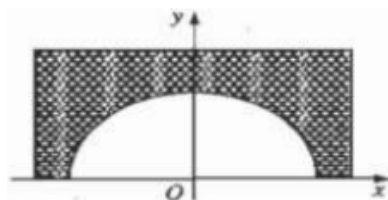


PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

DẠNG 4: ELIP

Câu 1: Một đường hầm xuyên qua núi có chiều rộng là $20m$, mặt cắt của đường hầm có dạng nửa elip như hình ảnh dưới đây. Biết rằng tâm sai của đường elip là $e \approx 0,5$. Hãy tìm chiều cao của đường hầm đó.



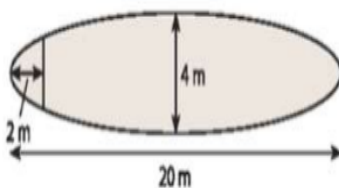
Lời giải

Gọi chiều cao của đường hầm là b . Nửa trục lớn của elip là $a = 10m$.

Theo giả thiết có tâm sai $e \approx 0,5$. Mà $e = \frac{c}{a}$ nên $\frac{c}{a} = 0,5 \Rightarrow c \approx 0,5a = 5m$

Chiều cao của đường hầm là $b = \sqrt{a^2 - c^2} \approx \sqrt{100 - 25} \approx 8,7m$

Câu 2: Một thuyền đua có hình elip mà khoảng cách từ đầu thuyền đến đuôi thuyền là $20m$, chiều ngang rộng nhất của thuyền là $4m$. Tính chiều ngang của thuyền ở vị trí cách đầu thuyền $2m$.



Lời giải

Phương trình của Elip có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, 0 < b < a$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} 2a = 20 \\ 2b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 2 \end{cases}$. Phương trình của Elip có dạng $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{4} = 1$.

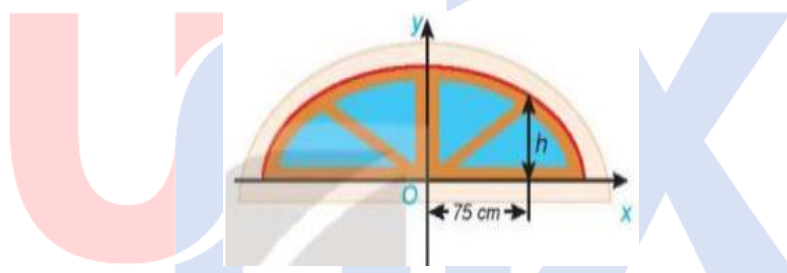
Tại vị trí của điểm trên thuyền cách đầu thuyền $2m$ ứng với điểm M nằm trên Elip có hoành độ bằng -8 . Khi đó tung độ của điểm M là $1,2$ hoặc $-1,2$.

Kết luận: Vậy chiều ngang của thuyền ở vị trí cách đầu thuyền $2m$ là $2.1,2 = 2,4m$.

A diagram of a bridge arch. The arch is represented by a blue curve. The span of the arch is labeled as 20 m, and the height from the base to the top of the arch is labeled as 6 m. The arch is supported by two pillars on either side.

Phương trình của Elip có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, 0 < b < a$.

Câu 4: Trong bản vẽ thiết kế, vòm của ô thoáng trong hình ảnh dưới đây là nửa nằm phía trên trục hoành của elip có phương trình $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Biết rằng 1 đơn vị trên mặt phẳng tọa độ của bản vẽ thiết kế ứng với $30cm$ trên thực tế.



- ## Lời giải

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$ hay $a = 4.30 = 120cm$. Vậy bề rộng của cửa vòm cửa ô thoáng là $2a = 240cm$.

$x = 2,5$ vào phương trình $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, ta được

$$\frac{2,5^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{39}{16} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{39}}{4}.$$

Kết luận: Vậy chiều cao h của ô thoáng cần tìm là $h = \frac{\sqrt{39}}{4} \cdot 30 \approx 46,84cm$.

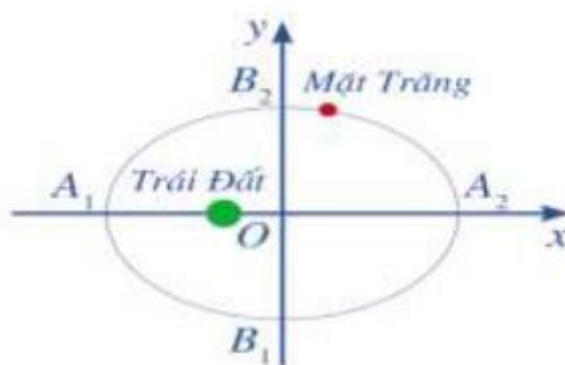
Khi đó $\begin{cases} 2a = 20m \\ b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 100 \\ b^2 = 64 \end{cases}$

Một người đang đứng cách chân tường 5m ứng với vị trí có hoành độ $x=5m$, thay $x=5m$ vào phương trình trên ta được $\frac{5^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1 \Rightarrow y^2 = 48 \Rightarrow y = 4\sqrt{3} \approx 6,93m$.

Câu 6: Ta biết rằng Mặt Trăng chuyển động quanh Trái Đất theo một quỹ đạo là một Elip mà Trái Đất là một tiêu điểm. Elip có chiều dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là 768800 km và 767619 km , *Precalculus: Real Mathematics, Real People*, Cengage). Tính khoảng cách ngắn nhất và khoảng cách dài nhất từ Trái Đất đến Mặt Trăng, biết rằng các khoảng cách đó đạt được khi Trái Đất và Mặt Trăng nằm trên trục lớn Elip.



