

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

Câu 1: Một nông trại tưới nước theo phương pháp vòi phun xoay vòng trung tâm. Nếu xét trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho trước thì tâm vòi phun được đặt tại tọa độ $(30; 40)$ và vòi có thể phun xa tối đa 50m. Hỏi tại địa điểm trên nông trại có tọa độ $(60; 81)$ vòi có thể phun nước tới không?



Lời giải

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (C) là đường tròn có tâm $I(30; 40)$ và bán kính $R = 50$. Khi đó phương trình đường tròn (C) là: $(x - 30)^2 + (y - 40)^2 = 2500$.

Nhận xét: Vòi phun nước chỉ có thể phun tới các điểm nằm trong hình tròn giới hạn bởi đường tròn (C) . Xét điểm $A(60; 81)$, ta có $IA = \sqrt{(60 - 30)^2 + (81 - 40)^2} = \sqrt{2581} \approx 50,8m$. Khi đó $IA > R$, vậy vòi phun nước không thể phun tới địa điểm có tọa độ $(60; 81)$.

Câu 2: Một nhóm bạn tham quan tại khu du lịch Suối Tiên đang xác định nơi dừng chân cắm trại để ăn trưa. Nhà hàng Phù đồng có tọa độ $(-150; 250)$ và có quy định miễn phí vận chuyển thức ăn trong vòng 200m tính từ nhà hàng. Hãy xác định những vị trí nhóm có thể cắm trại để được miễn phí vận chuyển thức ăn.



Đó là những điểm nằm trong hình tròn được giới hạn bởi đường tròn (C), trong đó

Kết luận: Phương trình của đường tròn (C) là $(x+150)^2 + (y-250)^2 = 4$.



Lời giải

- Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(13;4)$ và bán kính $R_1 = 2$. Mặt khác ca sĩ thứ nhất đang ở vị trí điểm $A(11;4)$ nên tính được $I_1A = 2$ và $I_1A = R_1$. Từ đó điểm A nằm trong hình tròn được xác định bởi (C_1) , suy ra **ca sĩ A được đèn chiếu sáng**.
- Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(3;4)$ và bán kính $R_2 = 2$. Mặt khác ca sĩ thứ hai đang ở vị trí điểm $B(4;5)$ nên tính được $I_2B = \sqrt{2}$ và $I_2B < R_2$. Từ đó điểm B nằm trong hình tròn được xác định bởi (C_2) , suy ra **ca sĩ B được đèn chiếu sáng**.
- Đường tròn (C_3) có tâm $I_3(5;13)$ và bán kính $R_3 = \sqrt{3}$. Mặt khác ca sĩ thứ ba đang ở vị trí điểm $C(6;14)$ nên tính được $I_3C = \sqrt{2}$ và $I_3C < R_3$. Từ đó điểm C nằm trong hình tròn được xác định bởi (C_3) , suy ra **ca sĩ C được đèn chiếu sáng**.

Câu 4: Xét trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , ba thành phố nằm tại các vị trí $A(-1;4), B(5;6), C(6;3)$. Một đài truyền hình phục vụ cư dân muốn xây dựng một cơ sở phát sóng mới cách đều ba thành phố. Tọa độ của vị trí đặt cơ sở phát sóng mới nên được xây dựng ở đâu?

Lời giải

Phát biểu lại bài toán: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC , với các đỉnh $A(-1;4), B(5;6), C(6;3)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC . Gọi $I(x; y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Ta có $IA = IB$ và $IB = IC$ nên

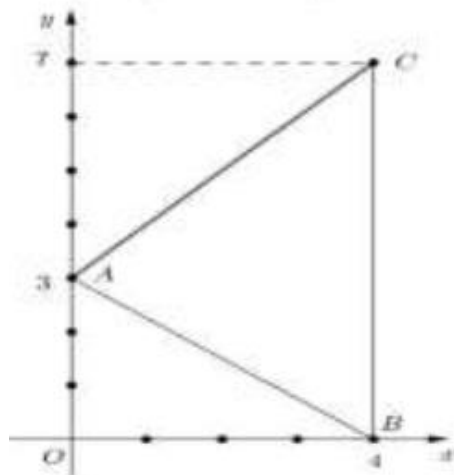
$$\begin{cases} IA^2 = BI^2 \\ BI^2 = CI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (y-4)^2 = (x-5)^2 + (y-6)^2 \\ (x-5)^2 + (y-6)^2 = (x-6)^2 + (y-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 11 \\ x - 3y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Kết luận: Vậy tọa độ của vị trí đặt cơ sở phát sóng mới nên được xây dựng là $I\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

Câu 5: Để tiết kiệm điện cho hệ thống chiếu sáng của một công viên nhỏ hình tam giác, ban quản lý công viên muốn thiết kế lại hệ thống chiếu sáng bằng cách đặt một cây đèn sao cho đủ để chiếu sáng toàn bộ công viên. Em hãy giúp ban quản lý xác định vị trí cột đèn và giải thích sự lựa chọn của em.



