

Dạng 3: Xác định thiết diện bằng cách kẻ song song

Phương pháp: Để xác định được thiết diện của một hình chóp hoặc hình lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (P) ta thường dựng các đoạn giao tuyến của (P) với các mặt của hình chóp hoặc hình lăng trụ đó. Khi ấy, ta sử dụng định lí sau:

- Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia theo hai giao tuyến song song với nhau.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình chóp $S \cdot ABC$. Gọi M là trung điểm SA . Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua M và song song với mặt phẳng (ABC) .

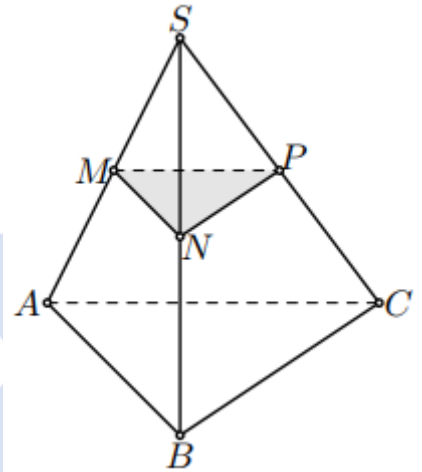
Lời giải

Ta có M là một điểm chung của (P) và (SAB)

Do $\begin{cases} (P) \parallel (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \end{cases}$ nên giao tuyến của (P) và (SAB) là đường thẳng đi qua M song song với AB và cắt SB tại trung điểm N của SB .

Tương tự, giao tuyến của (P) và (SAC) là đường thẳng đi qua M , song song với AC và cắt SC tại trung điểm P của SC .

Vậy thiết diện của hình chóp $S \cdot ABC$ cắt bởi mặt phẳng (P) là tam giác MNP .



Bài tập 2: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của $A'B'$. Tìm thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua M và song song với mặt phẳng $(A'C'C)$. Thiết diện là hình gì?

Lời giải

Vì (P) song song với $(A'C'C)$ nên (P) song song với $(A'C'CA)$.

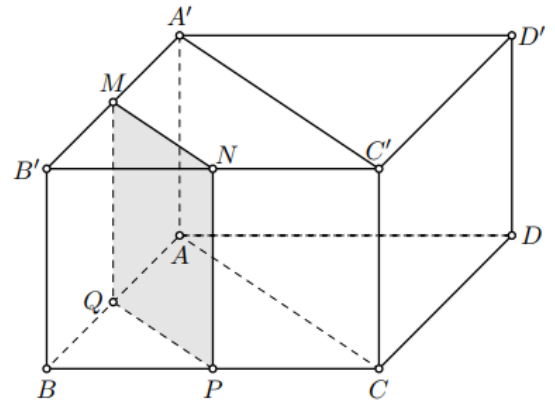
Suy ra giao tuyến của (P) với $(A'B'C'D')$ là đường thẳng đi qua M , song song với $A'C'$ và cắt $B'C'$ tại trung điểm N của $B'C'$.

Tương tự, giao tuyến của (P) với $(B'C'CB)$ là đường thẳng đi qua N , song song với $C'C$ và cắt BC tại trung điểm P của BC .

Giao tuyến của (P) với $(A'B'BA)$ là đường thẳng đi qua M , song song với $A'A$ và cắt AB tại trung điểm Q của AB .

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $MNPQ$.

Do NP song song và bằng CC' ; MQ song song và bằng AA' nên tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.



Bài tập 3: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AD, CC' sao cho $\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NC'}$. Xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng qua MN và song song với (ACB')

Lời giải

Gọi I là điểm trên AA' sao cho $\frac{AI}{IA'} = \frac{AM}{MD}$ suy ra

$IM \parallel A'D$ suy ra $IM \parallel CB'$

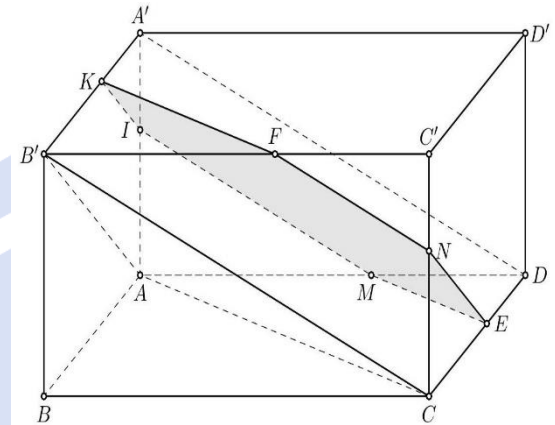
Lại có $\frac{AI}{IA'} = \frac{CN}{NC'}$ suy ra $IN \parallel AC$ suy ra

$(MNI) \parallel (ACB')$.

Do đó mặt phẳng (MNI) là mặt phẳng đi qua M, N và song song với mặt phẳng (ACB') .

Qua M kẻ $ME \parallel AC$; qua N kẻ $NF \parallel B'C'$, qua F kẻ $FK \parallel A'C'$.

Khi đó thiết diện cần tìm là đa giác $MENFKI$.



Bài tập 4: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Gọi K là trung điểm CD . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua C' và song song với $(A'AK)$. Xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng (P) .

Lời giải

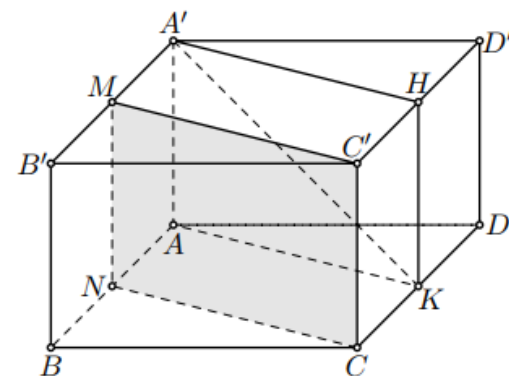
Gọi H là trung điểm $C'D' \Rightarrow KH \parallel AA' \Rightarrow H \in (A'AK)$.

Qua C' kẻ đường thẳng song song với $A'H$, cắt $A'B'$ tại M .

Qua C kẻ đường thẳng song song với AK , cắt AB tại N .

Suy ra mặt phẳng $(CC'MN)$ là mặt phẳng đi qua C' và song song với $(A'AK)$.

Thiết diện cần tìm là hình bình hành $CC'MN$.



Bài tập 5: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn $AD = 3a, AB = BC = a$. Mặt bên (SAD) là tam giác cân đỉnh S với $SA = 2a$, gọi M là điểm thuộc cạnh AB và không trùng với A, B . Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với (SAD) . Xác định thiết diện của chóp với mặt phẳng (α) . Thiết diện là hình gì?

Lời giải

Qua M kẻ đường thẳng song song với AD , cắt CD tại N

Qua M kẻ đường thẳng song song với SA , cắt SB tại Q .

Qua Q kẻ đường thẳng song song với BC , cắt SC tại P .

Suy ra $(MNPQ)$ là mặt phẳng qua M và song song với (SAD) .

Do đó, thiết diện của hình chóp $S \cdot ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là tứ giác

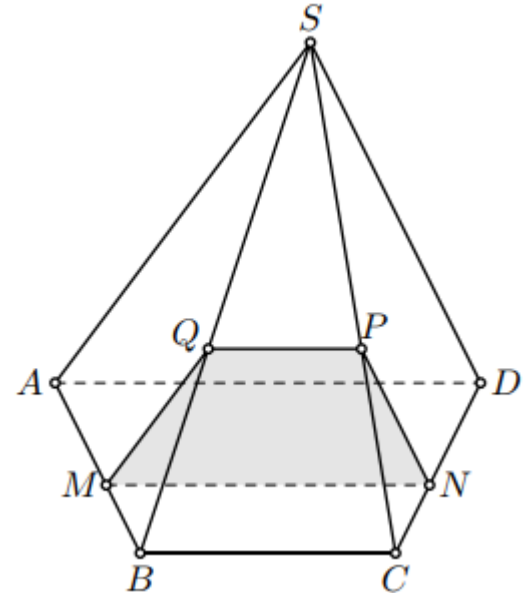
$MNPQ$.

Bởi vì MN và PQ cùng song song với BC (hoặc AD) nên tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

Áp dụng định lý Thales trong các tam giác SAB, SBC, SCD ta được $\frac{BM}{BA} =$

$$\frac{MQ}{SA} = \frac{BQ}{BS} = \frac{CP}{CS} = \frac{CN}{CD} = \frac{NP}{SD} \Rightarrow \frac{MQ}{SA} = \frac{NP}{SD} \text{ mà tam giác } SAD \text{ cân tại } S \text{ do đó } MQ = NP.$$

Vậy $MNPQ$ là hình thang cân.



Bài tập 6: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ có $AD \parallel BC, AD = 2BC$. Gọi E là trung điểm AD và O giao điểm của AC và BE ; I là một điểm di động trên AC khác A và C . Qua I vẽ mặt phẳng (α) song song với (SBE) . Tìm thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp $S \cdot ABCD$.