Lời giải



Phương trình của Elip có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ta có Elip có chiều dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là 768800 km và 767619 km nên ta có hệ phương trình

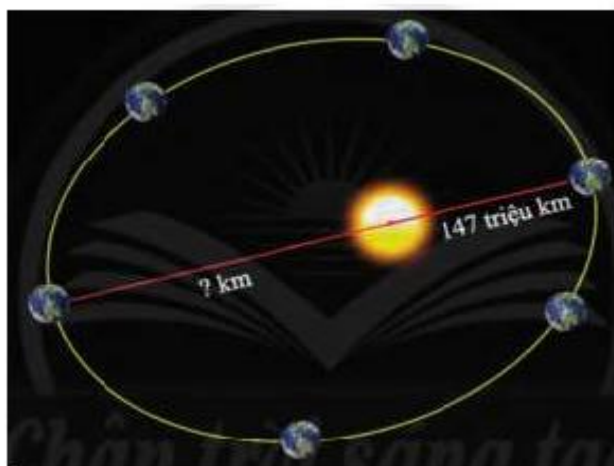
$$\begin{cases} 2a = 768800 \\ b = 767619 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 384400 \text{ (km)} \\ b = 384053 \text{ (km)} \end{cases}$$

Mặt khác $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} \approx 21298,54 \text{ (km)}$

Khoảng cách **xa nhất** giữa mặt trăng với trái đất là $d_{\max} = a + c \approx 405698,54 \text{ (km)}$

Khoảng cách **gần nhất** giữa mặt trăng với trái đất là $d_{\min} = a - c \approx 363101,46 \text{ (km)}$.

Câu 7: Trái Đất chuyển động theo quỹ đạo là đường elip có tâm sai là 0,0167 và nhận tâm Mặt Trời là một tiêu điểm. Cho biết khoảng cách **gần nhất** giữa Trái Đất và tâm Mặt Trời là khoảng 147 triệu km. Viết phương trình của elip biểu diễn quỹ đạo chuyển động của Trái đất và tính khoảng cách **xa nhất** giữa Trái Đất và tâm Mặt Trời.



Lời giải

Phương trình của Elip biểu diễn quỹ đạo chuyển động của Trái Đất quay xung quanh

Mặt Trời có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (0 < b < a)$.

Khoảng cách **gần nhất** giữa Trái Đất và tâm Mặt Trời là $d_{\min} = a - c \approx 147$ triệu *km*

Đường elip có tâm sai là 0,0167, suy ra $e = 0,0167 \Rightarrow \frac{c}{a} = 0,0167 \Rightarrow c = 0,0167a$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} a - c = 147 \\ c = 0,0167a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 149,5 \\ b = 2,5 \end{cases}$. Khi đó $b^2 = 149,5^2 - 2,5^2 = 22344$.

Vậy phương trình của elip cần tìm là $\frac{4x^2}{89401} + \frac{y^2}{22344} = 1$.

Khoảng cách **xa nhất** giữa Trái Đất và tâm Mặt Trời là $d_{\max} = a + c = 152$ triệu (km).

Câu 8: Ngày 04/10/1957, Liên Xô đã phóng thành công một vệ tinh nhân tạo đầu tiên đi vào không gian, vệ tinh mang tên Sputnik 1. Vệ tinh đó có quỹ đạo hình elip nhận tâm trái đất là một tiêu điểm. Cho biết khoảng cách xa nhất giữa tâm Trái Đất và vệ tinh là $7310km$ và khoảng cách gần nhất giữa tâm Trái Đất và vệ tinh là $6586km$. Viết phương trình của elip biểu diễn quỹ đạo chuyển động của vệ tinh Sputnik 1 và tìm tâm sai của elip đó.



Lời giải

Phương trình elip biểu diễn quỹ đạo chuyển động của Sputnik 1 có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Khoảng cách **xa nhất** giữa mặt trăng với trái đất là $d_{\max} = a + c = 7310(km)$

Khoảng cách **gần nhất** giữa mặt trăng với trái đất là $d_{\min} = a - c = 6586 \text{ (km)}$.

Vây phương trình của Elip biểu diễn quỹ đạo chuyển động của vệ tinh Sputnik 1 là

$$\frac{x^2}{48274704} + \frac{y^2}{48143660} = 1 \text{ và tâm sai của elip là } e = \frac{c}{a} \approx 0,05.$$

Phương trình của elip biểu diễn quỹ đạo chuyển động có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (0 < b < a)$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} e = 0,052 \\ 2c = 724 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{c}{a} = 0,052 \\ b = 362 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{90500}{13} \\ c = 362 \end{cases}$.

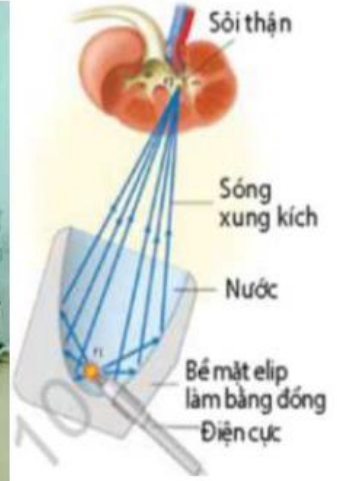
$$d_{\max} = (a + c) - R \approx 952,54 (km)$$
$$d_{\min} = (a - c) - R \approx 228,54 (km)$$

b. Biết khoảng cách gần nhất từ sao chổi Halley đến tâm Mặt Trời là khoảng 88.106 km , tính khoảng cách xa nhất.

a. Giả sử hình elip có độ dài trục thực là $2a$ và tiêu cự là $2c$ và elip chứa quỹ đạo chuyển động của sao chổi Hallley có độ dài trục thực là $2a'$ và tiêu cự là $2c'$.

