tứ diện.

Lời giải

Mặt phẳng (ADC) chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ADC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD .

Qua M kẻ $PQ \parallel CD, (P \in IC, Q \in ID)$ thì PQ là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ADC) .

Mặt phẳng (ABC) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ABC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AB .

Qua P kẻ $EF \parallel AB, (E \in BC, F \in AC)$ thì EF là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC) .

Mặt phẳng (ACD) chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ACD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD .

Kẻ $FG \parallel CD, (G \in AD)$ thì FG là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ACD) .

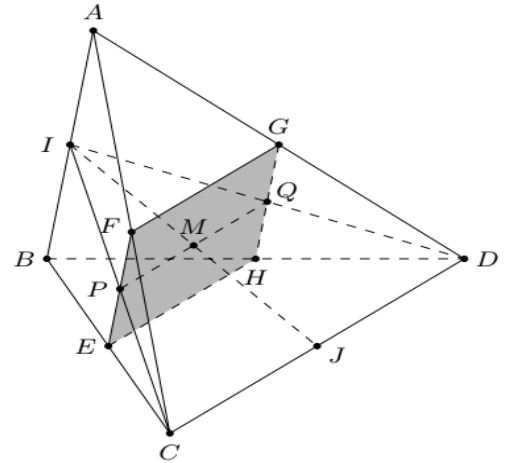
Mặt phẳng (BCD) chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (BCD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD .

Kẻ $EH \parallel CD, (H \in BD)$ thì EH là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (BCD) .

Khi đó giao tuyến của mặt phẳng (ABD) với mặt phẳng (P) là GH .

Ta có $Q \in (ABD) \cap (P) \Rightarrow Q \in GH, EF \parallel GH; EH \parallel FG$.

Vậy thiết diện của (P) và tứ diện $ABCD$ là hình bình hành $EFGH$.

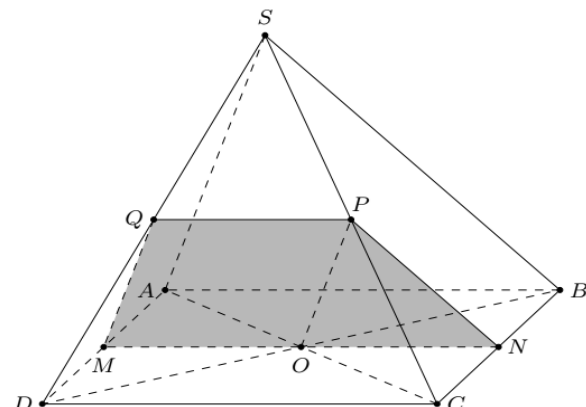


Bài tập 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành. Một mặt phẳng (P) qua O đồng thời song song với SA và CD . Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) và hình chóp.

Lời giải

Mặt phẳng (SAC) chứa đường thẳng SA song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với SA .

Qua O kẻ $OP \parallel SA, (P \in SC)$ thì PO là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SAC) .



Mặt phẳng $(ABCD)$ chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng $(ABCD)$ cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD .

Qua O kẻ $MN \parallel CD, (M \in AD, N \in BC)$ thì MN là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(ABCD)$.

Mặt phẳng (SCD) chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SCD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD .

Kẻ $PQ \parallel CD, (Q \in SD)$ thì PQ là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SCD) .

Khi đó giao tuyến của mặt phẳng (SAD) với mặt phẳng (P) là QM .

Khi đó giao tuyến của mặt phẳng (SCB) với mặt phẳng (P) là PN .

Tứ giác $MNPQ$ có $MN \parallel PQ$ (vì cùng song song với CD) nên nó là hình thang.

Bài tập 6: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là điểm bất kì nằm trên cạnh BC . Mặt phẳng (P) qua điểm M và song song với $AB; CD$. Xác định thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$.

Lời giải

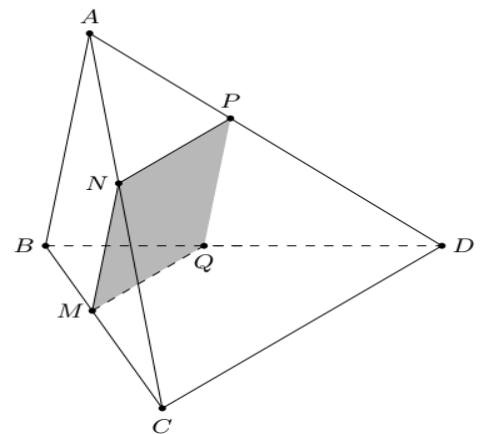
Mặt phẳng (ABC) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ABC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AB .

Qua M kẻ $MN \parallel AB, (N \in AC)$ thì MN là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC) .

Hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) cùng chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD . Kẻ NP, MQ lần lượt là giao tuyến của mặt phẳng (P) và

hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) . Khi đó PQ là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABD) .

Tứ giác $MNPQ$ có $MN \parallel PQ$ (vì cùng song song với AB) và $NP \parallel MQ$ (vì cùng song song với CD) nên nó là hình bình hành.



Bài tập 7: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là điểm bất kì nằm trên cạnh AB . Mặt phẳng (P) qua điểm M và song song với $BC; AD$. Xác định thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$.

Lời giải

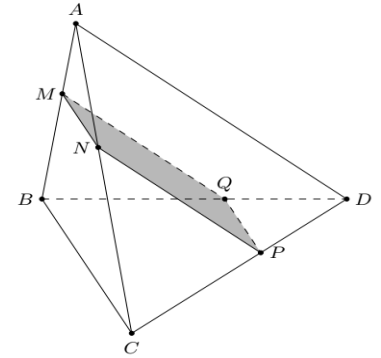
Mặt phẳng (ABC) chứa đường thẳng BC song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ABC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với BC .

Qua M kẻ $MN \parallel BC, (N \in AC)$ thì MN là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC)

Hai mặt phẳng (ACD) và (ABD) cùng chứa đường thẳng AD

song song với mặt phẳng (P) nên cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AD . Kẻ NP, MQ lần lượt là giao tuyến của mặt phẳng (P) và hai mặt phẳng (ACD) và (ABD) . Khi đó PQ là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (BCD) .

Tứ giác $MNPQ$ có $MN \parallel PQ$ (vì cùng song song với BC) và $NP \parallel MQ$ (cùng $\parallel AD$) nên nó là hình bình hành.



Bài tập 8: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là điểm bất kì nằm trên cạnh AD ; N là điểm bất kì nằm trên cạnh BC . Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng MN và song song với CD . Xác định thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$.

Lời giải

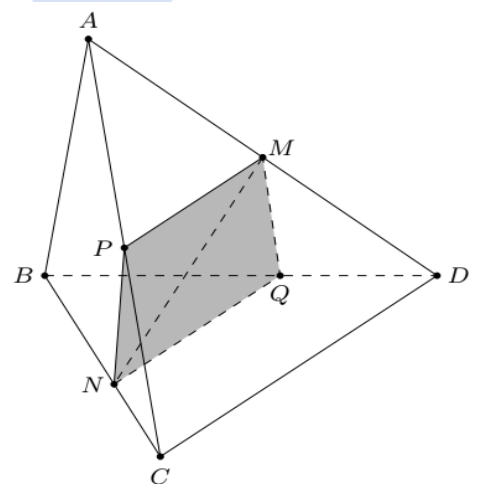
Mặt phẳng (ACD) chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ACD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD .

Qua M kẻ $MP \parallel CD, (P \in AC)$ thì MP là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ACD)

Mặt phẳng (BCD) chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (BCD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD . Qua N kẻ $NQ \parallel CD, (Q \in BD)$ thì NQ là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (BCD) .