Lời giải



Nhận xét. Thiết lập một hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó tọa độ các đỉnh của công viên chẳng hạn có tọa độ lần lượt là $A(0;3), B(4;0), C(4;7)$. Gọi $I(x; y)$ là điểm đặt cây đèn sao cho đèn chiếu sáng toàn bộ công viên. Vùng mà cây đèn chiếu sáng được biểu diễn bằng một hình tròn mà điểm đặt cây đèn là tâm nên để chiếu sáng toàn bộ công viên ta cần **đặt cây đèn ở tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle ABC$** .

Bài toán phát biểu lại như sau: Trong mặt phẳng với tọa độ Oxy cho $\triangle ABC$ có tọa độ các đỉnh là $A(0;3), B(4;0), C(4;7)$. Tìm tọa độ **tâm đường tròn ngoại tiếp** của $\triangle ABC$.

Điểm $I(x; y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle ABC$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (3-y)^2 = (4-x)^2 + y^2 \\ x^2 + (3-y)^2 = (4-x)^2 + (7-y)^2 \end{cases}$$

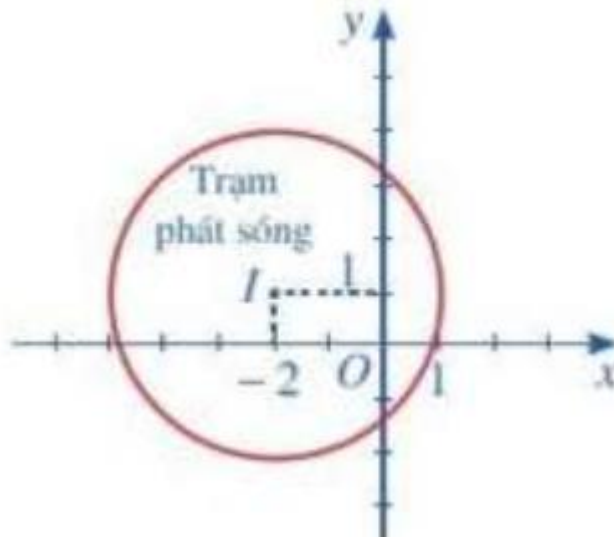
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 6y = 7 \\ 8x + 8y = 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Vậy $I\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

Câu 6: Hình bên mô phỏng trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí I có tọa độ $(-2;1)$ trong mặt phẳng tọa độ.

- Lập phương trình đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng, biết rằng trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng 3km.
- Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $(-1;3)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này không? Giải thích.
- Tính theo đường chim bay, xác định khoảng cách ngắn nhất để một người ở vị trí có tọa độ $(-3;4)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét.

Lời giải



- a. Đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng có tâm $I(-2;1)$ và bán kính $R = 3\text{km}$ nên có phương trình $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$.
- b. Xét điểm $A(-1;3)$, ta có $IA = \sqrt{5} < R$ nên suy ra điểm A nằm trong hình tròn giới hạn bởi đường tròn trên. Khi đó tại điểm $A(-1;3)$ vẫn có thể sử dụng dịch vụ điện thoại.
- c. Xét điểm $B(-3;4)$, để xác định khoảng cách ngắn nhất để một người đang ở vị trí điểm B di chuyển được tới vùng phủ sóng thì chúng ta cần tìm điểm $M(x;y)$ trong mặt phẳng tọa độ nằm trên đường tròn $(C): (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$ sao cho độ dài đoạn thẳng MB ngắn nhất. Ta chứng minh được $MB_{\min} = IB - R = \sqrt{10} - 3 \approx 0,16\text{ km}$.

Câu 7: Có ba trạm thu phát tín hiệu từ một chiếc điện thoại di động P . Xét trong mặt phẳng tọa độ Oxy, vị trí của các trạm thu phát tín hiệu nói trên có tọa độ lần lượt là $A(0; 0)$, $B(36; 0)$, $C(16; 32)$. Người ta thấy rằng khoảng cách giữa P và ba trạm A, B, C lần lượt là 29km , 25km , 13km . Giả sử A, B, C, P cùng nằm trên một mặt phẳng. Tìm tọa độ của điểm P .

Lời giải

- Gọi (C_1) là đường tròn có tâm là điểm $A(0; 0)$, bán kính $R_1 = 29km$.
 Vậy phương trình đường tròn (C_1) là $x^2 + y^2 = 841$.
- Gọi (C_2) là đường tròn có tâm là điểm $B(36; 0)$, bán kính $R_2 = 25km$.
 Vậy phương trình đường tròn (C_2) là $(x - 36)^2 + y^2 = 625$.
- Gọi (C_3) là đường tròn có tâm là điểm $C(16; 32)$, bán kính $R_3 = 13km$.
 Vậy phương trình đường tròn (C_3) là $(x - 16)^2 + (y - 32)^2 = 169$.

$$\text{trình: } \begin{cases} x^2 + y^2 = 841 \\ (x-36)^2 + y^2 = 625 \\ (x-16)^2 + (y-32)^2 = 169 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 841 \\ (x^2 + y^2) - 72x = -671 \\ (x^2 + y^2) - 32x - 64y = -1111 \end{cases}$$

6 | **Ths. Lê Việt – THPT Thăng Long, Hà Nội – Phone: 0835221183 - Ôn thi cam kết điểm số**

thẳng Δ đi qua điểm $M(3; 4)$ và nhận vectơ $\overrightarrow{OM} = (3; 4)$ làm một vectơ pháp tuyến nên có phương trình tổng quát là $3(x-3) + 4(y-4) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 25 = 0$.