7 | Ths. Lê Việt – THPT Thăng Long, Hà Nội – Phone: 0835221183 - Ôn thi cam kết điểm số

Câu 12: Trong y học, máy tán sỏi ngoài cơ thể hoạt động theo nguyên lý sử dụng sóng xung kích hội tụ tập trung vào viên sỏi trong cơ thể để phá vỡ nó thành vụn nhỏ. Các vụn nhỏ này sau đó sẽ được cơ thể bệnh nhân bài tiết ra ngoài. Để làm điều này, người ta đặt một nguồn phát sóng tại tiêu điểm của gương phản xạ elip. Bác sĩ sẽ điều chỉnh máy hoặc vị trí nằm của bệnh nhân sao cho viên sỏi ở tiêu điểm còn lại. Theo tính chất của phản xạ của elip, chùm tia phản xạ sẽ hội tụ vào vị trí đặt viên sỏi để phá vỡ nó. Cho biết elip có độ dài trục nhỏ là 16cm và tâm sai $e = 0,92$. Khi thao tác điều trị bằng máy tán sỏi này thì cần đặt nguồn phát sóng cách vị trí viên sỏi một khoảng bằng bao nhiêu cm ? Kết quả được làm tròn đến hàng phần mười.



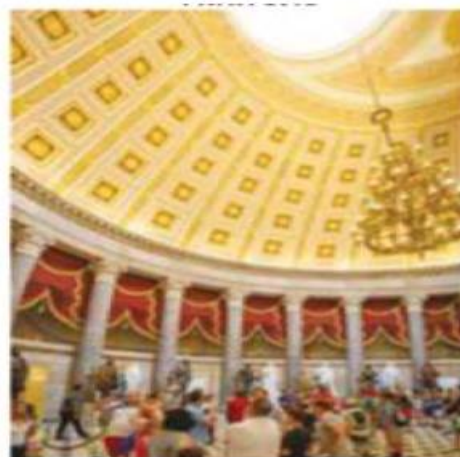
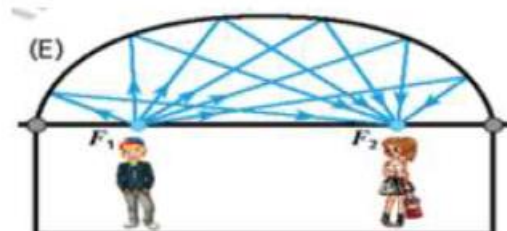
Lời giải

Theo giả thiết elip có độ dài trục nhỏ là 16cm nên ta có $2b = 16 \Rightarrow b = 8\text{cm} \Rightarrow a^2 - c^2 = 64(1)$.

Tâm sai $e = \frac{c}{a} = 0,92 \Rightarrow a = \frac{c}{0,92}$ thay vào (1) ta được: $\left(\frac{c}{0,92}\right)^2 - c^2 = 64 \Leftrightarrow c \approx 18,8\text{cm}$.

Vậy cần đặt nguồn phát sóng cách vị trí viên sỏi một khoảng là $2c \approx 37,6\text{cm}$.

Câu 13: “Phòng thì thầm” là những căn phòng với trần nhà có mặt cắt là một nửa elip. Trong các căn phòng này, nhờ tính chất phản xạ của elip, một người đứng tại một tiêu điểm có thể nghe thấy rõ tiếng nói nhỏ của một người khác đứng tại tiêu điểm kia. Nhờ tính chất độc đáo này, một số kiến trúc xây dựng ở nhà hát, phòng triển lãm, bảo tàng cũng được thiết kế theo nguyên lý của “phòng thì thầm” để mang lại những trải nghiệm thú vị cho khách tham quan. Một phòng thì thầm với trần nhà có mặt cắt là một nửa elip (E) có tâm sai $e = 0,8$. Biết rằng trong phòng này có hai người đang đứng cách nhau 24m mà vẫn nghe rõ tiếng nói nhỏ của nhau. Hãy xác định độ dài trục lớn và độ dài trục nhỏ của (E).

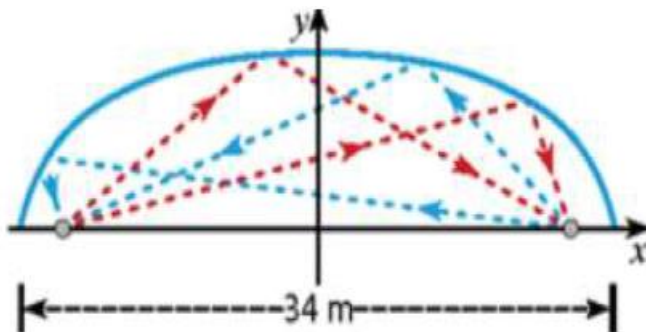


Phương trình của Elip biểu diễn mái vòm trần có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (0 < b < a)$.

Theo giả thiết có tâm sai $e = 0,8 \Rightarrow \frac{c}{a} = 0,8 \Rightarrow a = 15cm \Rightarrow 2a = 30m$.

Kết luận: độ dài trục lớn của elip bằng $30m$ và độ dài trục nhỏ của elip bằng $18m$.