Khi đó MQ là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (BCD) ; NP là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC)

Tứ giác $MNPQ$ có $MP \parallel NQ$ (vì cùng song song với CD) nên nó là hình thang.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC , E là điểm trên cạnh CD sao cho $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là hình:

- A. Tam giác B. Hình vuông. C. Hình thang. D. Hình chữ nhật.

Lời giải

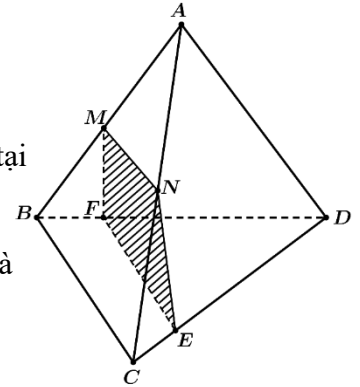
Tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC

Suy ra MN là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow MN // BC$

Từ E kẻ đường thẳng song song với BC và cắt BD tại $F \Rightarrow EF // BC$

Do đó $MN // EF$ suy ra bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng và $MNEF$ là hình thang.

Vậy hình thang $MNEF$ là thiết diện cần tìm.

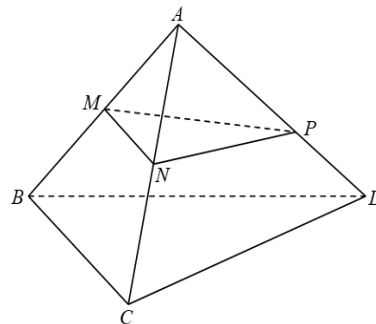


Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$, M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Mặt phẳng (α) qua MN cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là đa giác T . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. T là hình thang.
B. T là tam giác hoặc hình thang hoặc hình bình hành.
C. T là hình chữ nhật.
D. T là tam giác.

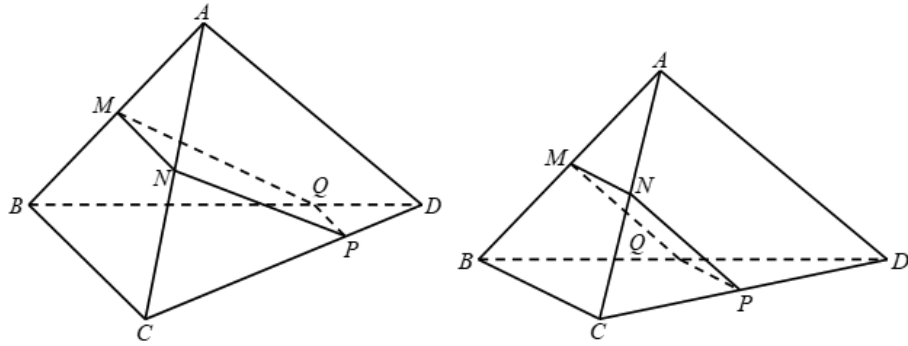
Lời giải

Trường hợp 1: Mặt phẳng (α) qua MN và cắt đoạn AD tại điểm $P \Rightarrow$ Thiết diện là tam giác MNP .



Trường hợp 2: Mặt phẳng (α) qua MN và cắt mặt phẳng (BCD) theo giao tuyến là PQ

Thiết diện là hình thang $MNPQ$ hoặc hình bình hành $MNPQ$.



- Câu 3:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD , M là trung điểm cạnh SA , N là điểm trên cạnh SC sao cho $SN = 3SC$. Mặt phẳng (α) chứa MN và song song với SB cắt hình chóp theo thiết diện là
- A. Tam giác MNK với K thuộc SD .
 - B. Tam giác MNP với P là trung điểm của AB .
 - C. Hình thang.
 - D. Ngũ giác.

Lời giải

Trong mặt phẳng (SAC) vì MN không song song với AC nên gọi $I = MN \cap AC$.

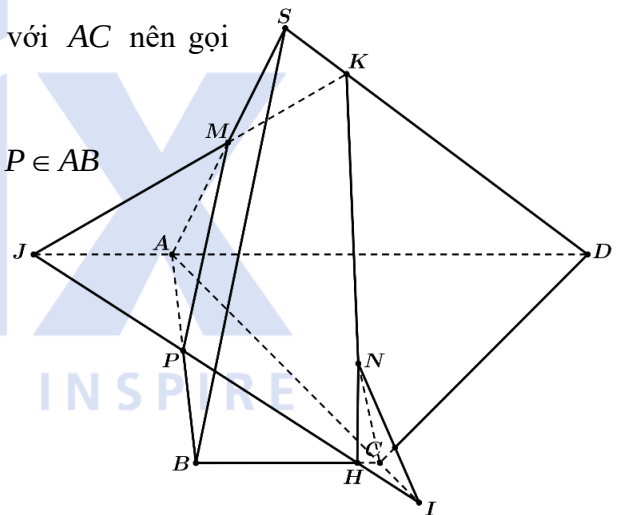
$(\alpha) \parallel AB$ nên $(\alpha) \cap (SAB) = MP$ với $MP \parallel SB$ và $P \in AB$ suy ra P là trung điểm của AB .

Trong $(ABCD)$ đường thẳng IP cắt AD và BC lần lượt tại J và H .

Trong mặt phẳng (SAD) , JM cắt SD tại K .

$$\text{Ta có } \begin{cases} MP = (\alpha) \cap (SAB) \\ PH = (\alpha) \cap (ABCD) \\ HN = (\alpha) \cap (SBC) \\ NK = (\alpha) \cap (SCD) \\ KM = (\alpha) \cap (SDA) \end{cases} \text{ . Vậy thiết diện cần tìm là ngũ}$$

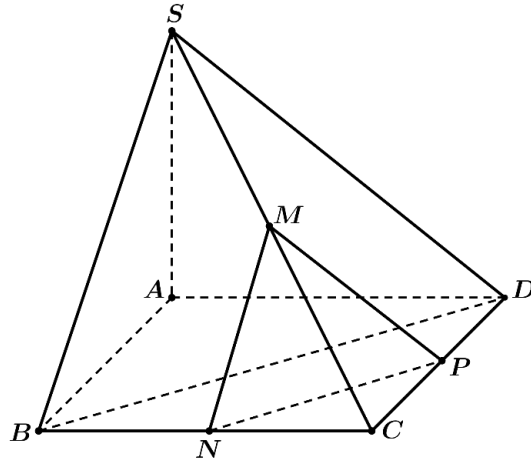
$MPHKN$.



giác

- Câu 4:** Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M, N lần lượt là trung điểm đoạn SC, BC . Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) qua MN song song với BD là hình gì?
- A. Tam giác.
 - B. Ngũ giác.
 - C. Lục giác.
 - D. Tứ giác.

Lời giải



Gọi $(\alpha) \cap CD = P \Rightarrow NP \parallel CD \Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = PM; (\alpha) \cap (SBC) = MN$

Suy ra, ta được thiết diện cần tìm là tam giác MNP .

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác BCD . Gọi (P) là mặt phẳng qua G , song song với AB và CD . Thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi (P) là

A. Hình thang. **B. Hình bình hành.** C. Hình tam giác. D. Tam giác đều.

Lời giải

Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (BCD) . Khi đó Δ đi qua G và song song với CD .

Gọi H, K lần lượt là giao điểm của Δ với BC và BD .