Kết luận: Trong khoảng thời gian ngắn ngay sau khi văng ra khỏi quỹ đạo tròn, vật chuyển động trên đường thẳng Δ có phương trình là $3x + 4y - 25 = 0$.

Câu 10: Một vận động viên ném đĩa đã vung đĩa theo một đường tròn (C)

có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{169}{144}$. Khi người đó vung đĩa

đến một vị trí điểm $M\left(\frac{17}{12}; 2\right)$ thì buông đĩa. Viết phương trình

tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm M .



Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R = \frac{13}{12}$. Gọi Δ là tiếp tuyến của đường tròn (C)

tại điểm M . Khi đó Δ đi qua $M\left(\frac{17}{12}; 2\right)$ và nhận $\overrightarrow{IM}\left(\frac{5}{12}; 1\right)$ làm vectơ pháp tuyến nên có

phương trình tổng quát là: $\frac{5}{12}\left(x - \frac{17}{12}\right) + 1(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 60x + 144y - 373 = 0$.

Câu 11: Ném đĩa là môn thể thao thi đấu trong Thế vận hội Olympic mùa hè, Khi thực hiện cú ném, vận động viên thường quay lưng lại với hướng ném, sau đó xoay ngược chiều kim đồng hồ một vòng

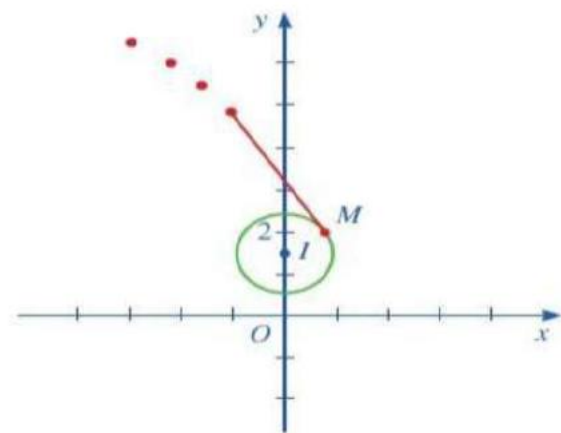
rưỡi của đường tròn để lấy đà rồi thả tay ra khỏi đĩa. Giả sử đĩa chuyển động trên một đường tròn

tâm $I\left(0; \frac{3}{2}\right)$, bán kính $0,8$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Đến điểm $M\left(\frac{\sqrt{39}}{10}; 2\right)$, đĩa được ném

đi. Trong những giây đầu tiên ngay sau khi được ném đi, quỹ đạo chuyển động của chiếc đĩa có phương trình như thế nào?



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)



Lời giải

Xét trong mặt phẳng tọa độ Oxy thì đĩa chuyển động trên một đường tròn có tâm $I\left(0; \frac{3}{2}\right)$ và

bán kính $R = 0,8$. Phương trình của đường tròn (C) là $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{16}{25}$.

$$\Delta: 1,57x + 2,57 - 8 = 0$$

A diagram of a semi-circular arch bridge. The arch is supported by two brick pillars. The radius of the arch is labeled as 4.2 m, and the width of the bridge is labeled as 8.4 m.

-

- 9 | **Ths. Lê Việt – THPT Thăng Long, Hà Nội – Phone: 0835221183 - Ôn thi cam kết điểm số**

A wide-angle night photograph of a city square filled with a large crowd of people. In the center, a large screen displays a performance. The square is surrounded by buildings, including a prominent modern building with a curved facade on the right. The foreground shows a row of lit-up, conical structures, possibly part of a stage or installation.

Lời giải

- Ta có: $A(0;3), B(4;0), C(4;7)$ nên:

$$\overrightarrow{IA} = (-x; 3 - y) \Rightarrow IA = \sqrt{x^2 + (3 - y)^2}$$

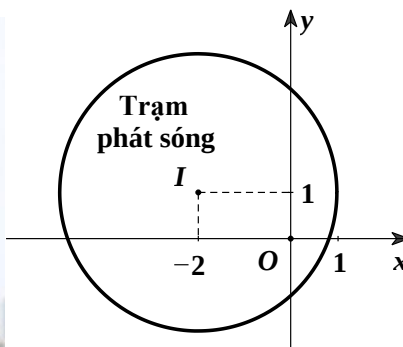
$$\overrightarrow{IB} = (4-x; -y) \Rightarrow IB = \sqrt{(4-x)^2 + y^2}$$