Câu 14: Hai bạn Tài và Dũng tham quan một phòng thi thăm có chiều dài $34m$, trần nhà có mặt cắt là một nửa elip với hai tiêu điểm nằm trên mặt sàn. Đứng ở vị trí trên trục lớn của elip và cách tường $1m$. Tài đo được chiều cao trần tại đó là $3,2m$.



- b) Hai bạn có một trải nghiệm thú vị như sau: nằm trên mặt sàn sao cho miệng đặt ngay tại vị trí của tiêu điểm, hai bạn có thể thì thầm nói chuyện với nhau cứ như đang ở gần bên cạnh, khoảng cách giữa hai lúc này là bao nhiêu? Nếu một trong hai bạn nói thì thầm thì bao nhiêu giây bạn kia sẽ nghe thấy? Cho biết tốc độ âm thanh truyền trong không khí là 343m/s .

a) Phương trình của Elip biểu diễn mái vòm trần có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (0 < b < a)$.

Khi đó phương trình của Elip có dạng $\frac{x^2}{17^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3, 2m. Khi đó điểm $M(16; 3, 2) \in (E)$ nên ta có $\frac{16^2}{17^2} + \frac{3,2^2}{b^2} = 1$, suy ra $b^2 = \frac{73984}{825}$.

Vậy phương trình của Elip biểu diễn mái vòm trần là $\frac{x^2}{289} + \frac{825y^2}{73984} = 1$.

Kết luận: Chiều cao lớn nhất của trần nhà so với sàn nhà là $h_{\max} = \sqrt{\frac{73984}{825}} \approx 9,47m$.

- b) Từ hệ thức $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 289 - \frac{73984}{825} \approx 199,3 \Rightarrow c \approx 14,1m$.

Khoảng cách giữa hai ban chính bằng độ dài tiêu cự của Elip và bằng $2c \approx 28,2m$.

The diagram shows a semi-circular arch with a radius of 1,6 m and a span of 7,6 m. A truss structure is overlaid on the arch, with blue members and red dashed lines indicating the geometry. The truss consists of a horizontal base with two support points, and a series of members connecting points on the arch to the base and to each other. The vertical distance from the base to the center of the arch is 1,6 m, and the horizontal distance from the left support to the center is 7,6 m.

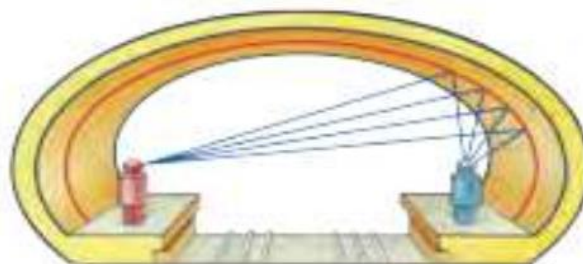
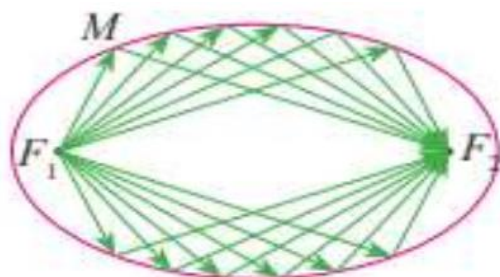
Phương trình của Elip biểu diễn mái vòm trần có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (0 < b < a)$.

Dựa theo hình vẽ, ta thấy $b = 7,6 - 1,6 = 6 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

Do đó quãng đường mà âm thanh đã đi là $MF_1 + MF_2 = 2a = 20(m)$.

Vây âm thanh thì **thâm** từ **một** tiêu điểm thì sau $0,0583(s)$ sẽ đến được tiêu điểm kia.

A diagram of a semi-circular archway. The arch is represented by a purple semi-circle with a radius of 4 m, centered at the origin O of a Cartesian coordinate system. The horizontal distance from the left base to the right base is 16 m. A yellow light is positioned on the left side of the arch, and a white statue is on the right side. Yellow lines represent the light rays from the light to the statue. The vertical distance from the base to the top of the arch is 4 m, and the vertical distance from the base to the statue is 3 m.

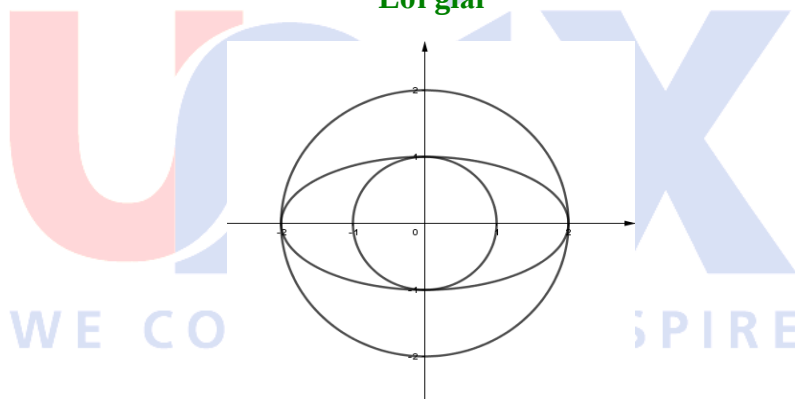


a. Viết phương trình chính tắc của elip biểu diễn mái vòm trần nhà trong hệ trục tọa độ Oxy .

Lời giải

Nguồn sáng được đặt ở tiêu điểm thứ nhất $F_1(-\sqrt{55}; 0)$. Để bức xạ được chiếu sáng nhất thì bức xạ cần được đặt ở tiêu điểm còn lại của elip, đó là điểm $F_2(\sqrt{55}; 0)$.