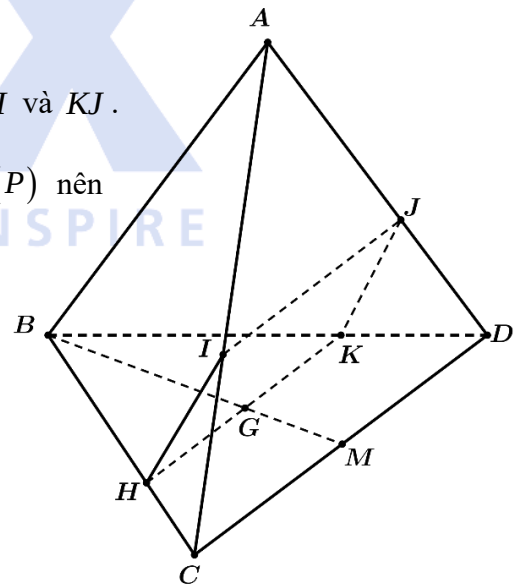
Giả sử (P) cắt (ABC) và (ABD) theo các giao tuyến là HI và KJ .

Ta có $(P) \cap (ABC) = HI$, $(P) \cap (ABD) = KJ$ mà $AB \parallel (P)$ nên $HI \parallel AB \parallel KJ$.

Theo định lý Thalet, ta có $\frac{BH}{HC} = \frac{BK}{KD} = 2$ suy ra

$$\begin{cases} \frac{HI}{AB} = \frac{CH}{CB} = \frac{1}{3} \\ \frac{KJ}{AB} = \frac{DK}{DB} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow HI = KJ.$$

Vậy thiết diện của (P) và tứ diện $ABCD$ là hình bình hành $HIJK$.



Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn là AB , điểm M là trung điểm CD . Mặt phẳng (α) qua M và song song với cả SA, BC , cắt hình chóp theo một thiết diện là

A. hình tam giác. B. hình bình hành. C. hình thoi. **D. hình thang.**

Lời giải

Ta có:

$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ BC // (\alpha) \\ BC \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MH \text{ (} MH // BC, H \in AB \text{)}.$$

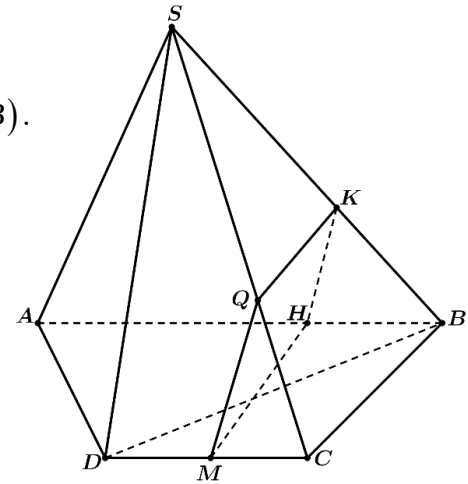
Ta có:

$$\begin{cases} H \in (\alpha) \cap (SAB) \\ SA // (\alpha) \\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = HK \text{ (} HK // SA, K \in SB \text{)}.$$

$$\begin{cases} K \in (\alpha) \cap (SBC) \\ BC // (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = KQ \text{ (} KQ // BC, Q \in SC \text{)}.$$

$$\begin{cases} Q \in (\alpha) \cap (SCD) \\ M \in (\alpha) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = QM.$$

Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) hình thang $HKQM$.



Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$. Mặt phẳng (P) qua M và song song với SC , BD . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một ngũ giác.
- B.** (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tam giác.
- C.** (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tứ giác.
- D.** (P) không cắt hình chóp.

Lời giải

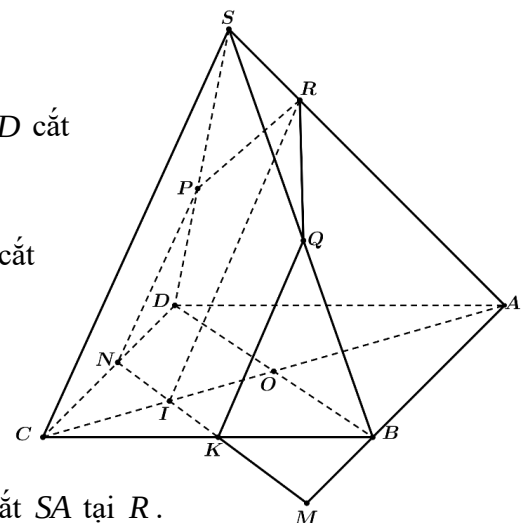
Trong $(ABCD)$, kẻ đường thẳng qua M và song song với BD cắt BC , CD , CA tại K , N , I .

Trong (SCD) , kẻ đường thẳng qua N và song song với SC cắt SD tại P .

Trong (SCB) , kẻ đường thẳng qua K và song song với SC cắt SB tại Q .

Trong (SAC) , kẻ đường thẳng qua I và song song với SC cắt SA tại R .

Thiết diện là ngũ giác $KNPRQ$.



- Câu 8:** Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M thuộc đoạn AC (M khác A , M khác C). Mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD . Thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là hình gì?
A. Hình vuông **B.** Hình chữ nhật **C.** Hình tam giác **D.** Hình bình hành

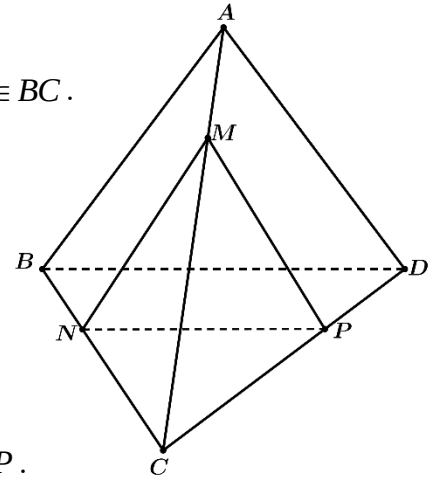
Lời giải

Ta có $\left. \begin{matrix} (\alpha) // AB \\ AB \subset (ABC) \end{matrix} \right\} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = MN$ với $MN // AB$ và $N \in BC$.

Ta có $\left. \begin{matrix} (\alpha) // AD \\ AD \subset (ADC) \end{matrix} \right\} \Rightarrow (\alpha) \cap (ADC) = MP$ với $MP // AD$ và $P \in CD$.

$(\alpha) \cap (BCD) = NP$.

Do đó thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là hình tam giác MNP .



- Câu 9:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , gọi I là trung điểm cạnh SC . Mệnh đề nào sau đây sai?

- A.** Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAD) .
B. Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAB) .
C. Mặt phẳng (IBD) cắt mặt phẳng (SAC) theo giao tuyến OI .
D. Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo một thiết diện là tứ giác.

Lời giải

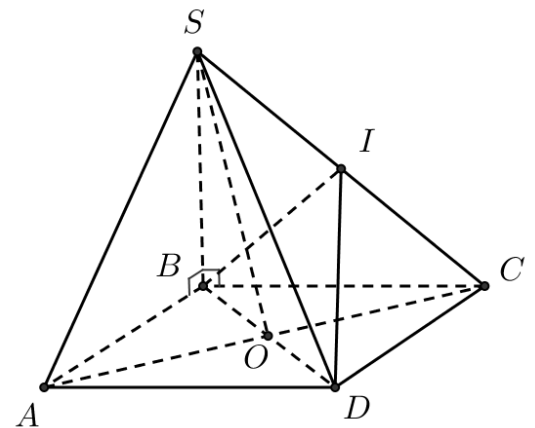
Trong tam giác SAC có O là trung điểm AC , I là trung điểm SC nên $IO // SA$

$\Rightarrow IO$ song song với hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) .

Mặt phẳng (IBD) cắt (SAC) theo giao tuyến IO .

Mặt phẳng (IBD) cắt (SBC) theo giao tuyến BI , cắt (SCD) theo giao tuyến ID , cắt $(ABCD)$ theo giao

tuyến $BD \Rightarrow$ thiết diện tạo bởi mặt phẳng (IBD) và hình chóp $S.ABCD$ là tam giác IBD .