$$\overrightarrow{IC} = (4-x; 7-y) \Rightarrow IC = \sqrt{(4-x)^2 + (7-y)^2}$$

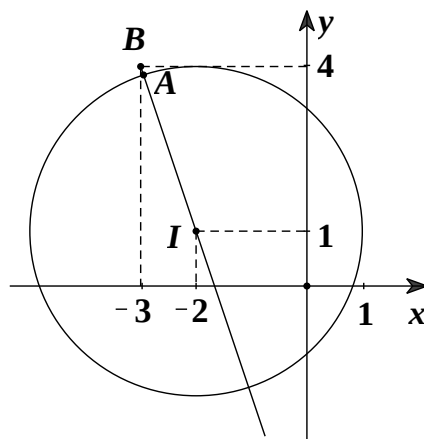
Do I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle ABC$ nên ta có $IA = IB, IA = IC$, ta lập được hệ

phương trình $\begin{cases} 8x - 6y = 7 \\ 8x + 8y = 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases}$. Vậy $I\left(\frac{7}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

Câu 16: Hình vẽ bên dưới mô phỏng một trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí I có tọa độ $(-2;1)$ trong mặt phẳng tọa độ. Tính theo đường chim bay, xác định khoảng cách ngắn nhất để một người ở vị trí có tọa độ $(-3;4)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét. Biết rằng trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng 3 km.



Lời giải



Đường tròn màu đen mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng có tâm $I(-2; 1)$ và bán kính phủ sóng 3km nên phương trình đường tròn đó là: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$.

Giả sử vị trí đứng của người đó là $B(-3; 4)$.

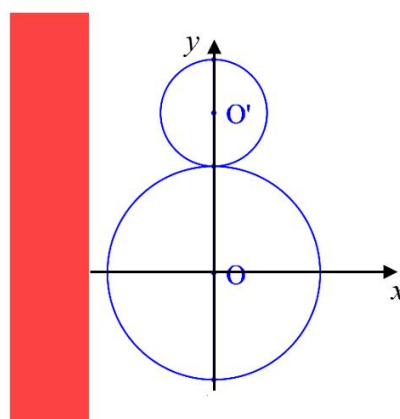
Gọi A là giao điểm thứ nhất của đường tròn tâm I và BI

$\Rightarrow$ Khoảng cách ngắn nhất để người đó di chuyển được từ vị trí $B(-3; 4)$ tới vùng phủ sóng là BA .

Ta có: $IB = \sqrt{(-3+2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10}$

Suy ra $AB = IB - IA = \sqrt{10} - 3 = 0,16$.

Câu 17: Ở các nước xứ lạnh, vào mùa Đông thường có tuyết rơi dày đặc khắp các con đường, trẻ em tại đây rất thích đắp hình dạng của người tuyết. Có thể xem phần thân dưới và thân trên của người tuyết là hai hình cầu tiếp xúc nhau. Vào ba đêm ta dùng một chiếc đèn pin soi vuông góc với người tuyết thì được hình ảnh là hai hình tròn tiếp xúc nhau như hình vẽ. Em hãy viết phương trình đường tròn lớn và đường tròn nhỏ biết kích thước của hai viên tuyết cần đắp để được một người tuyết cao 1,8m có đường kính của phần thân dưới phải gấp đôi đường kính của phần thân trên người tuyết.



Lời giải

Ta có: $1,8m = 180cm$.

Gọi r là bán kính của đường tròn nhỏ ($r > 0$).

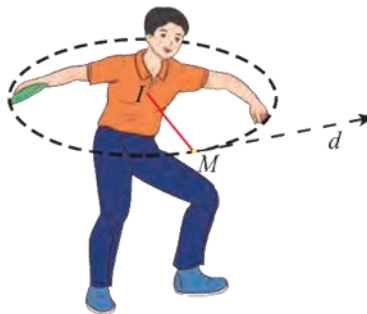
$\Rightarrow$ Đường kính của đường tròn nhỏ là $2r$.

$\Rightarrow$ Đường kính của đường tròn lớn là: $2.2r = 4r$.

Ta có: $2r + 4r = 6r = 180$.

$\Leftrightarrow r = 30$.

Phương trình đường tròn (O') có tâm $O'(0;90)$ và bán kính $r=30$: $(x-90)^2 + y^2 = 900$.



Lời giải

Đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{169}{144}$ có tâm $I(1;1)$.

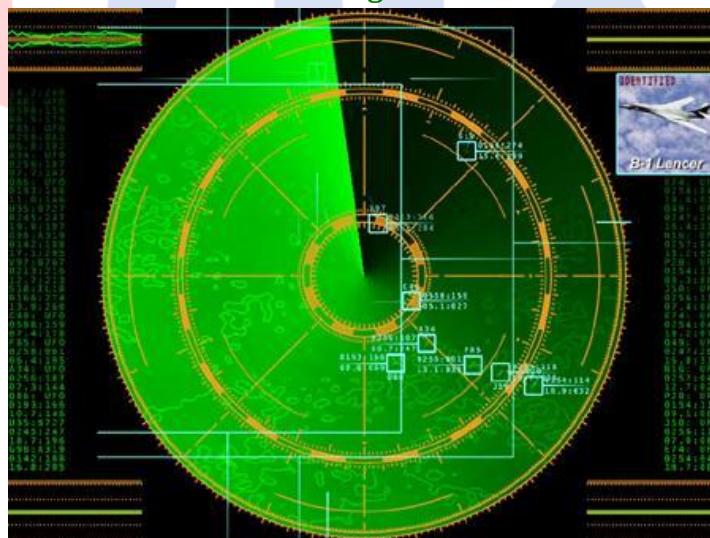
Điểm $M\left(\frac{17}{12}; 2\right)$ thuộc đường tròn (C) .

Phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M\left(\frac{17}{12}; 2\right)$ là đường thẳng đi qua M và

nhận vector $\overrightarrow{IM} = \left(\frac{5}{12}; 1\right)$ làm VTPT nên có phương trình $60x + 144y - 373 = 0$.

Câu 20: Tọa độ trong hệ thống kiểm soát phòng không trong không quân Việt Nam của một hệ thống radar trong phạm vi bán kính 10 km trở lại. Nếu một vật thể lạ di chuyển qua hệ thống trên không lý do sẽ có nguy cơ bị bắn hạ để bảo vệ an toàn trên vùng trời. Chọn hệ quy chiếu điểm ngắm là gốc tọa độ O. Hỏi máy bay đang bay ở tọa độ $M(6;7)$ trên bầu trời có bị lọt vào tầm ngắm không? Vì sao?

Lời giải



Phương trình đường tròn trong phạm vi rada kiểm soát: $x^2 + y^2 = 100$

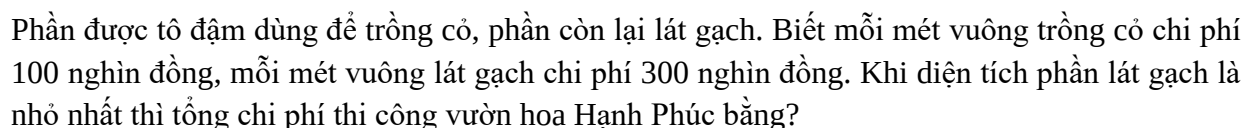
Nếu máy bay bay trong phạm vi kiểm soát của rada nghĩa là nằm trên hoặc miền trong của đường tròn trên thì sẽ có nguy cơ bị bắn hạ. Còn nằm miền ngoài sẽ không bị bắn hạ

Theo tiêu chí trên ta có máy bay ở vị trí $M(6;7)$ thế vào đường tròn

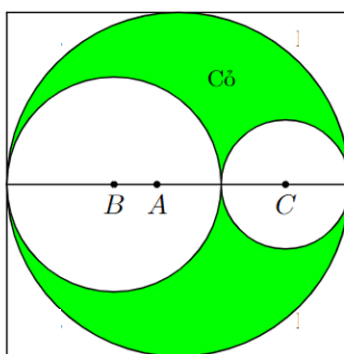
$$VT = 6^2 + 7^2 = 85 < 100$$

Vây máy bay bị lọt vào tầm ngắm của radar

Câu 21: Thiết kế khu vườn Hạnh Phúc hình vuông cạnh 10m như hình vẽ.



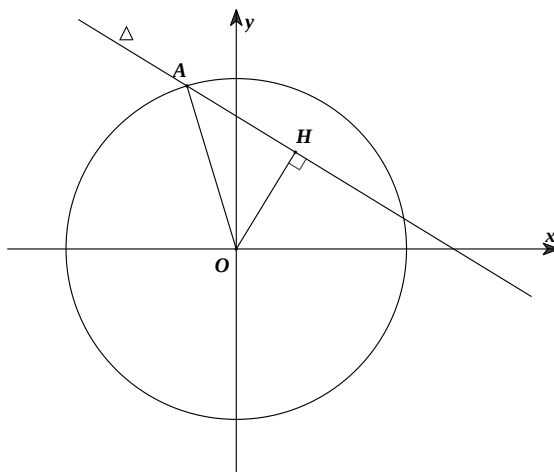
Lời giải



Gọi $S(m^2)$ là phần diện tích được lát gạch của khu vườn ($S > 0$), ta có

WE COACH.WE INSPIRE

thẳng $\Delta: x+y-5=0$. Khi đó bài toán trở thành: Tìm R nhỏ nhất để (C) và Δ có ít nhất một điểm chung, với hoành độ và tung độ đều là các số dương?



Ta có (C) và Δ có ít nhất một điểm chung khi và chỉ khi

b) Đường tròn có tâm I: $\begin{cases} x_I = 1 - m \\ y_I = m - 2 \end{cases} \Rightarrow x_I + y_I = -1 \Leftrightarrow x_I + y_I + 1 = 0$

17 | **Ths. Lê Việt – THPT Thăng Long, Hà Nội – Phone: 0835221183 - Ôn thi cam kết điểm số**

Kẻ $IH \perp CD$ tại H . Khi đó:

$$CH = 3, IH = d(I, \Delta) = \frac{|-9a + 29|}{5} \Rightarrow R = IC = \sqrt{CH^2 + IH^2} = \sqrt{9 + \frac{(9a - 29)^2}{25}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$10a^2 - 50a + 65 = 9 + \frac{(9a - 29)^2}{25} \Leftrightarrow 169a^2 - 728a + 559 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow I(1; -3) \Rightarrow R = 5 \\ a = \frac{43}{13} \Rightarrow I\left(\frac{43}{13}; \frac{51}{13}\right) \Rightarrow R = \frac{5\sqrt{61}}{13} \end{cases}$$

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn là $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$ và $\left(x - \frac{43}{13}\right)^2 + \left(y - \frac{51}{13}\right)^2 = \frac{1525}{169}$.