Lời giải



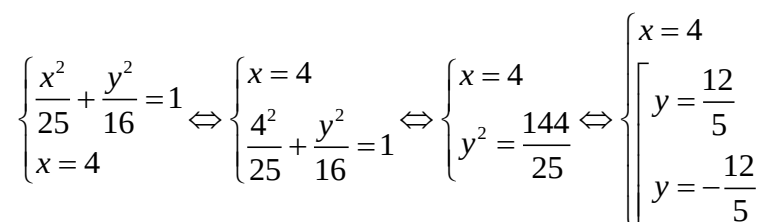
Vậy phương trình chính tắc của elip đó là $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Lời giải

Điểm A thuộc trục hoành $Ox \Rightarrow A(a;0)$ và điểm B thuộc trục tung $Oy \Rightarrow B(0;b)$. Theo bài có $AB = 2019cm \Rightarrow a^2 + b^2 = 2019^2$

Suy ra có $9x^2 + \frac{9y^2}{4} = 2019^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{2019^2}{9}} + \frac{y^2}{\frac{4 \cdot 2019^2}{9}} = 1$. Vậy tập hợp điểm M là đường Elip.

Lời giải



Hai giao điểm là $M\left(4; \frac{12}{5}\right); N\left(4; -\frac{12}{5}\right)$.

Câu 21: Cho elip $3x^2 + 4y^2 - 48 = 0$ và đường thẳng $d: x - 2y + 4 = 0$. Tìm tọa độ giao điểm của d và Elip.

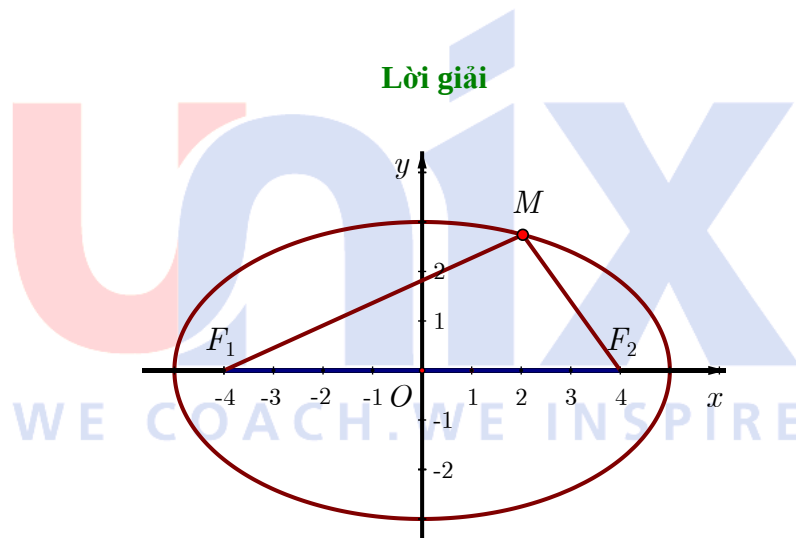
Lời giải

$$\text{Xét hệ phương trình: } \begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 3x^2 + 4y^2 - 48 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 4 \\ 16y^2 - 48y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 0 \\ x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của d và elip là $(-4; 0), (2; 3)$.

Câu 22: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho Elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ có hai tiêu điểm F_1, F_2 . Biết điểm M có tung độ y_M dương thuộc Elip (E) sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác MF_1F_2 bằng $\frac{4}{3}$. Tính y_M

Lời giải



Ta có: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$

$$MF_1 + MF_2 + F_1F_2 = 2a + 2c = 18.$$

Suy ra: $S_{MF_1F_2} = p \cdot r = 9 \cdot \frac{4}{3} = 12$. Suy ra $12 = \frac{1}{2} y_M \cdot F_1F_2 \Rightarrow y_M = 3$.

Câu 23: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ có hai tiêu điểm F_1 và F_2 . Tìm điểm M thuộc (E) sao cho $MF_1 = 4MF_2$.

Lời giải

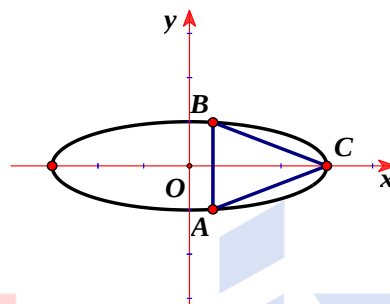
Từ phương trình $(E): \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 \Rightarrow a = 10, b = 6 \Rightarrow c = 8$

$$\text{Vậy } y_M^2 = 9 \left(1 - \frac{x_M^2}{25} \right) = \frac{119}{16} \Rightarrow y_M = \pm \frac{\sqrt{119}}{4}.$$

$$\text{Vậy có hai điểm là } M_1 \left(\frac{25}{12}; \frac{\sqrt{119}}{4} \right); M_2 \left(\frac{25}{12}; -\frac{\sqrt{119}}{4} \right).$$

Câu 27: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $C(3;0)$ và elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$. A, B là 2 điểm thuộc (E) sao cho $\triangle ABC$ đều, biết tọa độ của $A \left(\frac{a}{2}; \frac{c\sqrt{3}}{2} \right)$ và A có tung độ âm. Khi đó $a+c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Nhận xét: Điểm $C(3;0)$ là đỉnh của elip $(E) \Rightarrow$ điều kiện cần để $\triangle ABC$ đều đó là A, B đối xứng nhau qua Ox . Suy ra A, B là giao điểm của đường thẳng $\Delta: x = x_0$ và elip (E) .