Lời giải

Trường hợp 1: Điểm I nằm giữa A và O .

Qua I kẻ đường thẳng song song với BE cắt AB, AD lần lượt tại M và N .

Qua M kẻ đường thẳng song song với SB cắt SA tại P .

Suy ra (MNP) là mặt phẳng đi qua I và song song với (SBE) .

Do đó, thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) là tam giác MNP .

Trường hợp 2: Điểm I nằm giữa C và O .

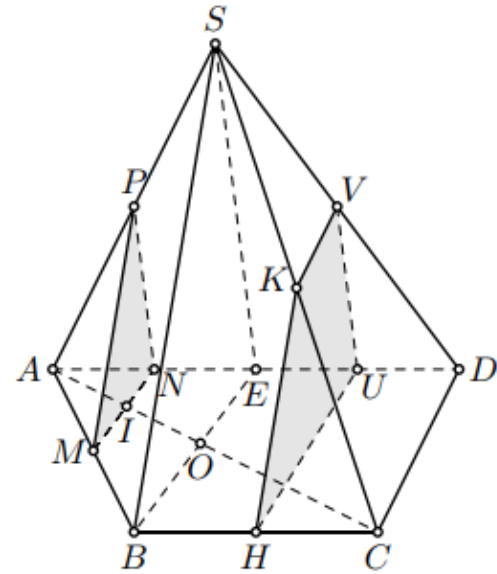
Qua I kẻ đường thẳng song song với BE cắt BC, AD lần lượt tại H và U .

Qua H kẻ đường thẳng song song với SB cắt SC tại K .

Qua U kẻ đường thẳng song song với SE cắt SD tại V .

Suy ra $(HKVU)$ là mặt phẳng đi qua I và song song với (SBE) .

Do đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) là tứ giác $HKVU$.



Bài tập 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O có $AC = a, BD = b$. Tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng (α) di động song song với mặt phẳng (SBD) và đi qua điểm I trên đoạn AC .

a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) .

b) Tính diện tích thiết diện theo a, b và $x = AI$.

Lời giải

a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) .

Nếu $I \in OA$ thì ta có

$$\begin{cases} (\alpha) \parallel (SBD) \\ (ABD) \cap (SBD) = BD \Rightarrow (\alpha) \cap (ABD) = MN \text{ với} \\ I \in (\alpha) \cap (ABD) \end{cases}$$

MN qua I và $MN \parallel BD$.

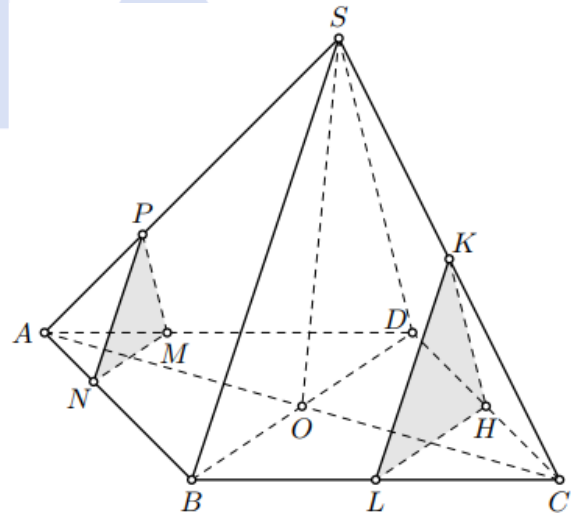
Tương tự (α) cắt (SAB) theo đoạn giao tuyến MP

song song với SB cắt (SAD) theo đoạn giao tuyến $NP \parallel SD$. Thiết diện là tam giác đều MNP

(vì đồng dạng với tam giác đều SBD)

Nếu $I \in OC$ thì thiết diện là tam giác đều HKL có các cạnh tương ứng song song với cạnh tam giác SBD .

b) Tính diện tích thiết diện theo a, b và $x = AI$. Ta có $S_{\triangle BCD} = \frac{b^2 \sqrt{3}}{4}$.



Nếu I nằm giữa O và A thì $0 < x < \frac{a}{2}$.

Khi đó $\frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle BCD}} = \left(\frac{MN}{BD}\right)^2$. Do $MN \parallel BD$ suy ra $\frac{MN}{BD} = \frac{AI}{AO} = \frac{2x}{a} \Rightarrow S_{\triangle MNP} = \frac{b^2 x^2 \sqrt{3}}{a^2}$.

Nếu I nằm giữa O và C thì $\frac{a}{2} < x < a$.

Khi đó $\frac{S_{\triangle HKL}}{S_{\triangle BCD}} = \left(\frac{HL}{BD}\right)^2$. Do $HL \parallel BD \Rightarrow \frac{HL}{BD} = \frac{CI}{CO} = \frac{2(a-x)}{a} \Rightarrow S_{\triangle MNP} = \frac{b^2 (a-x)^2 \sqrt{3}}{a^2}$.

Bài tập 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , tam giác SAD là tam giác đều. Gọi M là một điểm thuộc cạnh AB , $AM = x$ với $0 < x < a$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với (SAD) . Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) .

Lời giải

Do mặt phẳng (P) đi qua điểm M và song song với (SAD) nên cắt các cạnh của hình chóp bằng các giao tuyến đi qua M và song song với mặt phẳng (SAD) .

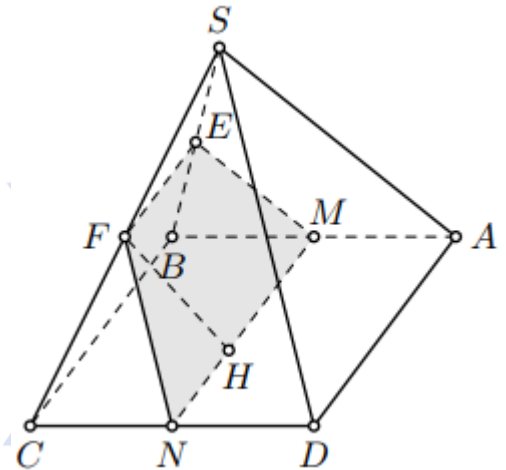
Do $ABCD$ là hình thoi và tam giác SAD đều nên thiết diện thu được là hình thang cân $MNFE$ với $MN \parallel EF, ME = NF$.

Khi đó $MN = a, \frac{EF}{BC} = \frac{SF}{SC} = \frac{MA}{AB} = \frac{x}{a} \Rightarrow EF = x$ và

$MF = a - x$.

Kẻ đường cao $FH, H \in MN$ ta có $FH = \sqrt{MF^2 - \left(\frac{MN - EF}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - x)$.

Vậy diện tích hình thang là $S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - x^2)$.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình vuông $ABCD$ và tam giác đều SAB nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M là điểm di động trên đoạn AB . Mặt phẳng (α) qua M song song với (SBC) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

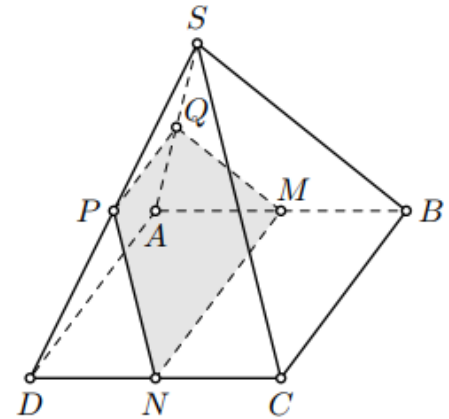
- A. Hình tam giác. B. Hình vuông. C. Hình bình hành. **D. Hình thang.**

Lời giải

Do $(\alpha) \parallel (SBC)$ nên (α) cắt mặt phẳng $(ABCD)$ theo giao tuyến $MN \parallel BC, (N \in CD)$.

Hoàn toàn tương tự, ta có (α) cắt các mặt phẳng (SAB) và (SCD) theo các giao tuyến MQ, NP ở đó $Q \in SA$ và $MQ \parallel SB; P \in SD$ và $NP \parallel SC$.

Mặt phẳng (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

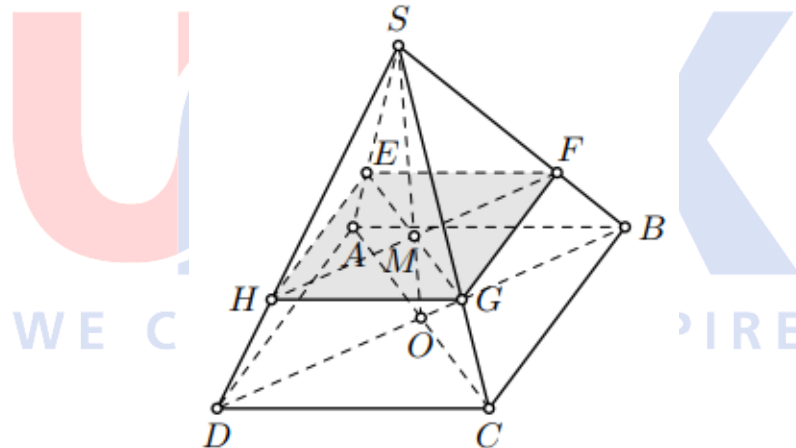


Dễ thấy $PQ \parallel AD, PQ \neq AD$ từ đó suy ra $MNPQ$ là hình thang.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là điểm bất kì trên đoạn thẳng SO . Mặt phẳng (α) qua M và song song với $(ABCD)$. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) là hình gì?