Câu 29: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , viết phương trình đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(-1;0)$, $B(1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $(\Delta): x - y - 1 = 0$.

Lời giải

Phương trình đường tròn có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

Khi đó tọa độ tâm của đường tròn là $I(a;b)$ và bán kính R .

Do đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(-1;0)$; $B(1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng

$$(\Delta): x - y - 1 = 0 \text{ nên ta có hệ phương trình } \begin{cases} (-1-a)^2 + (-b)^2 = R^2 & (1) \\ (1-a)^2 + (2-b)^2 = R^2 & (2) \\ \frac{|a-b-1|}{\sqrt{2}} = R & (3) \end{cases}$$

Từ, suy ra: $(-1-a)^2 + (-b)^2 = (1-a)^2 + (2-b)^2 \Leftrightarrow a+b=1 \quad (4)$.

Từ, suy ra: $(-1-a)^2 + (-b)^2 = \frac{|a-b-1|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow (a-b-1)^2 = 2[(1+a)^2 + b^2]$

$$\Leftrightarrow 1 + (a+b)^2 + 6(a+b) - 8b = 0 \quad (5)$$

Từ và suy ra: $a=0; b=1; R=\sqrt{2}$.

Vậy phương trình đường tròn cần lập có dạng: $x^2 + (y-1)^2 = 2$.

Cách 2.

Gọi $I(x;y)$ là tâm của đường tròn (C) . Ta có: $d_{(I,\Delta)} = \frac{|x-y-1|}{\sqrt{2}} = R \quad (1)$

Mà $AI = R = IB$

$$\Rightarrow \text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = d^2_{(I,d)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 \\ (x+1)^2 + y^2 = \frac{|x-y-1|^2}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ (x+y)^2 + 6x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ 2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow I(0;1)$$

$$(1) \Rightarrow R = \frac{|0-1-1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình đường tròn } (C) \text{ là: } (x-0)^2 + (y-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 2.$$

Câu 30: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi (C) là đường tròn đi qua hai điểm $A(1;1)$, $B(1;4)$ và tiếp xúc với trục Ox . Đường tròn này cắt trục Oy theo dây cung MN . Tính độ dài MN .

Lời giải

Đường trung trực d của đoạn AB đi qua trung điểm $K\left(1; \frac{5}{2}\right)$ của AB và nhận $\overrightarrow{AB} = (0;3)$

làm vec tơ pháp tuyến nên phương trình có dạng: $0(x-1) + 3\left(y - \frac{5}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow y - \frac{5}{2} = 0$.

Vì đường tròn (C) đi qua hai điểm A, B nên tâm I của nó phải thuộc (d) .

Giả sử $I\left(a; \frac{5}{2}\right)$.

Ta có: $R = IA = d(I; Ox)$.

$$\text{Hay } \sqrt{(1-a)^2 + \left(1 - \frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 3 \end{cases}.$$

TH1: Với $a = -1$ phương trình đường tròn (C) là: $(x+1)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

Đường tròn này cắt trục Oy tại hai điểm $M\left(0; \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{4}\right)$; $N\left(0; \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{4}\right)$

Khi đó độ dài $MN = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

TH2: Với $a = 3$ phương trình đường tròn (C) là: $(x-3)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$. Đường tròn này không cắt trục Oy .

Câu 31: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (C) là đường tròn đi qua hai điểm $A(-1;3)$, $B(3;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $(\Delta): 3x - 4y + m = 0$. Viết phương trình của (C) biết điểm A cách đường thẳng (Δ) một khoảng lớn nhất.

Lời giải

Đường trung trực d của đoạn AB đi qua trung điểm $I(1;2)$ của AB và nhận $\overrightarrow{AB} = (4; -2)$ làm vec tơ pháp tuyến nên phương trình có dạng: $4(x-1) - 2(y-2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 0$ (d).

Vì đường tròn (C) đi qua hai điểm A, B nên tâm I của nó phải thuộc (d) .

Giả sử $I(a; 2a) \in (d)$; Gọi M là tiếp điểm của (Δ) với (C) .

Vì A cách đường thẳng (Δ) một khoảng lớn nhất nên I phải là trung điểm của AM .

Suy ra $M(2a+1; 4a-3)$.

Do $M \in \Delta$ nên $3(2a+1) - 4(4a-3) + m = 0 \Leftrightarrow m = 10a - 15$ (1).