$$+) \text{ Ta có elip } (E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{3}\sqrt{9-x^2} \\ y = \frac{1}{3}\sqrt{9-x^2} \end{cases}.$$

$$+) \text{ Theo giả thiết } A \text{ có tung độ âm nên tọa độ của } A \left(x_0; -\frac{1}{3}\sqrt{9-x_0^2} \right)$$

$$+) \text{ Ta có } AC = \sqrt{(3-x_0)^2 + \frac{1}{9}(9-x_0^2)} \text{ và } d_{(C;\Delta)} = |3-x_0|$$

$$+) \triangle ABC \text{ đều} \Leftrightarrow d_{(C;\Delta)} = \frac{\sqrt{3}}{2} AC \Leftrightarrow |3-x_0| = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(3-x_0)^2 + \frac{1}{9}(9-x_0^2)}$$

$$\Leftrightarrow (3-x_0)^2 = \frac{3}{4} \left[(3-x_0)^2 + \frac{1}{9}(9-x_0^2) \right]$$

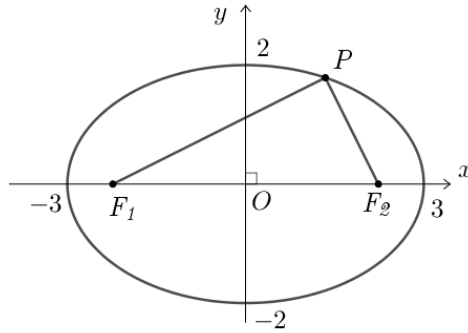
$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x_0^2 - \frac{3}{2}x_0 + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{3}{2}(t/m) \\ x_0 = 3(L) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow a+c=2.$$

Câu 28: Gọi F_1, F_2 là các tiêu điểm của elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và P là điểm thuộc elip (E) sao cho

$$\frac{PF_1}{PF_2} = 2. \text{ Tìm tọa độ của } P.$$

Lời giải



Ta có $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$. Khi đó $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$.

Ta có $PF_1 + PF_2 = 2a = 2.3 = 6$ mà $PF_1 = 2PF_2$.

Do đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} PF_1 + PF_2 = 6 \\ PF_1 - 2PF_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} PF_1 = 4 \\ PF_2 = 2 \end{cases}$

Mặt khác F_1, F_2 là các tiêu điểm của elip (E) nên $F_1(-\sqrt{5}; 0), F_2(\sqrt{5}; 0), P(x; y)$.

$$\begin{cases} PF_1 = 4 \\ PF_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + \sqrt{5})^2 + y^2 = 16 \\ (x - \sqrt{5})^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{5}}{5} \\ y = \pm \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Vậy $P\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}; \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$ hoặc $P\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}; -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$.

Câu 29: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho Elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Gọi M là điểm di động trên elip. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên các trục tọa độ Ox, Oy . Tìm M để tứ giác $OHMK$ có diện tích lớn nhất.

Lời giải

Theo giả thiết $OHMK$ là tứ giác nên điểm M sẽ không nằm trên trục hoành hay trục tung.

Gọi $M(x; y)$ là điểm cần tìm, $(x, y \neq 0)$.

Dễ thấy tứ giác $OHMK$ là hình chữ nhật.

Mặt khác, ta có:

$$1 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{9} \cdot \frac{y^2}{4}} = \frac{1}{3}|xy| \Rightarrow |xy| \leq 3$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = \pm \sqrt{2} \end{cases}$.

Vậy tứ giác $OHMK$ có diện tích lớn nhất khi

$$M \in \left\{ \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2} \right), \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\sqrt{2} \right), \left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2} \right), \left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}; -\sqrt{2} \right) \right\}.$$

Lời giải

B, C đối xứng qua trục Ox , giả sử $B(x_0; y_0), C(x_0; -y_0)$ với $y_0 > 0$.

$$B, C \text{ nằm trên } (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{3} = 1 \Leftrightarrow x_0^2 + 3y_0^2 = 9.$$

$$\text{v\grave{a}} (BC): x = x_0 \Rightarrow d(A, (BC)) = |3 - x_0|.$$

Vì $A(3;0) \in Ox$, B, C đối xứng qua trục $\Rightarrow \Delta ABC$ cân tại $A \Rightarrow \Delta ABC$ đều

$$\Leftrightarrow d(A, (BC)) = \frac{\sqrt{3}}{2} BC \Leftrightarrow |3 - x_0| = \sqrt{3} y_0 \Leftrightarrow 3y_0^2 = (x_0 - 3)^2$$

$$\Rightarrow x_0^2 + (x_0 - 3)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 3 \end{cases}.$$

Víti $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = \sqrt{3} \Rightarrow B(0; \sqrt{3}), C(0; -\sqrt{3})$.

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 0$.

Câu 31: Cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, với tiêu điểm F_1, F_2 . Lấy hai điểm $A, B \in (E)$ sao cho $AF_1 + BF_1 = 8$.

Khi đó, $AF_2 + BF_2 = ?$

Lời giải

$$(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5.$$

Ta có $A \in (E) \Leftrightarrow AF_1 + AF_2 = 2a = 10$.

$$B \in (E) \Leftrightarrow BF_1 + BF_2 = 2a = 10.$$

$$\Rightarrow (AF_1 + BF_1) + (AF_2 + BF_2) = 20$$

$$\Leftrightarrow 8 + (AF_2 + BF_2) = 20$$

$$\Leftrightarrow AF_2 + BF_2 = 12.$$

Câu 32: Cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Điểm $M \in (E)$ sao cho M nhìn F_1, F_2 dưới một góc vuông. Khi đó tính MF_1 .