- A. Hình bình hành. B. Hình tam giác. C. Hình ngũ giác. D. Hình thang cân.

Lời giải



Xét mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (α) có M là điểm chung và $AC \parallel (\alpha)$ nên giao tuyến là đường thẳng đi qua M và song song với AC cắt SA, SC lần lượt tại E, G . Tương tự (α) cắt SB, SD lần lượt tại F, H . Khi đó thiết diện cần tìm là tứ giác $EFGH$.

Ta có $EF \parallel GH$ và $FG \parallel EH$ nên thiết diện là hình bình hành.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm $O, AB = 8, SA = SB = 6$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua O và song song với (SAB) . Tính diện tích của thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$.

- A. 12. B. $5\sqrt{5}$. C. $6\sqrt{5}$. D. 13.

Lời giải

Qua O dựng đường thẳng $PQ \parallel AB \Rightarrow P, Q$ lần lượt là trung điểm của AD và BC .

Tư vấn hướng nghiệp cho học sinh bằng phân tích nhân tướng học – xem chỉ tay – tử vi

Qua P dựng đường thẳng $PN \parallel SA \Rightarrow N$ là trung điểm của SD .

Qua Q dựng đường thẳng $QM \parallel SB \Rightarrow M$ là trung điểm của SC .

Nối M và $N \Rightarrow$ thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $MNPQ$.

Vì $PQ \parallel CD, MN \parallel CD \Rightarrow PQ \parallel MN$ nên tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

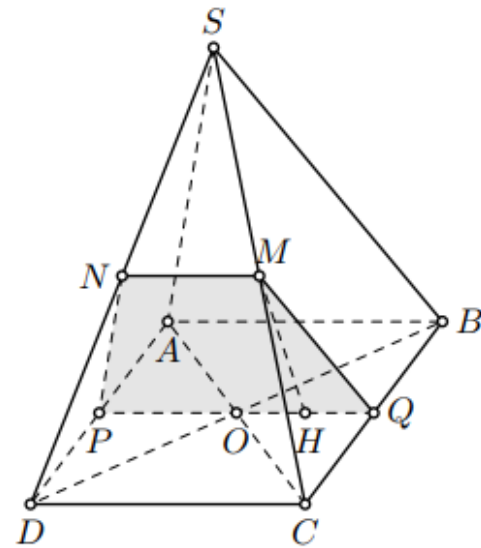
Ta có $PQ = AB = 8, MN = \frac{1}{2}AB = 4, MQ = NP = \frac{1}{2}SA = 3$ suy ra

$MNPQ$ là hình thang cân.

Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh M của hình thang $MNPQ$.

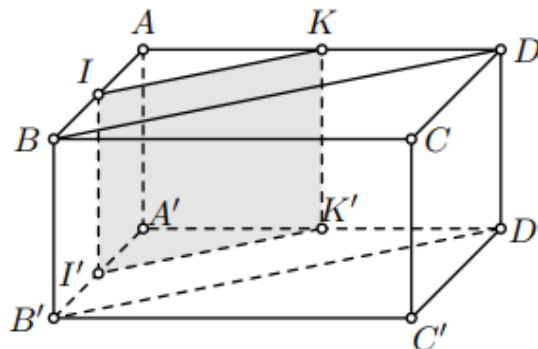
Khi đó ta có $HQ = \frac{1}{4}PQ = 2 \Rightarrow MH = \sqrt{MQ^2 - HQ^2} = \sqrt{5}$.

Vậy diện tích của thiết diện cần tìm là: $S = \frac{(MN + PQ) \cdot MH}{2} = 6\sqrt{5}$.



- Câu 4:** Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm của cạnh AB , (α) là mặt phẳng đi qua I và song song với mặt phẳng (BDD') . Thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng (α) là hình gì?
- A.** Hình tam giác. **B.** Hình bình hành. **C.** Hình ngũ giác. **D.** Hình thang.

Lời giải



Qua I kẻ đường thẳng song song với BD cắt AD tại K .

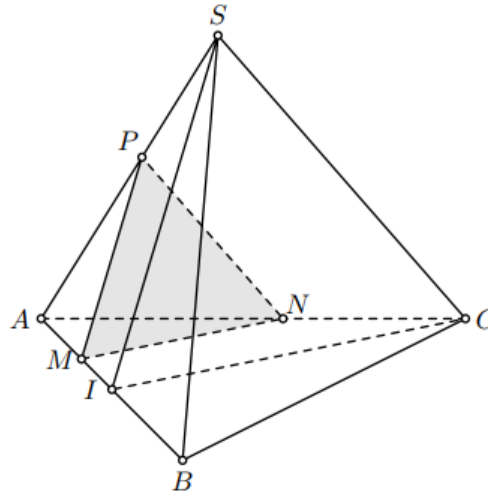
Qua K kẻ đường thẳng song song với DD' cắt $A'D'$ tại K' .

Qua I kẻ đường thẳng song song với BB' cắt $A'B'$ tại I' .

Thiết diện cần tìm là hình bình hành $IKKT'$.

- Câu 5:** Cho tứ diện đều $SABC$. Gọi I là trung điểm của đoạn AB , M là điểm di động trên đoạn AI . Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song với (SIC) . Thiết diện tạo bởi (α) với tứ diện $SABC$ là
- A.** Tam giác cân tại M . **B.** Hình bình hành. **C.** Tam giác đều. **D.** Hình thoi.

Lời giải



Trong mặt phẳng (SAB) qua M kẻ đường thẳng song song với SI cắt SA tại P .

Trong mặt phẳng (ABC) qua M kẻ đường thẳng song song với IC cắt AC tại N .

Thiết diện là tam giác MNP . Ta có $\frac{MP}{SI} = \frac{MN}{CI} \Rightarrow MP = MN$ (vì $SI = CI$)

Vậy thiết diện là tam giác MNP cân tại M .

Câu 6: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a và G là trọng tâm tam giác ABC . Cắt tứ diện bởi mặt phẳng (P) qua G và song song với mặt phẳng (BCD) thì diện tích thiết diện bằng bao nhiêu?

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$.

B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{9}$.

D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{18}$.

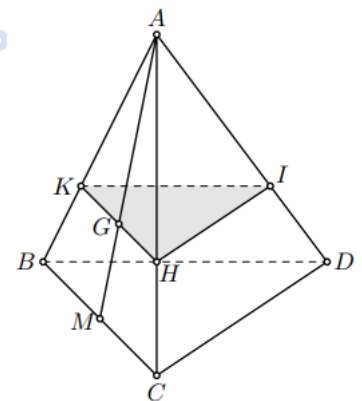
Lời giải

Trong mặt phẳng (ABC) kẻ đường thẳng qua G và song song với BC cắt AC, AB lần lượt tại H, K .

Trong mặt phẳng (ACD) kẻ đường thẳng qua H và song song với CD cắt AD tại I .

Thiết diện cần tìm là tam giác KHI . Ta có: $\Delta HKI \sim \Delta BCD$ theo tỉ số đồng dạng bằng $\frac{2}{3}$.

$$\text{Do đó: } S_{KHI} = \frac{4}{9} S_{BCD} = \frac{4}{9} \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{9}.$$



Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Tam giác SBD đều. Một mặt phẳng (P) song song với (SBD) và qua điểm I thuộc cạnh AC (không trùng với A hoặc C).

Thiết diện của (P) và hình chóp là hình gì?

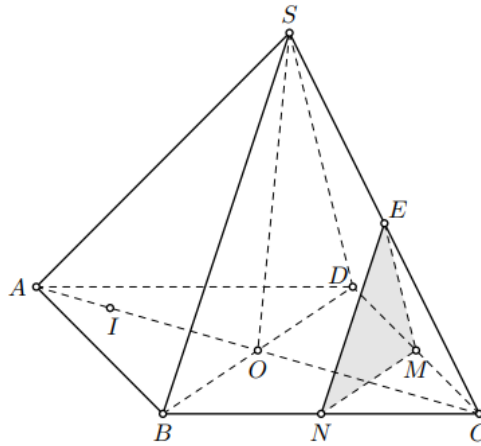
A. Hình bình hành.