- Câu 10:** Gọi (P) là mặt phẳng qua H , song song với CD và SB . Thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$ là hình gì?

- A.** Ngũ giác.
B. Hình bình hành.
C. Tứ giác không có cặp cạnh đối nào song song.
D. Hình thang.

Lời giải

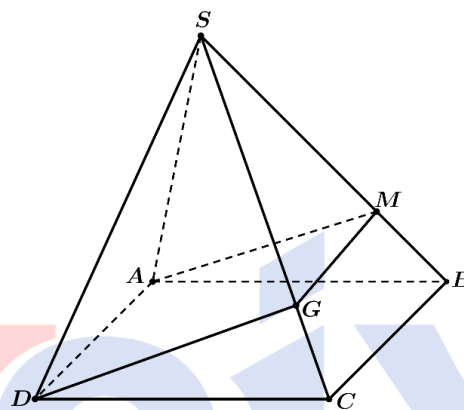
(P) là mặt phẳng qua H , song song với CD và SB nên (P) cắt $(ABCD)$ theo giao tuyến qua H song song CD cắt BC, AD lần lượt tại F, E ; (P) cắt (SBC) theo giao tuyến $FI \parallel SB$ ($I \in SC$); (P) cắt (SCD) theo giao tuyến $JI \parallel CD$ ($J \in SD$).

Khi đó thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$ là hình thang vì $JI \parallel FE$, $FI \parallel SB$, $JE \parallel SA$ nên FI không song song với JE .

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M là một điểm thuộc đoạn SB . Mặt phẳng (ADM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

- A.** Hình thang. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình bình hành. **D.** Tam giác.

Lời giải



Do $BC \parallel AD$ nên mặt phẳng (ADM) và (SBC) có giao tuyến là đường thẳng MG song song với BC nên thiết diện là hình thang $AMGD$.

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD, BC theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $\frac{MA}{AD} = \frac{NC}{CB} = \frac{1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng MN và song song với CD . Khi đó thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là:

- A.** một tam giác.
B. một hình bình hành.
C. một hình thang với đáy lớn gấp 2 lần đáy nhỏ.
D. một hình thang với đáy lớn gấp 3 lần đáy nhỏ.

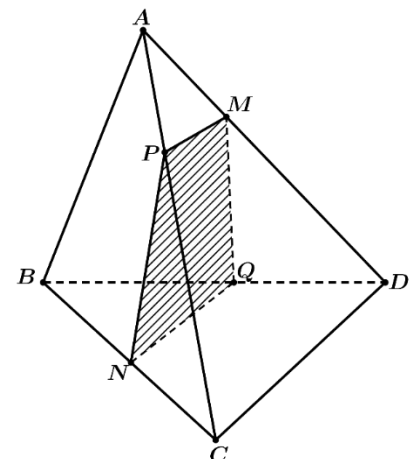
Lời giải

Trong mặt phẳng (ACD) từ M kẻ $MP \parallel CD$ ($P \in AC$).

Trong mặt phẳng (BCD) từ N kẻ $NQ \parallel CD$ ($Q \in BD$).

Khi đó ta có $MPNQ$ là thiết diện của mặt phẳng (P) và tứ diện $ABCD$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} MP \parallel CD \\ MP = \frac{1}{3}CD \end{cases}; \begin{cases} NQ \parallel CD \\ NQ = \frac{2}{3}CD \end{cases} \text{ nên ta suy ra } \begin{cases} NQ \parallel MP \\ MP = \frac{1}{2}NQ \end{cases}.$$



Vậy $MPNQ$ là hình thang có đáy lớn bằng hai lần đáy nhỏ.

Câu 13: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm AB . Mặt phẳng $(IB'D')$ cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

- A. Hình bình hành. **B.** Hình thang. C. Hình chữ nhật. D. Tam giác

Lời giải

Ta có $(IB'D')$ và $ABCD$ có I là một điểm chung.

$$\left. \begin{array}{l} B'D' \subset (IBD) \\ BD \subset (ABCD) \\ B'D' // BD \end{array} \right\} \Rightarrow (IBD) \cap (ABCD) = IJ // BD \quad (J \in AD)$$

Thiết diện là hình thang $IJD'B'$.

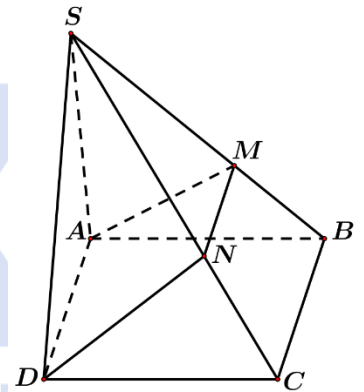
Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M là một điểm thuộc đoạn SB (M khác S và B). Mặt phẳng (ADM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

- A. Hình bình hành. B. Tam giác. C. Hình chữ nhật. **D.** Hình thang.

Lời giải

Ta có M là một điểm thuộc đoạn SB với M khác S và B .

$$\text{Suy ra } \left\{ \begin{array}{l} M \in (ADM) \cap (SBC) \\ AD \subset (ADM) \\ BC \subset (SBC) \\ AD // BC \end{array} \right. \Rightarrow (ADM) \cap (SBC) = Mx // BC // AD.$$



Gọi $N = Mx \cap SC$ thì (ADM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $AMND$.

Vì $MN // AD$ và MN với AD không bằng nhau nên tứ giác $AMND$ là hình thang.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$. Mặt phẳng (P) qua M và song song với hai đường thẳng SC, BD . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. (P) không cắt hình chóp.
B. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tứ giác.
C. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tam giác.
D. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một ngũ giác.

Lời giải

Mặt phẳng (P) qua M và song song với hai đường thẳng SC, BD

$$(P) \cap (ABCD) = Mx \parallel BD, Mx \cap BC = N, Mx \cap CD = P.$$

$$(P) \cap (SBC) = Ny \parallel SC, Ny \cap SB = F.$$

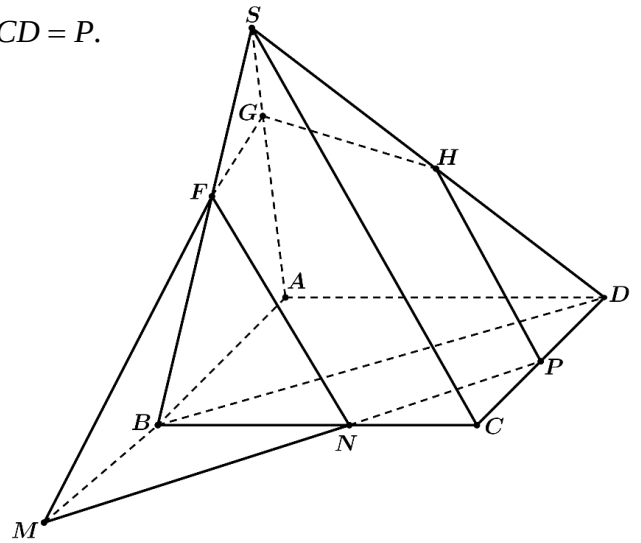
$$(P) \cap (SCD) = Pt \parallel SC, Pt \cap SD = H.$$

$$\text{Trong } (SAB): MF \cap SA = G.$$

$$(P) \cap (ABCD) = NP; (P) \cap (SCD) = PH;$$

$$(P) \cap (SAD) = HG.$$

$$(P) \cap (SAB) = GF; (P) \cap (SBC) = FN.$$



Vậy (P) cắt hình chóp theo thiết diện là ngũ giác $NPHGF$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , M là trung điểm SA . Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M , song song với SC và AD . Thiết diện của (α) với hình chóp $S.ABCD$ là hình gì?