Lời giải

$$(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow c = 4$$

$$\text{Ta có } M \in (E) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2a = 10. \quad (1)$$

$$\text{Tam giác } MF_1F_2 \text{ vuông tại } M \text{ nên } MF_1^2 + MF_2^2 = F_1F_2^2 = (2c)^2 = 64. \quad (2)$$

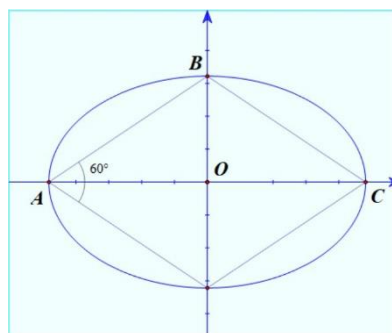
Từ (1) và (2) ta có hệ

$$\begin{cases} MF_1 + MF_2 = 10 \\ MF_1^2 + MF_2^2 = 64. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MF_1 = 5 + \sqrt{7} \\ MF_2 = 5 - \sqrt{7} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} MF_1 = 5 + \sqrt{7} \\ MF_2 = 5 - \sqrt{7} \end{cases}.$$

Câu 33: Các đỉnh của Elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; (a > b > 0)$ tạo thành hình thoi có một góc ở đỉnh là 60° , tiêu cự của (E) là 8. Tìm tọa độ điểm có tung độ lớn nhất thuộc (E)

Lời giải



Gọi hình thoi là $ABCD$ và $A = 60^\circ$.

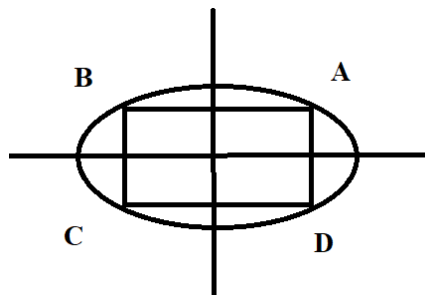
$$\text{Tiêu cự là } 8 \Rightarrow a^2 - b^2 = 64 \quad (1).$$

Mặt khác xét tam giác AOB vuông tại O có góc $BAO = 30^\circ$ nên

$$OB = OA \tan 30^\circ \Leftrightarrow b = a \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} a \text{ thay vào phương trình (1)}$$

$$(0; 4\sqrt{2})$$

Lời giải



Vậy $A\left(3; \frac{12}{5}\right), A\left(4; \frac{9}{5}\right)$.

Câu 35: Tìm điểm có hoành độ bằng 0 trên Elip có một tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3}; 0)$ và đi qua $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Lời giải

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3} \Rightarrow a^2 - b^2 = 3$$

$$M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in (E) \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \Leftrightarrow 4b^2 + 3a^2 = 4a^2b^2$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 4b^2 + 3a^2 = 4a^2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 3 + b^2 \\ 4b^2 + 3(3 + b^2) = 4(3 + b^2)b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 3 + b^2 \\ 4b^4 + 5b^2 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases}$$

Phương trình elip là: $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$

Câu 36: Tìm điểm M có tung độ bằng 3 thuộc Elip có phương trình chính tắc, biết Elip đi qua điểm N (6;0) và có tâm sai bằng $\frac{1}{2}$.

Phương trình chính tắc của Elip có dạng (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$.

$$c = 3 \Rightarrow b^2 = 27.$$
$$\text{Vây } (E): \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1.$$

Do đó điểm có tung độ bằng 3 thuộc Elip là: $M(-2\sqrt{6}; 3); N(2\sqrt{6}; 3)$.

Câu 37: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Tìm điểm $M \in (E)$ sao cho $F_1MF_2 = 90^\circ$ (F_1, F_2 là hai tiêu cự của Elip).

Xét elip E có $a=5, b=3 \Rightarrow c=4$, các tiêu cự $F_1(-4;0), F_2(4;0)$

Điểm M thuộc đường tròn T tâm O , bán kính bằng c . Phương trình của T : $x^2 + y^2 = 16$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{175}{16} \\ y^2 = \frac{81}{16} \end{cases}$$

Ta thu được 4 giao điểm tao nên mô hình chữ nhật như hình vẽ.

$$M\left(\frac{5\sqrt{7}}{4}; \frac{9}{4}\right); M\left(-\frac{5\sqrt{7}}{4}; \frac{9}{4}\right); M\left(\frac{5\sqrt{7}}{4}; -\frac{9}{4}\right); M\left(-\frac{5\sqrt{7}}{4}; -\frac{9}{4}\right).$$

(E): $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ sao cho diện tích tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $AB = \sqrt{5}$ và phương trình đường thẳng AB: $x + 2y - 7 = 0$.