B. Tam giác đều.

C. Tam giác vuông.

D. Tam giác cân không đều.

Lời giải



Trường hợp 1: Điểm I thuộc đoạn OC . Gọi M, N, E lần lượt là giao điểm của (P) với các đường thẳng CD, BC, SC . Ta có thiết diện của (P) và hình chóp là tam giác EMN .

$$\begin{cases} (P) \parallel (SBD) \\ (ABCD) \cap (SBD) = BD \Rightarrow MN \parallel BD \Rightarrow \frac{MN}{BD} = \frac{CM}{CD} = t \Rightarrow MN = t \cdot BD \\ (P) \cap (ABCD) = MN \end{cases}$$

$$\begin{cases} (P) \parallel (SBD) \\ (SCD) \cap (SBD) = SD \Rightarrow ME \parallel SD \Rightarrow \frac{ME}{SD} = \frac{CM}{CD} = t \Rightarrow ME = t \cdot SD \\ (P) \cap (SCD) = ME \end{cases}$$

Tương tự $EN \parallel SB$ và $EN = t \cdot SB$

Mà $SB = BD = SD \Rightarrow MN = EM = EN$, suy ra tam giác MNE là tam giác đều.

Trường hợp 2: Điểm I thuộc OA . Làm tương tự như trên ta được thiết diện của (P) và hình chóp cũng là một tam giác đều.

Câu 8: Cho tứ diện đều $S \cdot ABC$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và SC . Xét M là một điểm di động trên đoạn thẳng AI . Qua M kẻ mặt phẳng (α) song song với (CIJ) . Khi đó thiết diện của mặt phẳng (α) và tứ diện $S.ABC$ là hình gì?

A. Tam giác đều.

B. Hình bình hành.

C. Tam giác cân tại M .

D. Hình thang cân.

Lời giải

Nhận xét mặt phẳng (CIJ) chính là mặt phẳng (SCI) .

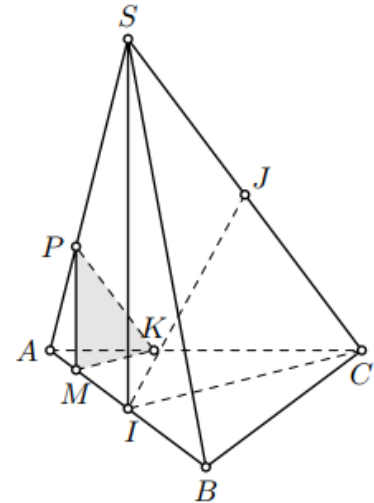
Qua M kẻ đường thẳng song song với IC cắt AC tại K .

Qua M kẻ đường thẳng song song với SI cắt SA tại P .

Thiết diện là tam giác MPK .

Ta có: $CI = SI \neq SC$ nên tam giác SCI cân tại I mà $\Delta PKM \sim \Delta SCI$.

Do đó tam giác PKM cân tại M .



Câu 9: Cho hình chóp tứ giác đều $S \cdot ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. Gọi M là điểm trên SA sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD , cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là

A. $\frac{20}{3}$.

B. $\frac{400}{9}$.

C. $\frac{4}{9}$.

D. $\frac{16}{9}$.

Lời giải

$$\begin{cases} AB \parallel (\alpha) \\ AB \subset (SAB) \\ M \in (SAB) \cap (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = Mx \parallel AB$$

$$\begin{cases} AD \parallel (\alpha) \\ AD \subset (SAD) \\ M \in (SAD) \cap (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAD) = My \parallel AD.$$

Hai tia Mx, My cắt SB, SD lần lượt tại N, Q và

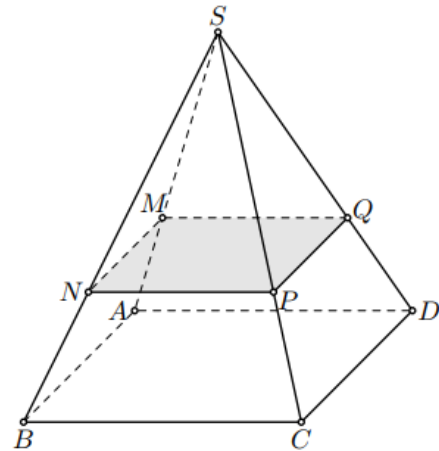
$$\begin{cases} CD \parallel (\alpha) \\ CD \subset (SCD) \\ Q \in (SCD) \cap (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = Qz \parallel CD$$

Tia Qz cắt SC tại P nên thiết diện cần tìm là tứ giác $MNPQ$.

$$\text{Dễ thấy } \frac{2}{3} = \frac{SM}{SA} = \frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{QM}{DA} \Rightarrow MN = NP = PQ = QM = \frac{20}{3}.$$

Mặt khác $MN \parallel AB, NP \parallel BC \Rightarrow (MN, NP) = (AB, BC) = 90^\circ \Rightarrow MNPQ$ là hình vuông với cạnh

$$\frac{20}{3} \Rightarrow S_{MNPQ} = \left(\frac{20}{3} \right)^2 = \frac{400}{9}.$$



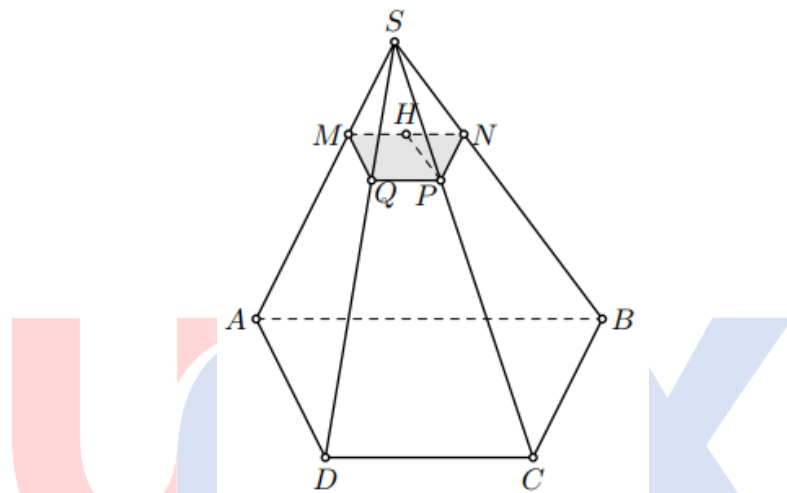
Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với cạnh bên $BC = 3$. Hai đáy $AB = 8$ và $CD = 4$. Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(ABCD)$ và cắt cạnh SA tại M sao cho $SA = 3SM$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{2\sqrt{5}}{9}$. B. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. C. $\frac{7\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{7\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của (P) với các cạnh SB, SC, SD . Suy ra thiết diện của (P) với hình chóp là tứ giác $MNPQ$.

Do $(P) \parallel (ABCD)$ nên $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN = \frac{8}{3}, NP = 1, PQ = \frac{4}{3}, QM = 1$.



Gọi H là hình chiếu của P trên cạnh MN . Do $MNPQ$ là hình thang cân nên

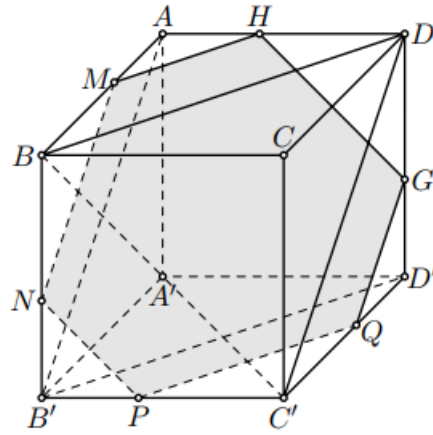
$$HN = \frac{MN - PQ}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow PH = \sqrt{PN^2 - HN^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{Vậy } S_{MNPQ} = \frac{1}{2} \cdot PH \cdot (MN + PQ) = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

Câu 11: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và điểm M nằm giữa hai điểm A và B . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng $(AB'D')$. Mặt phẳng (P) cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

- A. Hình tứ giác. B. Hình tam giác. C. Hình lục giác. D. Hình ngũ giác.

Lời giải



Nhận thấy $(BC'D) // (AB'D') \Rightarrow (BC'D) // (AB'D') // (P)$ (1)

Do (1) ta giả sử (P) cắt BB' tại N suy ra $(P) \cap (ABB'A') = MN$

Mà $(AB'D') \cap (ABB'A') = AB'$ suy ra $MN // AB'$ suy ra N thuộc cạnh BB' .