A. Hình thang.

B. Hình thang cân.

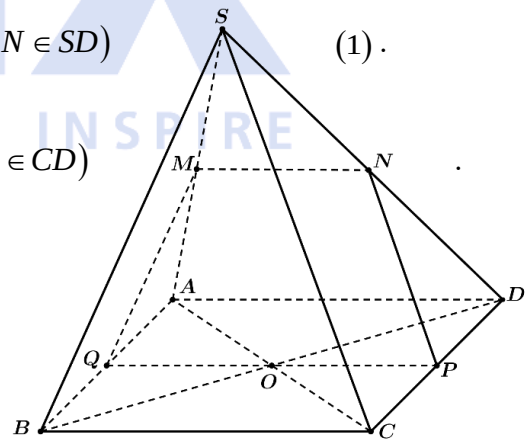
C. Hình chữ nhật.

D. Hình bình hành.

Lời giải

$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAD) \\ (\alpha) \parallel AD; AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAD) = MN \parallel AD (N \in SD) \quad (1).$$

$$\begin{cases} N \in (\alpha) \cap (SCD) \\ (\alpha) \parallel SC; SC \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = NP \parallel SC (P \in CD)$$



$$\begin{cases} P \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ (\alpha) \parallel AD; AD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = PQ \parallel AD (Q \in AB) \quad (2).$$

$$(\alpha) \cap (SAB) = MQ$$

Từ (1) và (2) suy ra $MN \parallel PQ \parallel AD \Rightarrow$ thiết diện $MNPQ$ là hình thang.

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M nằm trong tam giác ABC . Mặt phẳng (P) đi qua M và song song với các đường thẳng AB và CD . Xác định thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$.

A. Hình tam giác.

B. Hình bình hành.

C. Hình chữ nhật.

D. Hình ngũ giác.

Lời giải

Trong mặt phẳng (ABC) gọi $N = AM \cap BC$.

Mặt phẳng (ABC) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ABC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AB .

Qua M kẻ $HK \parallel AB, (H \in BC, K \in AC)$ thì HK là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC) .

Mặt phẳng (ACD) chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ACD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD .

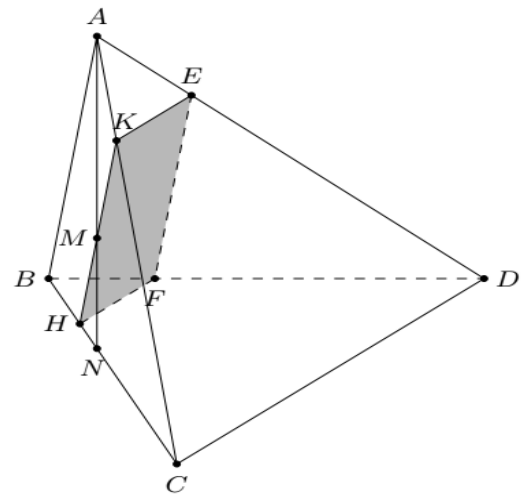
Qua K kẻ $KE \parallel CD, (E \in AD)$ thì KE là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ACD) .

Mặt phẳng (BCD) chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (BCD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD .

Qua H kẻ $HF \parallel CD, (F \in BD)$ thì HF là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (BCD) .

Khi đó EF là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABD) .

Tứ giác $KEFH$ có $KE \parallel HF$ (vì cùng song song với CD) và $HK \parallel FE$ (vì cùng song song với AB) nên nó là hình bình hành.



Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm tam giác SAB . Biết thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (IJG) là hình bình hành. Hỏi khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $AB = 3CD$. **B.** $AB = \frac{1}{3}CD$. **C.** $AB = \frac{3}{2}CD$. **D.** $AB = \frac{2}{3}CD$.

Lời giải

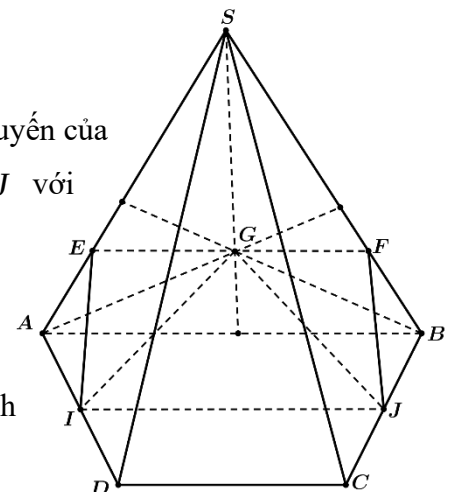
Từ giả thiết suy ra $IJ \parallel AB \parallel CD$ và $IJ = \frac{AB + CD}{2}$.

Xét 2 mặt phẳng $(IJG), (SAB)$ có G là điểm chung nên giao tuyến của chúng là đường thẳng EF đi qua G và $EF \parallel AB \parallel CD \parallel IJ$ với $E \in SA, F \in SB$.

Nối các đoạn thẳng EI, FJ ta được thiết diện là tứ giác $EFJI$, là hình thang vì $EF \parallel IJ$.

Vì G là trọng tâm của tam giác SAB và $EF \parallel AB$ nên theo định

lí Ta lét ta có: $EF = \frac{2}{3}AB$



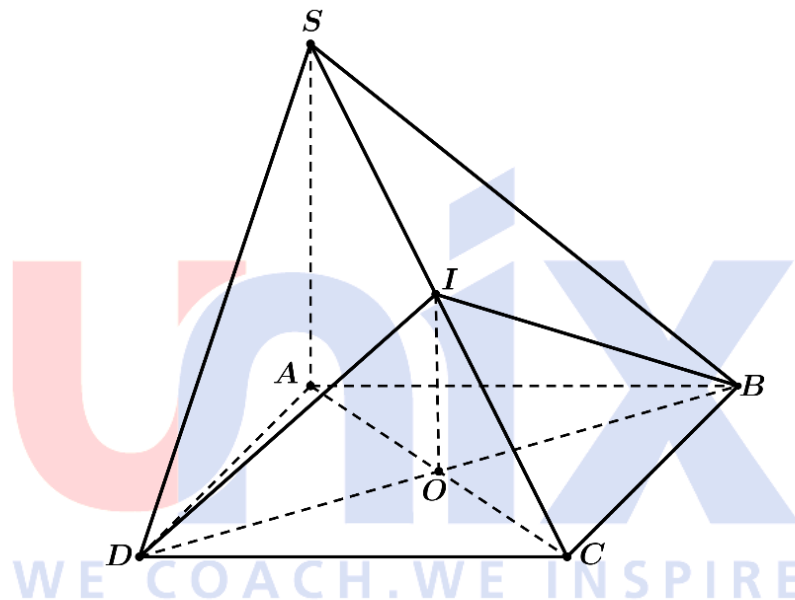
Nên để thiết diện là hình bình hành ta cần: $EF = IJ \Leftrightarrow \frac{AB + CD}{2} = \frac{2AB}{3} \Leftrightarrow AB = 3CD$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , I là trung điểm cạnh SC . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAD) .
- b) Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là một tứ giác.
- c) Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAB) .
- d) Giao tuyến của hai mặt phẳng (IBD) và (SAC) là IO .