Theo giả thiết $R = IB = d(I; \Delta)$.

$$\text{Hay } \sqrt{(3-a)^2 + (1-2a)^2} = \frac{|3a - 8a + m|}{5}$$

$$\Leftrightarrow 125a^2 - 250a + 250 = 25a^2 - 10ma + m^2 \quad (2).$$

$$\text{Thế vào ta có: } 4a^2 - 4a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; 1\right); R = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Phương trình đường tròn } (C) \text{ là: } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{25}{4}$$

Câu 32: Viết phương trình đường tròn (C) biết (C) đi qua $A(4;2)$ và tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1: x - 3y - 2 = 0, d_2: x - 3y + 18 = 0$.

Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng cách đều d_1, d_2 . Suy ra $\Delta: x - 3y + c = 0$.

Lấy $P(2;0) \in d_1, Q(0;6) \in d_2$. Khi đó trung điểm $M(1;3)$ của PQ nằm trên Δ . Do đó $c = 8$.

Vậy $\Delta: x - 3y + 8 = 0$.

$$\text{Ta có } R = \frac{1}{2}d(d_1; d_2) = \frac{1}{2}d(P, d_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{|2 - 3 \cdot 0 + 18|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}.$$

Gọi I là tâm đường tròn $\Rightarrow I \in \Delta \Rightarrow I(3t - 8; t)$.

Ta có $\overrightarrow{AI} = (3t - 12; t - 2)$.

Giải (1):(1) $\Leftrightarrow |a+2b|=|2a+b+4| \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=2a+b+4 \\ a+2b=-2a-b-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b-4 \\ a=-\frac{4+3b}{3} \end{cases}$

$$\frac{|b-4+2b|}{\sqrt{5}} = \sqrt{(5-b)^2 + (2-b)^2} \Leftrightarrow b^2 - 46b + 129 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ b = 43 \end{cases}$$

Với $b = 43 \Rightarrow a = 39$ bán kính $R = IA = 25\sqrt{5}$

+ Thay $a = -\frac{4+3b}{3}$ vào (2) ta có

$$\left| \frac{-4-3b}{3} + 2b \right| = \sqrt{\left(1 - \frac{-4-3b}{3}\right)^2 + (2-b)^2} \Leftrightarrow 81b^2 + 54b + 409 = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

$$dt(IHBK) = 2 \cdot \frac{1}{2} dt(IHB) = IH.HB.$$

Vì B là giao điểm của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 nên tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương

$$\text{trình: } \begin{cases} x+2y=0 \\ 2x+y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{8}{3} \\ y=\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow B\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right), IB = \frac{125\sqrt{2}}{3}$$

Ta có tam giác IHB vuông tại H nên $BH = \sqrt{IB^2 - R^2} = \frac{25\sqrt{5}}{3}$

$$\text{Vây } dt(IHBK) = IH.HB = 25\sqrt{5} \cdot \frac{25\sqrt{5}}{3} = \frac{3125}{3}.$$

23 | **Ths. Lê Việt – THPT Thăng Long, Hà Nội – Phone: 0835221183 - Ôn thi cam kết điểm số**

Lời giải

CÁCH 1:

Vì đường tròn cần tìm có tâm I nằm trên đường thẳng d nên gọi $I(6a+10; a)$.

Mặt khác đường tròn tiếp xúc với d_1, d_2 nên khoảng cách từ tâm I đến hai đường thẳng này bằng nhau và bằng bán kính R suy ra

$$\frac{|3(6a+10)+4a+5|}{5} = \frac{|4(6a+10)-3a-5|}{5} \Leftrightarrow |22a+35| = |21a+35| \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=\frac{-70}{43} \end{cases}$$

- Với $a=0$ thì $I(10;0)$ và $R=7$ suy ra $(C):(x-10)^2+y^2=49$

- Với $a=\frac{-70}{43}$ thì $I\left(\frac{10}{43}; \frac{-70}{43}\right)$ và $R=\frac{7}{43}$ suy ra $(C):\left(x-\frac{10}{43}\right)^2+\left(y+\frac{70}{43}\right)^2=\left(\frac{7}{43}\right)^2$

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn có phương trình là

$$(C):(x-10)^2+y^2=49 \text{ và } (C):\left(x-\frac{10}{43}\right)^2+\left(y+\frac{70}{43}\right)^2=\left(\frac{7}{43}\right)^2$$

CÁCH 2:

Dễ thấy d_1, d_2 cắt nhau. Vì (C) tiếp xúc với d_1, d_2 nên tâm I của đường tròn (C) nằm trên đường phân giác của d_1, d_2

Phương trình đường phân giác m của d_1 và d_2 :

$$\frac{|3x+4y+5|}{5} = \frac{|4x-3y-5|}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+7y+10=0 \\ 7x+y=0 \end{cases}$$

✓ Nếu $I \in m: -x+7y+10=0$ thì tọa độ I thỏa hệ: $\begin{cases} -x+7y=-10 \\ x-6y=10 \end{cases} \Rightarrow I(10;0)$

$$\Rightarrow R = d(I, d_1) = 7, \text{ phương trình đường tròn } (C):(x-10)^2+y^2=49$$