Tương tự giả sử $(P) \cap B'C' = P$ suy ra $(P) \cap (BCC'B') = NP$ kết hợp với (1) suy ra $NP // BC'$

Tương tự $(P) \cap C'D' = Q$ sao cho $PQ // B'D'$; $(P) \cap DD' = G$ sao cho $QG // C'D$

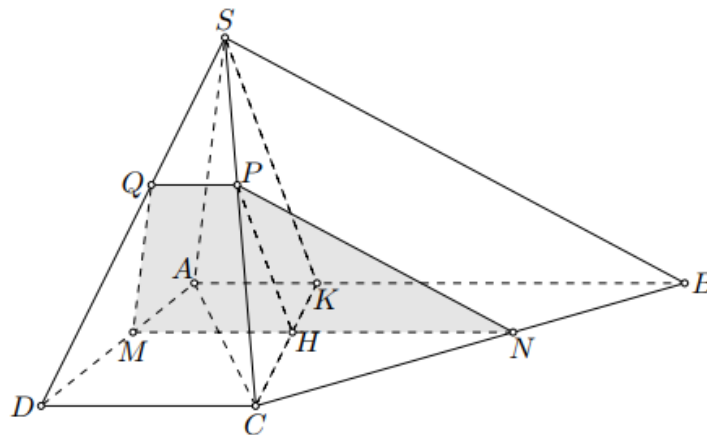
Hơn nữa $(P) \cap AD = H$ sao cho $GH // AD'$.

Từ đó suy ra thiết diện là lục giác $MNPQGH$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$, $AB // CD$, $AB = 2CD$, M là điểm thuộc cạnh AD , (α) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (SAB) . Biết diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) bằng $\frac{2}{3}$ diện tích tam giác SAB , tính tỉ số $x = \frac{MA}{MD}$.

- A. $x=1$. B. $x = \frac{2}{3}$. C. $x = \frac{3}{2}$. D. $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} (\alpha) // (SAB) \\ (ABCD) \cap (SAB) = AB \text{ với } AB, \text{ đường thẳng này cắt } BC \text{ tại } N. \\ M \in (\alpha) \cap (ABCD) \end{cases}$

Tương tự giao tuyến của (α) và (SBC) là đường thẳng qua N song song SB cắt SC tại P , giao tuyến của (α) và (SCD) là đường thẳng qua P song song CD cắt SD tại Q . Thiết diện của $S.ABCD$ khi cắt bởi (α) là hình thang $MNPQ$.

$$\text{Đặt } CD = a \text{ ta có } \frac{PQ}{CD} = \frac{SQ}{SD} = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow PQ = \frac{ax}{x+1}.$$

$$\text{Trong hình thang } ABCD \text{ ta có } MN = \frac{x}{x+1}CD + \frac{1}{x+1}AB = \frac{a(x+2)}{x+1}.$$

Gọi K là hình chiếu của S lên AB , H là giao của MN và CK khi đó $PH \parallel SK$

$$\text{Do đó } PH \perp MN \text{ và } \frac{PH}{SK} = \frac{CH}{CK} = \frac{DM}{DA} = \frac{1}{x+1} \text{ nên } \frac{S_{MNPQ}}{S_{ABC}} = \frac{(PQ + MN) \cdot PH}{SK \cdot AB} = \frac{1}{x+1}.$$

$$\text{Theo giả thiết } \frac{1}{x+1} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O , cạnh a , các cạnh bên đều bằng $2a$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua O và song song với mặt phẳng (SBC) . Tính chu vi P của thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và hình chóp $S.ABCD$.

A. $P = \frac{7a}{2}$.

B. $P = \frac{11a}{2}$.

C. $P = \frac{9a}{2}$.

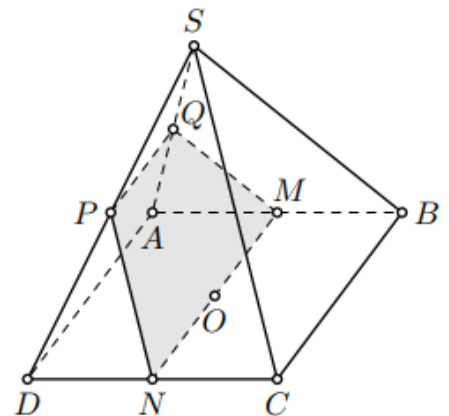
D. $P = \frac{5a}{2}$.

Lời giải

Do $(\alpha) \parallel (SBC)$ nên (α) cắt mặt phẳng $(ABCD)$ theo giao tuyến đi qua O song song với BC và cắt AB tại M , cắt CD tại N .

Hoàn toàn tương tự ta có (α) cắt các mặt phẳng (SAB) và (SCD) theo các giao tuyến MQ, NP ở đó $Q \in SA$ và $MQ \parallel SB; P \in SD$ và $NP \parallel SC$.

Mặt phẳng (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $MNPQ$.



Lại có O là trung điểm AC nên M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD, SD, SA .

$$\text{Suy ra } MN = a, NP = \frac{1}{2}SC = a, MQ = \frac{1}{2}SB = a, PQ = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Vậy chu vi của thiết diện là } P = MN + NP + PQ + QM = a + a + \frac{a}{2} + a = \frac{7a}{2}.$$

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD, AB // CD, AB = 2CD$. M là điểm thuộc cạnh $AD, (\alpha)$ là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (SAB) . Biết diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) bằng $\frac{2}{3}$ diện tích tam giác SAB . Tính tỉ số $x = \frac{MA}{MD}$.

- A. $x=1$. B. $x = \frac{3}{2}$. C. $x = \frac{2}{3}$. D. $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Dễ thấy, thiết diện là hình thang $MNPQ$ (như hình vẽ)

Khi đó: $MN // AB, MQ // SA, PQ // CD, NP // SB$.

Gọi $E = AD \cap BC$ và $F = MQ \cap NP$. Đặt $MD = 1$ vì $x = \frac{MA}{MD}$ nên $MA = x, AD = x + 1$.

$$\frac{QP}{DC} = \frac{SQ}{SD} = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{x+1} \Rightarrow \frac{QP}{AB} = \frac{x}{2(x+1)} \text{ mà } \frac{MN}{AB} = \frac{EM}{EA} = \frac{x+2}{2x+2} \Rightarrow \frac{QP}{MN} = \frac{x}{x+2}.$$

$$\frac{S_{FPQ}}{S_{FMN}} = \frac{FQ}{FM} \cdot \frac{FP}{FN} = \left(\frac{QP}{MN} \right)^2 = \left(\frac{x}{x+2} \right)^2 = \frac{x^2}{(x+2)^2}.$$

$$\frac{S_{FMN}}{S_{SAB}} = \frac{FM}{SA} \cdot \frac{FN}{SB} = \frac{EM}{EA} \cdot \frac{EN}{EB} = \left(\frac{MN}{AB} \right)^2 = \left(\frac{x+2}{2x+2} \right)^2$$

$$\Rightarrow S_{FMN} = \frac{(x+2)^2}{(2x+2)^2} \cdot S_{\Delta SAB}.$$

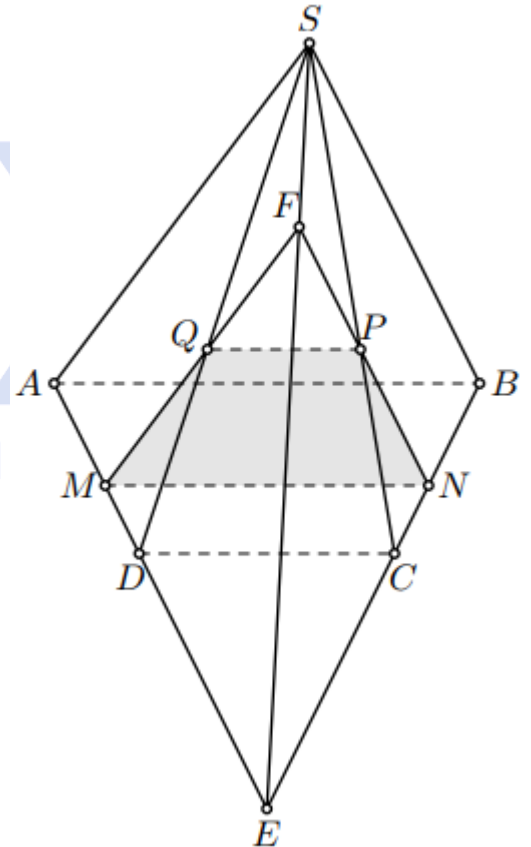
$$\Rightarrow \frac{S_{FPQ}}{S_{SAB}} = \left(\frac{x}{x+2} \right)^2 \cdot \left(\frac{x+2}{2x+2} \right)^2 = \frac{x^2}{(2x+2)^2}$$

$$\Rightarrow S_{FPQ} = \frac{x^2}{(2x+2)^2} \cdot S_{SAB} \Rightarrow S_{MNPQ} = S_{FMN} - S_{FPQ}$$

$$= \left[\frac{(x+2)^2}{(2x+2)^2} - \frac{x^2}{(2x+2)^2} \right] \cdot S_{\Delta SAB} = \frac{4x+4}{(2x+2)^2} \cdot S_{\Delta SAB}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{MNPQ}}{S_{SAB}} = \frac{4x+4}{(2x+2)^2}.$$

$$\text{Theo đề bài ta có } \frac{S_{MNPQ}}{S_{SAB}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{4x+4}{(2x+2)^2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 8x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases}$$



Vì $x > 0$ nên $x = \frac{1}{2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tam giác SAD đều. Đáy $ABCD$ là hình thang có $AD \parallel BC$ và $AB = BC = CD = 1, AD = 2$. Gọi (P) là mặt phẳng qua điểm M nằm trên cạnh AB và song song với (SAD) . Đặt $BM = x$ với $(0 < x < 1)$. Tìm x để thiết diện của $S.ABCD$ cắt bởi (P) có diện tích bằng một nửa diện tích tam giác SAD

a) Thiết diện của $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là một mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (SAD) .

b) Thiết diện cần tìm là một lục giác đều

c) Qua M kẻ đường thẳng song song với AD cắt CD tại N thì $MN = 1 - x$

d) Để thiết diện của $S.ABCD$ cắt bởi (P) có diện tích bằng một nửa diện tích tam giác SAD thì

giá trị của $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

a) Đúng: Qua M kẻ đường thẳng song song với AD cắt CD tại N .