Lời giải



- a) Đúng: $IO \parallel SA \Rightarrow IO \parallel (SAD)$.
- b) Sai: (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tam giác IBD .
- c) Đúng: $IO \parallel SA \Rightarrow IO \parallel (SAB)$.
- d) Đúng: $(IBD) \cap (SAC) = IO$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Điểm G là trọng tâm tam giác BCD . Mặt phẳng (α) qua G và song song với AB và CD . Đồng thời (α) cắt trung tuyến AM của tam giác ACD tại K . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) (α) cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là một hình tam giác.
- b) $\frac{BI}{BC} = \frac{2}{3}$.
- c) $AK = \frac{1}{3}AM$.
- d) Giao tuyến của (α) và (ABD) cắt CD .

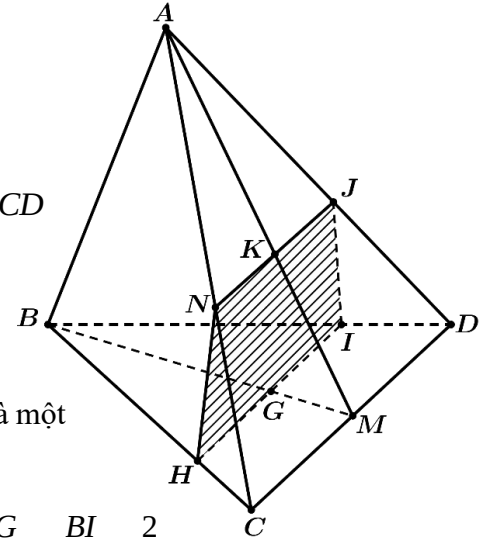
Lời giải

a) Sai: Xác định thiết diện: (α) qua G song song với CD

$$\Rightarrow (\alpha) \cap (BCD) = HI$$

Tương tự ta được $(\alpha) \cap (ABD) = IJ$ ($JI \parallel AB$)

$(\alpha) \cap (ACD) = JN$ ($JN \parallel CD$); $(\alpha) \cap (ABC) = HN$ nên (α) là một tứ giác



b) Đúng: Vì G là trọng tâm tam giác BCD mà $IG \parallel CD$ nên $\frac{BG}{BM} = \frac{BI}{BC} = \frac{2}{3}$

Mặt khác $IJ \parallel AB$ nên $\frac{BI}{BC} = \frac{AJ}{AD} = \frac{2}{3}$

c) Sai: Lại có $JK \parallel DM$ nên $\frac{AK}{AM} = \frac{AJ}{AD} = \frac{2}{3}$ nên $AK = \frac{2}{3}AM$

d) Sai: Giao tuyến của (α) và (ABD) không cắt CD .

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Giả sử M thuộc đoạn thẳng BC . Mặt phẳng (α) qua M song song với AB và CD . Khi đó:

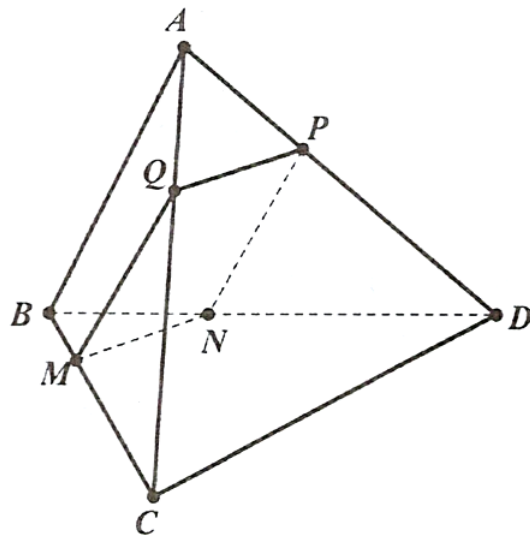
a) Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (ABC) là đường thẳng đi qua M và song song với AB

b) Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (BCD) là đường thẳng đi qua M và song song với CD

c) Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (ABD) là đường thẳng đi qua N và song song với AB

d) Hình tạo bởi các giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt của tứ diện (ta gọi là thiết diện) là hình thang

Lời giải



Lời giải

a) Đúng: Vì

$$\begin{cases} M \in (SAB) \cap (\alpha) \\ (\alpha) \parallel AB, AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = MN$$

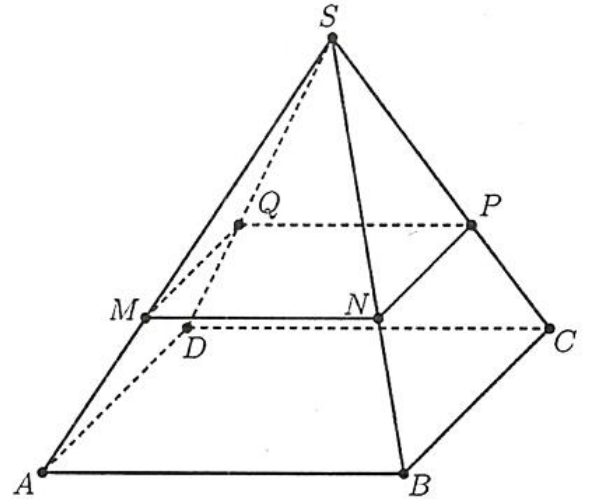
với $MN \parallel AB, N \in SB$

b) Sai: Mặt khác:

$$\begin{cases} M \in (SAD) \cap (\alpha) \\ (\alpha) \parallel AD, AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (\alpha) = MQ$$

với $MQ \parallel AD, Q \in SD$

Vì $BC \parallel AD \parallel MQ$ và $BC \not\subset (\alpha), MQ \subset (\alpha)$ nên $BC \parallel (\alpha)$.



Khi đó, ta có: $\begin{cases} N \in (SBC) \cap (\alpha) \\ (\alpha) \parallel BC, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SBC) \cap (\alpha) = NP$ (với $NP \parallel BC, P \in SC$).

Nối các đỉnh M, N, P, Q ta được một tứ giác.

c) Sai: Ta có: $MN \parallel AB, MQ \parallel AD, NP \parallel BC, PQ \parallel CD$ nên theo định lý Thales, ta có:

$$\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{SQ}{SD} = \frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{MQ}{AD} = \frac{2}{3}.$$

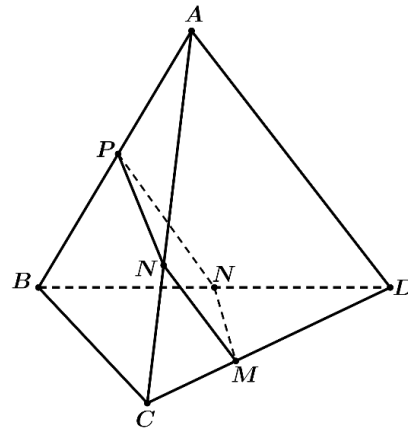
Suy ra $MN = NP = PQ = MQ = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$ (đáy hình của chóp là hình vuông cạnh 2).

d) Đúng: Dễ thấy $MNPQ$ là một hình vuông có cạnh bằng $\frac{4}{3}$ nên có diện tích bằng $\frac{16}{9}$ (đơn vị diện tích).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có $AD = 9$ cm, $CB = 6$ cm và M là điểm bất kì trên cạnh CD . Mặt phẳng (α) là mặt phẳng qua M và song song với AD, BC . Nếu thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α) là hình thoi thì cạnh của hình thoi đó bằng bao nhiêu?