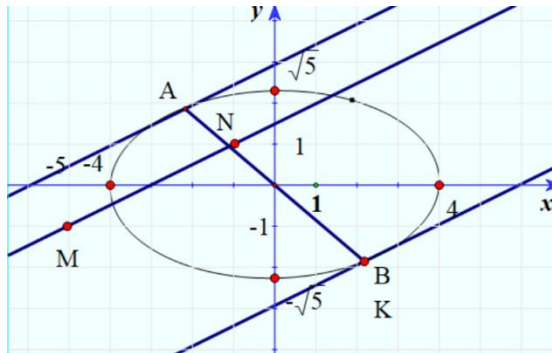
Từ suy ra $|x| \leq 2\sqrt{2}, |y| \leq \sqrt{2}, x+2y < 7$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$\Rightarrow -\sqrt{34} \leq 2x + y \leq \sqrt{34} \Rightarrow 7 - 2x - y \geq 7 - \sqrt{34} \Rightarrow d(M, AB) \geq \frac{11 - \sqrt{34}}{\sqrt{5}}.$$

$$\begin{cases} \frac{x}{16} = \frac{y}{2} \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8y \\ 8y^2 + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} M\left(\frac{8\sqrt{34}}{17}; \frac{\sqrt{34}}{17}\right) \\ M\left(-\frac{8\sqrt{34}}{17}; -\frac{\sqrt{34}}{17}\right) \end{bmatrix}.$$

Lời giải


$$\overrightarrow{MN} = (4; 2) \Rightarrow MN = 2\sqrt{5}$$

21 | **Ths. Lê Việt – THPT Thăng Long, Hà Nội – Phone: 0835221183 - Ôn thi cam kết điểm số**

$$S_{\Delta KMN} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot d(K, MN)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{|x_0 - 2y_0 + 3|}{\sqrt{5}} = |x_0 - 2y_0 + 3| \text{ với } K(x_0; y_0)$$

$\Rightarrow S_{\Delta KMN}$ lớn nhất khi $d(K, MN)$ lớn nhất.

+ Nhận thấy (E) có hai tiếp tuyến song song với MN , gọi A, B là hai tiếp điểm tương ứng. Khi đó $d(K, MN)$ lớn nhất khi $K \equiv B$.

+ Mà tiếp tuyến tại $K(x_0; y_0)$ có phương trình là: $\frac{x_0 x}{16} + \frac{y_0 y}{5} = 1$ hay $y = -\frac{5x_0}{16y_0}x + \frac{5}{y_0}$.

+ Từ đó ta có:

$$\begin{cases} \frac{-5x_0}{16y_0} = \frac{1}{2} \\ \frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{5} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -\frac{5}{8}x_0 \\ x_0 = \pm \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow K\left(\frac{8}{3}; -\frac{5}{3}\right) \Rightarrow S_{\Delta KMN} = 9.$$

Câu 40: Đường thẳng $d: 3x + 4y - 12 = 0$ cắt Elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ tại hai điểm phân biệt A, B . Biết rằng điểm $C(x_0; y_0) \in (E)$ sao cho diện tích tam giác ABC bằng 6, tìm C .

Lời giải

Tọa độ giao điểm của d và (E) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 12 = 0 \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \\ x = 0 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Vậy $A(4; 0)$ và $B(0; 3) \Rightarrow AB = 5$.

Điểm $C(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{9} = 1$ (1).

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d(C; AB) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{|3x_0 + 4y_0 - 12|}{5} = \frac{1}{2} |3x_0 + 4y_0 - 12|.$$

$$\text{Mà } S_{\Delta ABC} = 6 \Rightarrow |3x_0 + 4y_0 - 12| = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0 + 4y_0 = 24 \quad (2) \\ 3x_0 + 4y_0 = 0 \quad (3) \end{cases}.$$

Từ (1) và (2) ta được $2y_0^2 - 12y_0 + 27 = 0$.

$$\text{Từ (1) và (3) ta được } 32y_0^2 = 144 \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow x_0 = -2\sqrt{2} \\ y_0 = -\frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow x_0 = 2\sqrt{2} \end{cases}.$$

Vậy có hai điểm là $C_1\left(-2\sqrt{2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right); C_2\left(2\sqrt{2}; -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

Câu 41: Cho đường thẳng (d) qua $M(1;1)$ và cắt Elíp $(E): 4x^2 + 9y^2 = 36$ tại hai điểm M_1, M_2 sao cho $MM_1 = MM_2$. Tìm tổng hoành độ giao điểm của (d) và Elíp $(E): \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$.

Lời giải

Thay tọa độ điểm M và biểu thức ta có: $4.1^2 + 9.1^2 < 36$

$\Rightarrow M$ nằm trong (E) .

Mà $MM_1 = MM_2 \Rightarrow M$ là trung điểm $M_1M_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 2x_M = 2$.

Đường thẳng qua $M(1;1)$ có dạng: $y = k(x-1) + 1$.

Hoành độ M_1, M_2 thỏa mãn phương trình:

$$4x^2 + 9[k(x-1) + 1]^2 = 36.$$

$$\Leftrightarrow (4 + 9k^2)x^2 + 18k(1-k)x + 9(1-k)^2 - 36 = 0.$$

$$\text{Ta có } x_1 + x_2 = \frac{18k(k-1)}{(4+9k^2)} = 2 \Leftrightarrow k = -\frac{4}{9}.$$

Suy ra phương trình đường thẳng cần tìm là $y = -\frac{4}{9}(x-1) + 1 \Leftrightarrow 4x + 9y - 13 = 0$.

Giao điểm của $(E): \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$ và đường thẳng $4x + 9y - 13 = 0$ (d) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 9y - 13 = 0 \\ \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{13-4x}{9} \\ \frac{x^2}{36} + \frac{(13-4x)^2}{2187} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{13-4x}{9} \\ \frac{179}{4}x^2 - 104x - 2018 = 0 \end{cases}$$

Vậy tổng hoành độ giao điểm là: $\frac{416}{179}$.