Qua M kẻ đường thẳng song song với SA cắt SB tại Q .

Qua Q kẻ đường thẳng song song với BC cắt SC tại P .

Suy ra $(MNPQ)$ là mặt phẳng qua M và song song với (SAD) .

b) Sai: Do đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là tứ giác $MNPQ$.

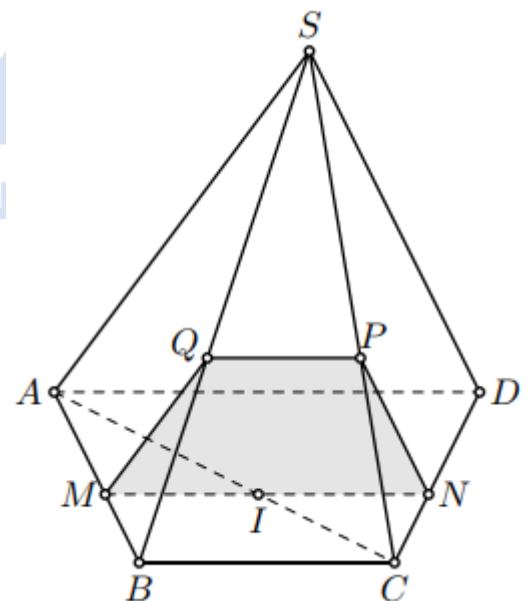
c) Sai: Bởi vì MN và PQ cùng song song với BC (hoặc AD) nên tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

Tam giác SAD đều, cạnh $AD = 2$ nên $SA = SD = 2$.

Áp dụng định lí Thales trong các tam giác SAB, SBC, SCD ta được:

$$x = \frac{BM}{BA} = \frac{MQ}{SA} = \frac{BQ}{BS} = \frac{CP}{CS} = \frac{CN}{CD} = \frac{NP}{SD} \text{ và } \frac{PQ}{BC} = \frac{SQ}{SB} = \frac{AM}{AB} = 1 - x.$$

Suy ra $MQ = NP = 2x, CN = x$ và $PQ = 1 - x$.

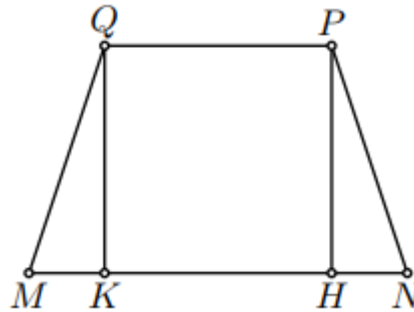


Tiếp tục áp dụng định lí Thales trong các tam giác ABC, ACD ta được:

$$1-x = \frac{AM}{BC} = \frac{MI}{BC}, x = \frac{CN}{CD} = \frac{IN}{AD}, \Rightarrow MI = 1-x \text{ và } IN = 2x \Rightarrow MN = x+1.$$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của P, Q trên MN .

$$\text{Ta có } MK = HN = \frac{MN - PQ}{2} = \frac{(x+1) - (1-x)}{2} = x.$$



$$\Rightarrow QK = \sqrt{QM^2 - MK^2} = \sqrt{4x^2 - x^2} = x\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{(PQ + MN) \cdot QK}{2} = \frac{(1-x+1+x) \cdot \sqrt{3}x}{2} = \sqrt{3}x.$$

$$\text{d) Sai: Từ giả thiết: } S_{MNPQ} = \frac{1}{2} S_{SBD} \Leftrightarrow \sqrt{3}x = \frac{1}{2} \frac{(2x)^2 \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \sqrt{3}x = \frac{x^2 \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ do } (0 < x < 1).$$

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác BCD . Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AG . Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng đi qua O đồng thời song song với mặt phẳng (ABC) và diện tích tam giác ABC . Gọi I là trung điểm BC . Trong mặt phẳng (AID) qua O kẻ đường thẳng song song với AI cắt AD tại P và cắt DI tại J . Qua J kẻ đường thẳng song song với MN , cắt CD tại N và cắt BD tại M . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

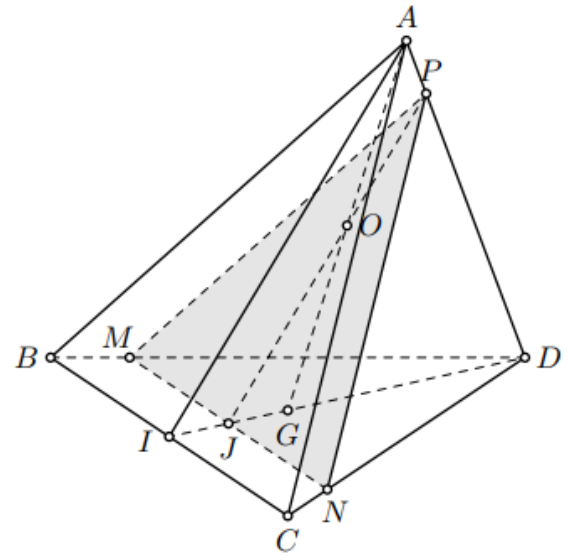
a) Thiết diện cần tìm là một hình thang

b) $\frac{JD}{ID} = \frac{6}{5}$

c) $\frac{MN}{BC} = \frac{5}{6}$

d) $\frac{S_1}{S_2} = \frac{25}{26}$

Lời giải



a) Sai: Gọi I là trung điểm BC . Trong mặt phẳng (AID) qua O kẻ đường thẳng song song với AI cắt AD tại P và cắt DI tại J .

Qua J kẻ đường thẳng song song với MN , cắt CD tại N và cắt BD tại M .

Thiết diện cần tìm là tam giác MNP .

b) Sai: Trong tam giác AIG có $OJ \parallel AI$ hơn nữa O là trung điểm AG nên J là trung điểm IG

Do đó $IJ = \frac{1}{2}IG = \frac{1}{6}ID \Rightarrow \frac{JD}{ID} = \frac{5}{6}$.

c) Đúng: Suy ra hai tam giác MNP và BCA đồng dạng theo tỉ số $k = \frac{MN}{BC} = \frac{JD}{ID} = \frac{5}{6}$.

d) Đúng: Vậy $\frac{S_1}{S_2} = k^2 = \frac{25}{36}$.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi I là trung điểm đoạn CD và M là điểm nằm trên đoạn BC (M khác B và C). Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (ABI) . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Giao tuyến của (α) và mặt phẳng (BCD) là MP với $P \in CD$

b) Giao tuyến của (α) và mặt phẳng (ACD) là MQ với $Q \in AC$

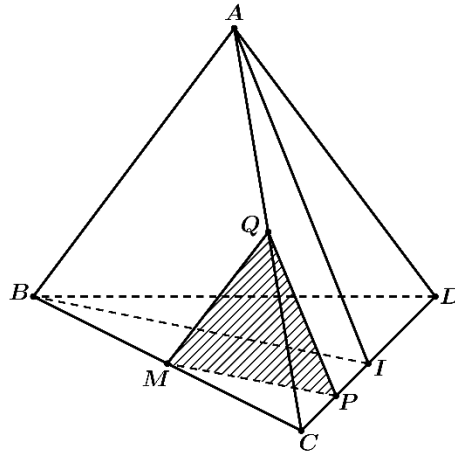
c) $PQ = (\alpha) \cap (ABC)$

d) Thiết diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi (α) là một tam giác cân

Lời giải

a) Đúng: Theo giả thiết ta có $IA = IB$ suy ra $\triangle AIB$ cân tại I . Do (α) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (ABI) nên:

Trong (BCD) kẻ $MP \parallel BI, P \in CD$ suy ra $MP = (\alpha) \cap (BCD)$.



b) Sai: Trong (ACD) kẻ $PQ \parallel AI, Q \in AC$ suy ra $PQ = (\alpha) \cap (ACD)$.