Lời giải



Thiết diện là hình bình hành $MNPQ$.

$$\text{Ta có } \frac{MN}{BC} = \frac{DN}{BD} \Leftrightarrow \frac{MN}{6} = \frac{DN}{BD} \text{ và } \frac{PN}{AD} = \frac{BN}{BD} \Leftrightarrow \frac{PN}{9} = \frac{BN}{BD} \text{ suy ra } \frac{MN}{6} + \frac{PN}{9} = 1.$$

$$\text{Khi thiết diện là hình thoi thì } MN = PN \text{ nên } \frac{MN}{9} + \frac{MN}{6} = 1 \Leftrightarrow MN = \frac{18}{5} = 3,6$$

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6, CD = 8$. Cắt tứ diện bởi một mặt phẳng song song với AB, CD để thiết diện thu được là một hình thoi. Cạnh của hình thoi đó bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Lời giải

Giả sử một mặt phẳng song song với AB, CD cắt tứ diện $ABCD$ theo một thiết diện là hình thoi

$$MNPQ \text{ như hình vẽ trên. Khi đó ta có } \begin{cases} MQ \parallel NP \parallel AB \\ MN \parallel CD \parallel PQ \\ MQ = PQ \end{cases}$$

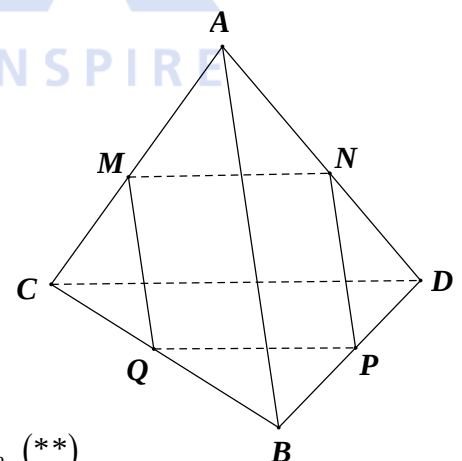
$$\text{Theo định lí Talet ta có: } \frac{CQ}{CB} = \frac{CM}{CA} = \frac{MQ}{AB} = k_1$$

$$\Rightarrow MQ = k_1 \cdot AB = 6k_1$$

$$\frac{BQ}{BC} = \frac{BP}{BD} = \frac{PQ}{CD} = k_2 \Rightarrow PQ = k_2 \cdot CD = 8k_2$$

$$\text{Ta có } k_1 + k_2 = \frac{CQ}{CB} + \frac{BQ}{BC} = 1 \quad (*) \text{ và } MP = PQ \Rightarrow 6k_1 = 8k_2 \quad (**)$$

$$\text{Từ } (*) \text{ và } (**) \text{ suy ra } k_1 = \frac{4}{7}, k_2 = \frac{3}{7} \Rightarrow MQ = 6 \cdot \frac{4}{7} = \frac{24}{7} = 3,42.$$



Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm cạnh SC , (α) là mặt phẳng đi qua A, M và song song với

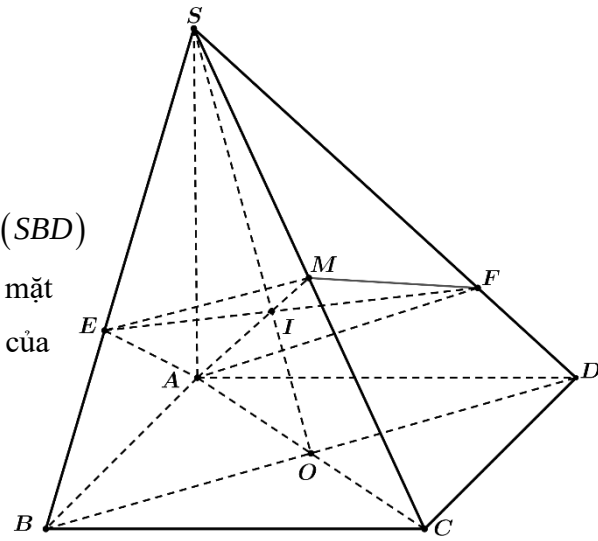
đường thẳng BD . Diện tích thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (α) bằng

$$\frac{a^2 m \sqrt{m}}{n} \text{ với } m, n \in \mathbb{Z}. \text{ Tính } m + 2n.$$

Lời giải

Gọi $O = AC \cap BD$, $I = SO \cap AM$. Trong mặt phẳng (SBD) qua I kẻ $EF \parallel BD$, khi đó ta có $(AEMF) \equiv (\alpha)$ là mặt phẳng chứa AM và song song với BD . Do đó thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (α) là tứ giác $AEMF$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} FE \parallel BD \\ BD \perp (SAC) \end{cases} \Rightarrow FE \perp (SAC) \Rightarrow FE \perp AM.$$



Mặt khác ta có: $AC = 2a = SA$ nên tam giác SAC vuông cân tại A suy ra $AM = a\sqrt{2}$.

I là trọng tâm tam giác SAC , mà $EF \parallel BD$ nên tính được $EF = \frac{2}{3}BD = \frac{4a}{3}$.

Tứ giác $AEMF$ có hai đường chéo $FE \perp AM$ nên $S_{AEMF} = \frac{1}{2}FE \cdot AM = \frac{2a^2\sqrt{2}}{3}$.

Khi đó $m = 2; n = 3$ nên $m + 2n = 2 + 2 \cdot 3 = 8$

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a$, $CD = b$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD , giả sử $AB \perp CD$. Mặt phẳng (α) qua M nằm trên đoạn IJ và song song với AB và CD . Biết $IM = \frac{1}{3}IJ$ thì diện tích thiết diện của tứ diện $ABCD$ với mặt phẳng (α) là $S = \frac{m}{n} \cdot ab$ với $m, n \in \mathbb{Z}$. Tính $2n + m$

Lời giải

Ta có $\begin{cases} (\alpha) // CD \\ CD \subset (ICD) \\ M \in (\alpha) \cap (ICD) \end{cases} \Rightarrow$ giao tuyến của (α) với (ICD)

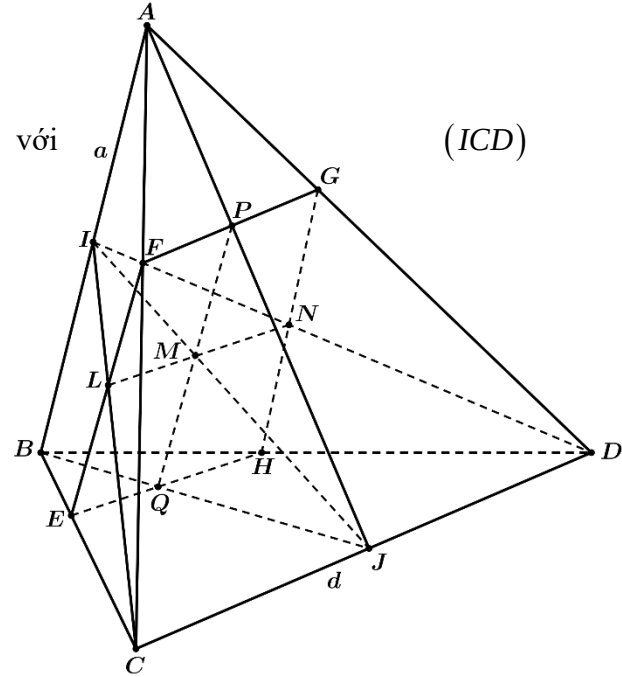
là đường thẳng qua M và

song song với CD cắt IC tại L và ID tại N .

$\begin{cases} (\alpha) // AB \\ AB \subset (JAB) \\ M \in (\alpha) \cap (JAB) \end{cases} \Rightarrow$ giao tuyến của (α) với (JAB)

(JAB) là đường thẳng qua M và song song

với AB cắt JA tại P và JB tại Q .