✓ Nếu $I \in m: 7x+y=0$ thì tọa độ I thỏa hệ: $\begin{cases} 7x+y=0 \\ x-6y=10 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{10}{43}; -\frac{70}{43}\right)$

$$\Rightarrow R = d(I, d_1) = \frac{7}{43}, \text{ phương trình đường tròn } (C):\left(x-\frac{10}{43}\right)^2+\left(y+\frac{70}{43}\right)^2=\left(\frac{7}{43}\right)^2$$

Câu 36: Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình đường tròn (C) có tâm nằm trên đường thẳng $d: x+y-8=0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng có phương trình $d_1: x+2y-16=0$ và $d_2: x-2y-4=0$.

Lời giải

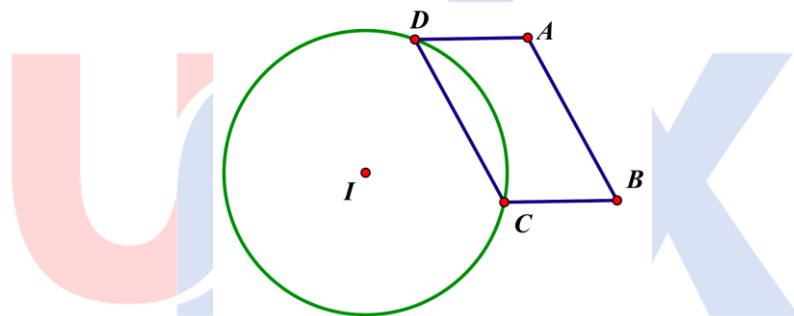
$$\Delta \text{ tạo với } d_1 \text{ một góc } 45^\circ: \frac{|3a+b|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2+b^2}} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow (3a+b)^2 = 5(a^2+b^2)$$

26 | **Ths. Lê Việt – THPT Thăng Long, Hà Nội – Phone: 0835221183 - Ôn thi cam kết điểm số**

$$R = d(I, \Delta_1) = \frac{|3a - 4b - 2|}{5} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 4b = 12 & (3) \\ 3a - 4b = -8 & (4) \end{cases}.$$

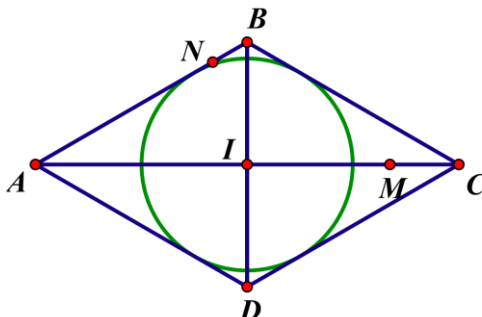
Từ (2) và (4) ta được $I\left(\frac{24}{25}; \frac{68}{25}\right)$.

Lời giải



Từ đó ta có hai phương trình đường thẳng CD thỏa mãn là: $2x - y + 1 = 0$ và $2x - y + 6 = 0$.

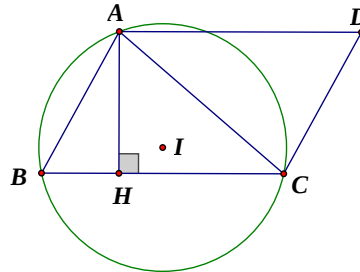
Lời giải



Suy ra: $A\left(\frac{75}{11}; \frac{86}{11}\right)$, $C\left(\frac{35}{11}; \frac{46}{11}\right)$, $B(15; -4)$, $D(-5; 16)$.

Câu 42: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ với $A(-3;6)$. Biết tam giác ABC có $AB.AC = 60\sqrt{2}$ và nội tiếp trong đường tròn có tâm $I(1;3)$, bán kính $R=5$. Hình chiếu của điểm A xuống cạnh BC thuộc đường thẳng $d: x+2y-3=0$. Hãy tìm tọa độ các đỉnh B, C, D biết hoành độ hình chiếu của A lớn hơn 1 và hoành độ của điểm B bé hơn hoành độ của điểm C .

Lời giải



Gọi $H(3-2a; a)$ là hình chiếu vuông góc của A lên BC .

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB.AC.\sin A = \frac{1}{2} AH.BC \Rightarrow AH = \frac{AB.AC.\sin A}{BC} = \frac{AB.AC}{2R} = 6\sqrt{2}.$$

$$AH = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 & (t/m) \\ a = \frac{36}{5} & (loại) \end{cases}. \text{ Suy ra } H(3;0).$$

Phương trình đường thẳng BC là: $x-y-3=0$.

Phương trình đường tròn $(I): (x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$.

$$\text{Khi đó tọa độ } B, C \text{ là nghiệm hệ phương trình: } \begin{cases} x-y-3=0 \\ (x-1)^2 + (y-3)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=3 \\ x=1 \\ y=-2 \end{cases}.$$

Mà $x_B < x_C$ nên $B(1;-2), C(6;3)$.

Suy ra tọa độ $D(2;11)$.