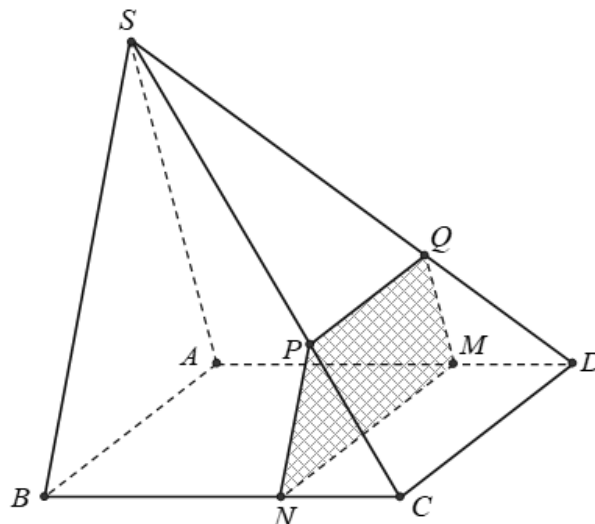
c) Sai: Khi đó $MQ = (\alpha) \cap (ABC)$

d) Đúng: Thiết diện diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi (α) là ΔMPQ thì theo cách dựng ta suy ra ΔMPQ đồng dạng với ΔBIA suy ra ΔMPQ cân tại P .

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, mặt bên SAB là tam giác vuông tại A , $SA = a\sqrt{3}$, $SB = 2a$. Điểm M nằm trên đoạn AD sao cho $AM = 2MD$. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với (SAB) . Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) .

- a) Giao tuyến của mặt phẳng (P) với $(ABCD)$ là MN với $N \in BC$
 b) Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) là một hình bình hành.
 c) Độ dài của cạnh $AB = a$
 d) Diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) bằng $\frac{5a^2\sqrt{3}}{8}$

Lời giải



a) Đúng: Ta có:
$$\begin{cases} (P) \parallel (SAB) \\ M \in AD, M \in (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (P) \cap (ABCD) = MN \\ (P) \cap (SCD) = PQ \end{cases} \text{ và } MN \parallel PQ \parallel AB$$

Lại có
$$\begin{cases} (P) \parallel (SAB) \\ M \in AD, M \in (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (P) \cap (SAD) = MQ \\ (P) \cap (SBC) = NP \end{cases} \text{ và } \begin{cases} MQ \parallel SA \\ NP \parallel SB \end{cases}$$

Mà tam giác SAB vuông tại A nên $SA \perp AB \Rightarrow MN \perp MQ$

b) Sai : Từ đó suy ra (P) cắt hình chóp theo thiết diện là hình thang vuông tại M và Q .

c) Đúng : Mặt khác $MQ \parallel SA \Rightarrow \frac{MQ}{SA} = \frac{DM}{DA} = \frac{DQ}{DS} \Rightarrow MQ = \frac{1}{3}SA$ và $\frac{DQ}{DS} = \frac{1}{3}$.

$PQ \parallel CD \Rightarrow \frac{PQ}{CD} = \frac{SQ}{SD} \Rightarrow PQ = \frac{2}{3}AB$, với $AB = \sqrt{SB^2 - SA^2} = a$

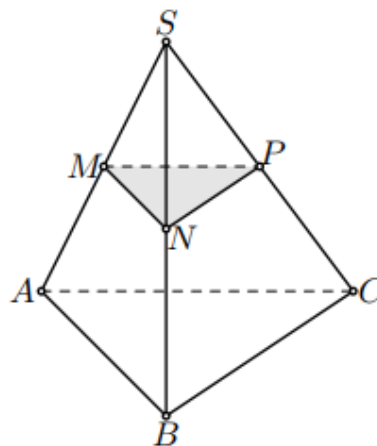
d) Sai: Khi đó $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}MQ.(PQ + MN) \Leftrightarrow S_{MNPQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}SA \cdot \left(\frac{2AB}{3} + AB \right) \Leftrightarrow S_{MNPQ} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{18}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có M di động trên cạnh SA sao cho $\frac{SM}{SA} = k$, với $(0 < k < 1, k \in \mathbb{R})$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (ABC) . Khi $k = \frac{\sqrt{m}}{n}$ với m, n nguyên dương thì mặt phẳng (α) cắt hình chóp $S.ABC$ theo một thiết diện có diện tích bằng nửa diện tích của tam giác ABC . Tính $m + n$

Lời giải



Qua M kẻ đường thẳng song song với AB cắt SB tại N .

Qua M kẻ đường thẳng song song với AC cắt SC tại P .

Thiết diện của hình chóp $S.ABC$ cắt bởi mặt phẳng (P) là tam giác MNP .

Ta có hai tam giác MNP và ABC đồng dạng theo tỉ số $\frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} = k$.

$$\text{Suy ra } \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m = n = 2 \Rightarrow m + n = 4.$$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $AB \parallel CD, AB = 2CD$. Điểm M thuộc cạnh AD (M không trùng với A và D) sao cho $\frac{MA}{MD} = x$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với (SAB) . Tìm x để diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) bằng một nửa diện tích tam giác SAB .

Lời giải

Dễ thấy thiết diện là hình thang $MNPQ$ (như hình vẽ)

Khi đó $MN \parallel SA, NP \parallel CD, PQ \parallel SB, QM \parallel AB$.

Gọi E là giao điểm của MN và PQ .

$$\begin{aligned} \text{Tacó: } QM &= \frac{MD}{AD} \cdot AB + \frac{AM}{AD} \cdot CD \\ &= \frac{1}{x+1} AB + \frac{x}{x+1} \cdot CD = \frac{x+2}{2(x+1)} \cdot AB. \end{aligned}$$

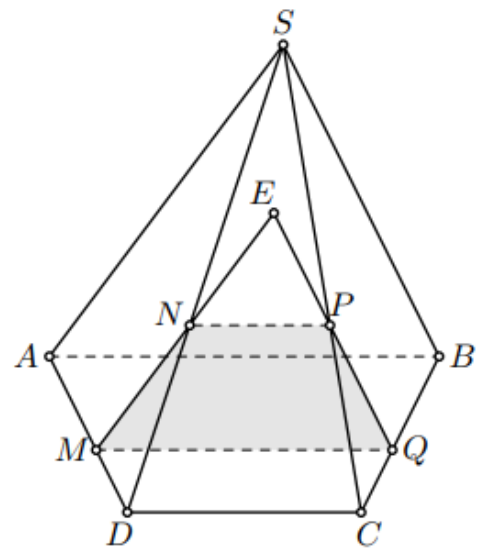
Hai tam giác SAB và EMQ đồng dạng nên

$$\frac{S_{EMQ}}{S_{SAB}} = \left(\frac{MQ}{AB} \right)^2 = \frac{(x+2)^2}{4(x+1)^2}.$$

$$\text{Vì } \frac{NP}{CD} = \frac{NS}{SD} = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{x+1} \text{ suy ra } NP = \frac{x}{x+1} CD = \frac{x}{2(x+1)} AB.$$

$$\text{Do đó } \frac{NP}{QM} = \frac{x}{x+2} \text{ và } \frac{S_{EPN}}{S_{EMQ}} = \left(\frac{NP}{MQ} \right)^2 = \frac{x^2}{(x+2)^2} \Rightarrow \frac{S_{MNPQ}}{S_{EMQ}} = 1 - \frac{x^2}{(x+2)^2} = \frac{4x+4}{(x+2)^2}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{S_{MNPQ}}{S_{ABC}} = \frac{4x+4}{4(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} \Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{1}{2} S_{SAB} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1.$$



Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC thỏa mãn $AB = AC = 4, \angle BAC = 30^\circ$. Mặt phẳng (P) song song với (ABC) cắt đoạn SA tại M sao cho $SM = 2MA$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Lời giải

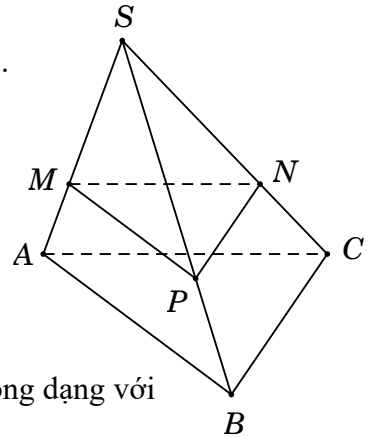
Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin BAC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ = 4$.

Gọi N, P lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (P) và các cạnh SB, SC .

Vì $(P) \parallel (ABC)$ nên theo định lý Talet, ta có $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{2}{3}$.