Ta có $\begin{cases} (\alpha) // AB \\ AB \subset (ABC) \\ L \in (\alpha) \cap (ABC) \end{cases} \Rightarrow EF // AB$

Tương tự $\begin{cases} (\alpha) // AB \\ AB \subset (ABD) \\ N \in (\alpha) \cap (ABD) \end{cases} \Rightarrow HG // AB \Rightarrow EF // HG // AB$

Ta có $\begin{cases} (\alpha) // CD \\ CD \subset (ACD) \\ P \in (\alpha) \cap (ACD) \end{cases} \Rightarrow FG // CD$

Tương tự $\begin{cases} (\alpha) // CD \\ CD \subset (BCD) \\ Q \in (\alpha) \cap (BCD) \end{cases} \Rightarrow EH // CD \Rightarrow FG // EH // CD.$

Suy ra $EFGH$ là hình bình hành. Mà $AB \perp CD$ nên $EFGH$ là hình chữ nhật.

Xét tam giác ICD có: $LN // CD \Rightarrow \frac{LN}{CD} = \frac{IN}{ID}.$

Xét tam giác ICD có: $MN // JD \Rightarrow \frac{IN}{ID} = \frac{IM}{IJ}.$

Do đó $\frac{LN}{CD} = \frac{IM}{IJ} = \frac{1}{3} \Rightarrow LN = \frac{1}{3}CD = \frac{b}{3}.$

Tương tự $\frac{PQ}{AB} = \frac{JM}{JI} = \frac{2}{3} \Rightarrow PQ = \frac{2}{3}AB = \frac{2a}{3}.$

$$\text{Vậy } S_{EFGH} = PQ.LN = \frac{2ab}{9}.$$

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD , $AB = CD = 6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = x.BC$ ($0 < x < 1$). mp(P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q . Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu?

Lời giải

Xét tứ giác $MNPQ$ có $\begin{cases} MQ \parallel NP \parallel AB \\ MN \parallel PQ \parallel CD \end{cases} \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Mặt khác $AB \perp CD \Rightarrow MQ \perp MN$. Do đó, $MNPQ$ là hình chữ nhật.

$$\text{Vì } MQ \parallel AB \text{ nên } \frac{MQ}{AB} = \frac{CM}{CB} = x \Rightarrow MQ = x.AB = 6x.$$

$$\text{Theo giả thiết } MC = x.BC \Rightarrow BM = (1-x)BC.$$

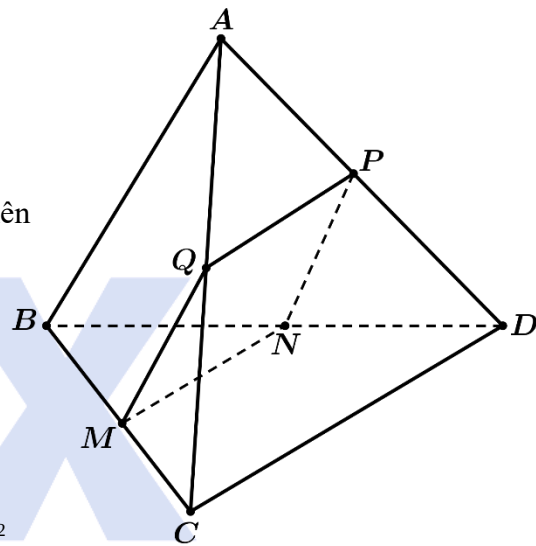
$$\text{Vì } \begin{matrix} MN \parallel CD \\ \text{ nên} \end{matrix} \quad \frac{MN}{CD} = \frac{BM}{BC} = 1-x \Rightarrow MN = (1-x).CD = 6(1-x).$$

Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là

$$S_{MNPQ} = MN.MQ = 6(1-x).6x = 36.x.(1-x) \leq 36 \left(\frac{x+1-x}{2} \right)^2 = 9.$$

$$\text{Ta có } S_{MNPQ} = 9 \text{ khi } x = 1-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Vậy diện tích tứ giác $MNPQ$ lớn nhất bằng 9 khi M là trung điểm của BC .



Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$), cạnh $AB = 3a$, $AD = CD = a$. Tam giác SAB cân tại S , $SA = 2a$. Mặt phẳng (P) song song với SA, AB cắt các cạnh AD, BC, SC, SD theo thứ tự tại M, N, P, Q . Đặt $AM = x$ ($0 < x < a$). Gọi x là giá trị để tứ giác $MNPQ$ ngoại tiếp được đường tròn, bán kính đường tròn đó khi $a = 6\sqrt{7}$ là bao nhiêu?

Lời giải

$$(P) // SA \Rightarrow MQ // SA; (P) // AB \Rightarrow MN // AB;$$

$$(P) // AB \Rightarrow (P) // CD \Rightarrow PQ // CD \Rightarrow PQ // MN$$

Tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

$$(P) // SA; (P) // AB \Rightarrow (P) // (SAB) \Rightarrow PN // SB$$

$$\Rightarrow \frac{PN}{SB} = \frac{CN}{CB}.$$

$$MQ // SA \Rightarrow \frac{MQ}{SA} = \frac{DM}{DA}.$$

$$MN // AB \Rightarrow \frac{DM}{DA} = \frac{CN}{CB} \Rightarrow \frac{PN}{SB} = \frac{QM}{SA} \Rightarrow PN = QM$$

$\Rightarrow MNPQ$ là hình thang cân.

$$MQ // SA \Rightarrow \frac{MQ}{SA} = \frac{DM}{DA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow MQ = 2(a-x)$$

$$PQ // CD \Rightarrow \frac{PQ}{CD} = \frac{SQ}{SD} = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{a} \Rightarrow PQ = x$$

$$\text{Gọi } E = MN \cap BD \Rightarrow \frac{ME}{AB} = \frac{DM}{DA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow ME = 3(a-x); \frac{EN}{CD} = \frac{BN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{x}{a} \Rightarrow EN = x$$

$$\Rightarrow MN = ME + EN = 3a - 2x.$$

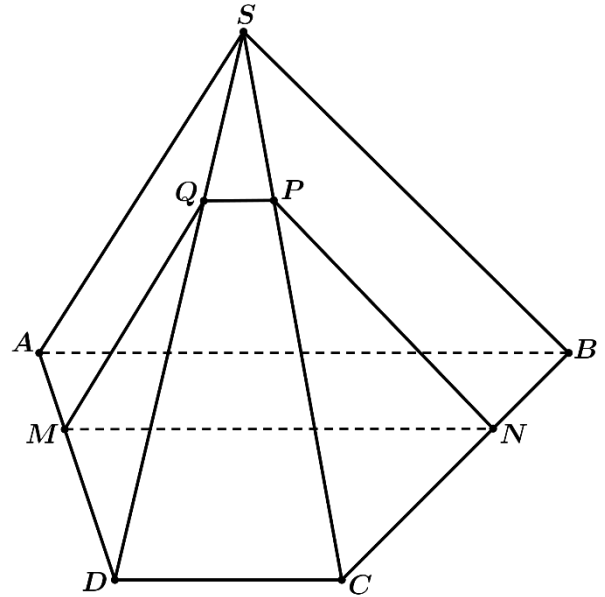
Hình thang cân $MNPQ$ có đường tròn nội tiếp $\Rightarrow MN + PQ = MQ + NP$

$$\Rightarrow 3a - 2x + x = 4(a-x) \Rightarrow x = \frac{a}{3}$$

$$MN = \frac{7a}{3}; PQ = \frac{a}{3}; QM = \frac{4a}{3} \Rightarrow MF = \frac{1}{2}MN - \frac{1}{2}PQ = a$$

$$\Rightarrow QF = \sqrt{MQ^2 - MF^2} = \sqrt{\frac{16a^2}{9} - a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

$$\text{Vậy bán kính đường tròn nội tiếp hình thang } MNPQ \text{ là } R = \frac{1}{2}QF = \frac{a\sqrt{7}}{6} \xrightarrow{a=6\sqrt{7}} R = 7$$



-----HẾT-----