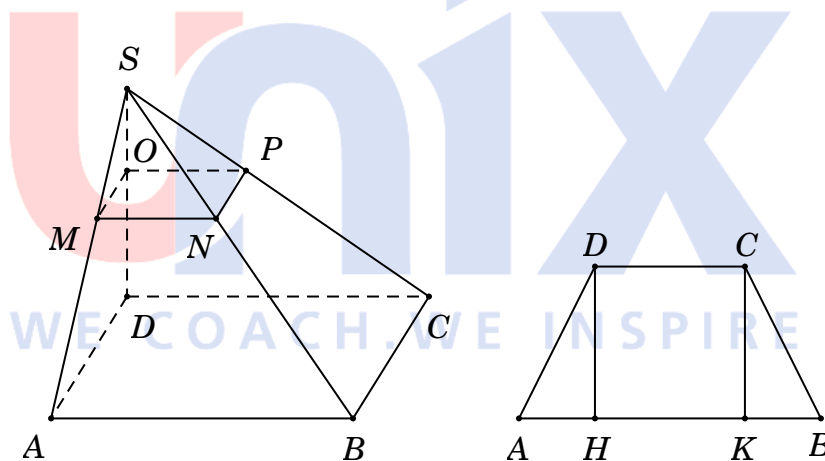
Khi đó (P) cắt hình chóp $S.ABC$ theo thiết diện là tam giác MNP đồng dạng với

tam giác ABC theo tỉ số $k = \frac{2}{3}$. Vậy $S_{\triangle MNP} = k^2 \cdot S_{\triangle ABC} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 4 = \frac{16}{9} \approx 1,78$.



Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với cạnh bên $BC = 2$, hai đáy $AB = 6$, $CD = 4$. Mặt phẳng (P) song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh SA tại M sao cho $SA = 3SM$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Lời giải



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của D, C trên AB

$ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow \begin{cases} AH = BK; CD = HK \\ AH + HK + BK = AB \end{cases} \Rightarrow BK = 1$.

Tam giác BCK vuông tại K , có $CK = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

Suy ra diện tích hình thang $ABCD$ là $S_{ABCD} = CK \cdot \frac{AB + CD}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{4 + 6}{2} = 5\sqrt{3}$.

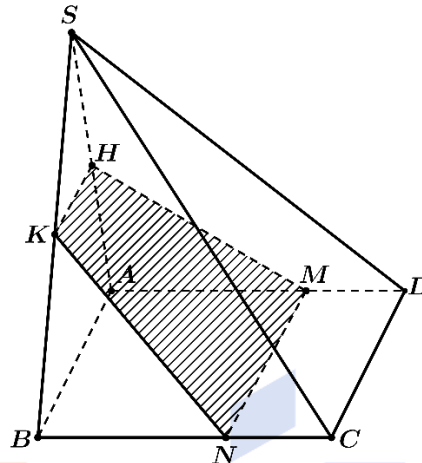
Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của (P) và các cạnh SB, SC, SD .

Vì $(P) \parallel (ABCD)$ nên theo định lý Talet, ta có $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{QM}{AD} = \frac{1}{3}$.

Khi đó (P) cắt hình chóp theo thiết diện $MNPQ$ có diện tích $S_{MNPQ} = k^2 \cdot S_{ABCD} = \frac{5\sqrt{3}}{9} \approx 0,96$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , tam giác SAB đều, $SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của SA, SB . Gọi M là một điểm trên cạnh AD , mặt phẳng (HKM) cắt BC tại N . Đặt $AM = x$ ($0 \leq x \leq a$). Tìm giá trị của x để diện tích thiết diện $HKMN$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



Mặt phẳng (HKM) và $(ABCD)$ chứa hai đường thẳng song song HK và AB nên giao tuyến của chúng là MN cũng song song với HK và AB . Xét hai tam giác HAM và KBN có:

$BN = AM$; $BK = AH$; $\angle KBN = \angle MAH$ nên $\triangle HAM = \triangle KBN$.

Từ đó suy ra: $MH = KN$. $MHKN$ là hình thang cân có hai đáy $MN = a$; $HK = \frac{a}{2}$.

Sử dụng định lý hàm số $\cos$ cho tam giác SAD ta tính được $\cos \angle HAD = -\frac{1}{2}$.

Ta tính được: $HM^2 = HA^2 + AM^2 - 2HA \cdot AM \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{a^2 + 4x^2 + 2ax}{4}$.

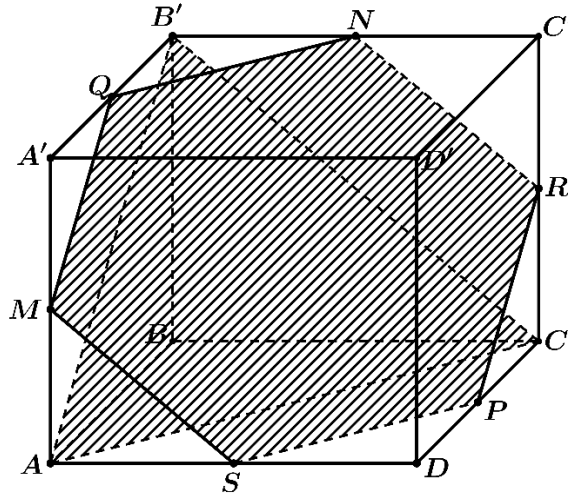
Đường cao của hình thang cân được tính bằng công thức:

$$\sqrt{HM^2 - \left(\frac{MN - HK}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{16x^2 + 8ax + 3a^2}.$$

Do hai đáy có độ dài không đổi nên diện tích thiết diện bé nhất khi đường cao bé nhất đạt khi $x = 0$

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $AB = 4$. Trên các cạnh $AA', B'C', CD$ lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $MA = NB' = PC = x$ ($2 \leq x < 4$). Khi thiết diện được tạo bởi mặt phẳng (MNP) cắt hình lập phương có diện tích bằng $11\sqrt{3}$ thì giá trị x bằng bao nhiêu?

Lời giải



Ta có: $\frac{MA}{MA'} = \frac{NB'}{NC'} \Rightarrow MN, AB', A'C'$ thuộc ba mặt phẳng song song hay $MN // (\alpha)$ do chứa AB' và song song với $A'C' \Rightarrow (\alpha) \equiv (AB'C)$.

Lại có $\frac{MA}{MA'} = \frac{PC}{PD} \Rightarrow MP, AC, A'D$ thuộc ba mặt phẳng song song hay $MP // (\beta)$ do chứa AC và $A'D \Rightarrow (\beta) \equiv (AB'C)$.

Khi đó $\begin{cases} MN // (AB'C) \\ MP // (AB'C) \Rightarrow (MNP) // (AB'C) \\ MN \cap MP \end{cases}$

Ta lại có: $\begin{cases} (MNP) // (AB'C) \\ (AA'B'B) \cap (AB'C) = AB' \Rightarrow (MNP) \cap (AA'B'B) = d \Rightarrow d \cap A'B' = Q \\ M \in (MNP) \cap (AA'B'B) \end{cases}$

Tương tự ta xác định được các giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt $ABCD$ và $BB'C'C$ của hình lập phương. Từ đó, thiết diện của hình lập phương bị cắt bởi mặt phẳng (MNP) là lục giác $MQNRPS$ như hình vẽ.

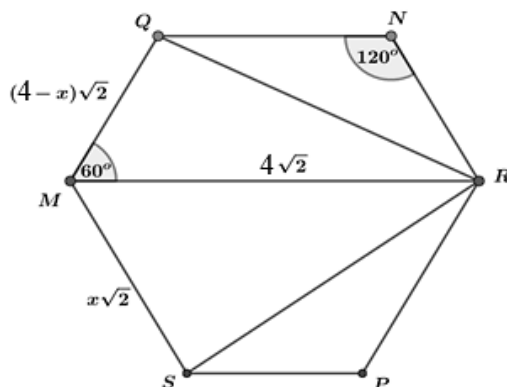
Tam giác $AB'C$ đều và $(QM, QN) = (AB', AC) = 60^\circ$. Từ đó dễ thấy lục giác $MQNRPS$ có tất cả các góc bằng 120° .

Tam giác AMS vuông cân tại A nên $MS = AM \cdot \sqrt{2} = x\sqrt{2}$ và tương tự $PR = QN = x\sqrt{2}$.

Tam giác $A'MQ$ vuông cân tại A' nên $MQ = A'M \cdot \sqrt{2} = (4-x)\sqrt{2}$

Tương tự ta có: $NR = SP = (4-x)\sqrt{2}$.

$$\begin{cases} (MNP) // AC \\ (MNP) \cap (AA'C'C) = MR \Rightarrow MR // AC \Rightarrow MRCA \text{ là hình bình hành} \Rightarrow MR = AC = 4\sqrt{2} . \\ AC \subset (AA'C'C) \end{cases}$$



$$S_{MQNRPS} = S_{MQRS} + 2S_{QNR} = \frac{4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ}{2} + (4-x)\sqrt{2} \cdot x\sqrt{2} \cdot \sin 120^\circ = 8\sqrt{3} + \sqrt{3}(4-x)x .$$

$$S_{MQNRPS} = 11\sqrt{3} \Leftrightarrow (4-x)x = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} .$$

Đổi chiều điều kiện lấy $x = 3$.

HẾT